Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2011

Topologie

Übungsaufgaben 1

1. **a)** Seien A und B zwei verschiedene echte, nichtleere Teilmengen einer Menge X. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit

$$\tau = \{\varnothing, X, A, B\}$$

eine Topologie auf X definiert?

b) Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{a, b, c\}$ an, welche genau vier offene Mengen besitzen.

c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die weder diskret noch antidiskret ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch mit den offenen Mengen sind.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Die von der Metrik induzierte Topologie auf X ist die gröbste, so dass für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig ist.

b) Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ stetig, und das Urbild der Null ist gerade $\overline{A}$.

c) Für je zwei nichtleere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$.

3. Sei p eine Primzahl. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir $\nu(z) = \sup\{n : p^n \text{ teilt } z\}$ und

$$d(x, y) := p^{-\nu(x-y)},$$

mit der üblichen Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert, welche die starke Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

erfüllt. Was sind die Einheitssphären dieser Metrik? Wie sehen die ϵ-Bälle um $0 \in \mathbb{Z}$ aus?

4. Es sei $C([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen, reelwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Betrachten Sie die beiden Metriken

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Identität $\mathrm{id} : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$ zwischen den beiden induzierten Topologien in beiden Richtungen.

b) Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(0)$ stetig bezüglich d_∞ aber nicht stetig bezüglich d_2 ist.