Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Ulf Kühn

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 30.1.2019

Aufgabe 44*. Zeigen oder widerlegen sie die folgende Aussagen.

Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung mit zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängendem Totalraum E. Weiter sei $H = p_\sharp \pi_1(E, e_0) \subset \pi_1(B, b_0)$ für ein $e_0 \in E$ mit $p(e_0) = b_0$. Dann gilt

a) Die Überlagerung ist normal, genau dann wenn H normal ist.

b) $\mathrm{Deck}(E, p, B)$ ist isomorph zu $N(H)/H$, wobei $N(H) = \{ g \in \pi_1(B, b_0) : gHg^{-1} = H \}$ der Normalisator von H in $\pi_1(B, b_0)$ ist.

Aufgabe 43*.

Zeigen oder widerlegen sie die folgenden Aussage: Ist B zusammenhängend, dann ist die Überlagerung $p : E \to B$ genau dann normal, falls $\mathrm{Deck}(E, p, B)$ transitiv auf $p^{-1}(b)$ für ein $b \in B$ wirkt.

Aufgabe 42*.

Ist die Überlagerung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ normal?

Aufgabe 41*.

Zeigen oder widerlegen sie die folgende Aussage: Ist $p : E \to B$ eine Überlagerung mit $p(e_0) = b_0 \in B$ und dann ist für alle $k > 1$

$$p_\sharp : \pi_k(E, e_0) \to \pi_k(B, b_0)$$

ein Isomorphismus. Wann gilt die Aussage für $k = 1$?

Prof. Dr. U. Kühn · Geom. 331 ·Tel. (040) 42838-5185 · kuehn@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/kuehn

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 23.1.2019

Aufgabe 40.

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Jede freie Wirkung einer endlichen Gruppen auf einem Hausdorff-Raum ist diskontinuierlich.

Aufgabe 39.

Zeigen Sie, dass in einer Überlagerung mit zusammenhängender Basis jeder Punkt die gleiche Anzahl von Urbildern besitzt.

Aufgabe 37 & 38.

Für einen topoplogischen Raum X und einen Punkt $x_0 \in X$ sei

$$\Omega^1(X, x_0) = \{ \gamma : [0,1] \to X \text{ stetig } : \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \}$$

und damit definieren wir induktiv

$$\Omega^k(X, x_0) = \Omega^1(\Omega^{k-1}, \epsilon_{x_0}),$$

wobei ϵ_{x_0} die konstante Abbildung ist. Versehen wir diese Menge mit der Verknüpfung von Wegen, so erhalten wir die k-ten Homotopiegruppen

$$\pi_k(X, x_0) := \pi_0(\Omega^k(X, x_0), \epsilon_{x_0}).$$

a) Zeigen Sie, die Elemente von $\pi_k(X, x_0)$ entsprechen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $f : [0,1]^k \to X$ mit $f|_{\partial[0,1]^k} = x_0$.

b) Zeigen Sie, ein Weg $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$ induziert einen Isomorphismus

$$\pi_k(X, x_0) \to \pi_k(X, x_1).$$

c) Zeigen Sie unter Verwendung von b), dass die natürliche Abbildung

$$\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\pi_k(X, x_1))$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass für $k \geq 2$ die Gruppen $\pi_k(X, x_1)$ stets abelsch sind.

e) Berechnen Sie $\pi_k(\mathbb{R}^n)$ für $k, n \geq 1$.

f) Berechnen Sie $\pi_2(S^1 \vee S^1)$ und das Bild von $\pi_1(S^1 \vee S^1) \in \mathrm{Aut}(\pi_2(S^1 \vee S^1))$.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 16.1.2019

Aufgabe 35 & 36.

Berechnen Sie mit dem Satz von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe von dem Torus T^2, der Kleinschen Fläche K^2, den reellen projektiven Räumen $\mathbb{R}P^n$ und den komplexen projektiven Räumen $\mathbb{C}P^n$.

Aufgabe 34.

Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist! Dabei können Sie entweder den Raum X als Vereinigung zweier geeigneter offener Teilmengen schreiben und den Satz von Seifert und van Kampen anwenden, oder Sie zeigen, dass $S^1 \vee S^2$ ein Deformationsretrakt von X ist.

Aufgabe 33.

Für beliebige punktierte topologische Räume $(X_i, x_i)_{i \in I}$ ist die Einpunktvereinigung $\bigvee_{i \in I} X_i$ definiert als die Verklebung von $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ mit einem Einpunktraum $Y = \{*\}$ entlang der offensichtlichen Abbildung $f : A \to Y$, wobei $A \subset \bigcup_{i \in I} X_i$ gerade die Teilmenge aller Basispunkte ist.

a) Beschreiben Sie eine Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ (Einpunktvereinigung von n Kopien von S^1) in $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: Sind $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$, so ist das Bild einer geeigneten Einbettung von $\bigvee_{i=1}^n S^1$ ein strenger Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, ..., x_n\}$.

c) Gilt eine analoge Aussage im $\mathbb{R}^3$?

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 19.12.2018

Aufgabe 31 & 32.
Es seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume. Entscheiden Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften von X, ob Y diese auch haben muss:

a) X ist wegzusammenhängend.

b) X ist zusammenhängend.

c) $X \setminus *$ ist zusammenhängend, wobei $* \in X$ ein beliebiger Punkt ist.

d) X ist kompakt.

e) X besitzt eine abzählbare Basis.

f) X ist Hausdorffsch.

Aufgabe 30.
Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X; x)$ kann man als Menge der relativen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^1 \to X$ auffassen, welche den Basispunkt $1 \in S^1$ auf $x \in X$ abbilden. Sei $[S^1, X]$ die Menge der Homotopieklassen von $S^1 \to X$ ohne Bedingungen an den Basispunkt (man nennt diese *freie* Homotopieklassen). Dann gibt es eine natürliche Abbildung $\Phi : \pi_1(X; x) \to [S^1, X]$, welche jeder relativen Homotopieklasse ihre freie Homotopieklassen zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass Φ für wegzusammenhängendes X surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente $[\gamma_0]$ und $[\gamma_1]$ in $\pi_1(X; x)$ genau dann das gleiche Bild unter Φ haben, wenn sie in der Gruppe $\pi_1(X; x)$ konjugiert zueinander sind.

Insbesondere induziert also für ein wegzusammenhängendes X die Abbildung Φ eine Bijektion zwischen Konjugationsklassen in $\pi_1(X; x)$ und der Menge $[S^1, X]$ der freien Homotopieklassen.

Aufgabe 29.
Beweisen Sie, dass die Sphären S^n für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend sind, indem Sie folgendes zeigen:

a) Jeder Weg $\gamma \in \Omega(S^n; x)$, welcher einen Punkt $y \neq x$ in S^n nicht trifft, ist homotop rel $\{0, 1\}$ zum konstanten Weg ϵ_x.

b) Sei nun $y \in S^n$ und $B(y, r) \subset S^n$ ein offener Ball um y, welcher x nicht enthält. Ist dann $\gamma \in \Omega(S^n; x)$ beliebig, so gibt es endlich viele disjunkte offene Intervalle $(a_i, b_i) \subset [0, 1]$, welche $\gamma^{-1}(y)$ überdecken und so gewählt werden können, dass ihre Randpunkte auf Randpunkte von $B(y, r)$ abgebildet werden.

c) Ist $n \geq 2$, so sind die Einschränkungen $\gamma \mid [a_i, b_i]$ jeweils homotop zu Wegen in $\overline{B(y, r)}$, welche y nicht treffen.

d) Aus diesen Aussagen folgt die Behauptung.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 12.12.2018

Aufgabe 28.

Sei X wegzusammenhängend. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) X ist einfach zusammenhängend.

b) Jede stetige Abbildung $g : S^1 \to X$ besitzt eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $G : \mathbb{D}^2 \to X$ mit $G\big|_{S^1} = g$.

c) Für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ sind je zwei beliebige Wege $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X; x_0, x_1)$ stets homotop relativ zu den Endpunkten.

Aufgabe 27.

a) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Verknüpfung $*$ von Schleifen assoziativ ist.

b) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Abbildung $h_\alpha : \pi_1(X; x_0) \to \pi_1(X; x_1)$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 26.

Zeigen sie:

a) Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X ist genau dann ein Deformationsretrakt, wenn es eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to A$ gibt mit $F(x,0) = x$ für alle $x \in X$, $F(X,1) \subset A$ und $F(a,1) = a$ für alle $a \in A$. Gilt sogar $F(a,t) = a$ für alle $a \in A$, so ist A ein strenger Deformationsretrakt.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Zwei topologische Räume X, Y sind genau dann homotopieäquivalent, wenn es einen topologischen Raum Z gibt, sodass X und Y Deformationsretrakte von Z sind.

c) Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ das Bild einer beliebigen Einbettung von S^1. Ist A stets ein Retrakt von $\mathbb{R}^3$?

b.w. ==>

Aufgabe 25.

Sei $\mathcal{C}(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen Raum Y. Zu einer kompakten Menge $K \subset X$ und einer offenen Menge $O \subset Y$ definieren wir

$$U(K,O) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset O\}.$$

Die kompakt offene Topologie (KO-Topologie) auf $\mathcal{C}(X,Y)$ ist die von der Subbasis

$$\sigma := \{U(K,O) \mid K \subset X \text{ kompakt}, O \subset Y \text{ offen}\}$$

erzeugte Topologie. Zeigen Sie:

a) Ist Y Hausdorffsch, so ist $\mathcal{C}(X,Y)$ in der KO-Topologie Hausdorffsch.

b) Ist X lokal kompakt und Hausdorffsch, so ist die Auswertungsabbildung

$$\epsilon : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$$

gegeben durch $\epsilon(f,x) = f(x)$ stetig.

c) Es gilt folgendes Exponentialgesetz: Sind X und Y Hausdorffsch und ist Y lokal kompakt, so ist die kanonische Abbildung zwischen den Räumen $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ und $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y,Z))$ ein Homöomorphismus.

(Bemerkung: Aufgrund von c) kann man eine Homotopie $X \times [0,1] \to Y$ als einen Weg in $[0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$ auffassen)

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 5.12.2018

Aufgabe 24.

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Kriterien für die Hausdorff-Eigenschaft von Quotientenräumen:

a) Ist X regulär und $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist der Quotientenraum X/A genau dann Hausdorffsch, wenn A abgeschlossen ist.

b) Ist X normal und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist der Quotientenraum $X/\sim$ genau dann Hausdorffsch, wenn alle Äquivalenzklassen abgeschlossene Teilmengen von X sind.

Aufgabe 23.

Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Topologie τ_{abz} der abzählbaren Komplemente. (Vergewissern Sie sich kurz: dies ist wirklich eine Topologie!) Zeigen Sie:

a) Eine Folge konvergiert in dieser Topologie genau dann gegen $x \in \mathbb{R}$, falls nur endlich viele Folgenglieder von x verschieden sind.

b) Eine Abbildung von $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$ in einen Hausdorff-Raum ist genau dann stetig, wenn sie konstant ist.

c) $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Aufgabe 22.

Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie τ_S, welche von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tau_S)$ normal ist!

b) Zeigen Sie, dass das Produkt $X = (\mathbb{R}, \tau_S) \times (\mathbb{R}, \tau_S)$ regulär ist!

c) Zeigen Sie, dass X aus b) nicht normal ist!

b.w. ==>

Aufgabe 21.

Wir betrachten die $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, d.h. die Menge aller Folgen von reellen Zahlen, mit der Produkttopologie.

a) Sind die Teilmengen $[0,1]^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sowie $\mathbb{R}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $\mathbb{R}^{\infty}$ die Teilmenge aller Folgen ist, die nur endlich viele von 0 verschiedene Glieder haben, lokal kompakt?

b) Welche Abzählbarkeitsaxiome erfüllt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

c*) Hyperreelle Zahlen (R. Goldblatt: Lectures on the Hyperreals):

Es ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der komponentenweise Addition und Multiplikation

$$r \oplus s = (r_1 + s_1, r_1 + s_1, ...)$$
$$r \odot s = (r_1 \cdot s_1, r_1 \cdot s_1, ...)$$

ein kommutativer Ring. Sei $\mathcal{F}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.

i) Zeigen Sie, die Relation $\equiv$ gegeben durch

$$r \equiv s \Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n = s_n\} \in \mathcal{F}$$

ist eine Äquivalenzrelation, die mit $\oplus$ und $\odot$ verträglich ist.

ii) Zeigen Sie, ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}/\equiv$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ echt enthält.

iii) Zeigen Sie, durch die Relation

$$r < s \Longleftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_n < s_n\} \in \mathcal{F}$$

wird ${}^*\mathbb{R}$ ein geordneter Körper. Bestimmen sie eine positive hyperreelle Zahl die kleiner als jede positive reelle Zahl ist. Analog bestimmen Sie eine hyperreelle Zahl grösser als jede reelle Zahl.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 28.11.2018

Aufgabe 20.

Sei X ein topologischer Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum.

a) Beweisen Sie: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph

$$G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

eine abgeschlossene Teilmenge des Produktraums $X \times Y$ ist. Eine möglicherweise nützliche Bemerkung: $f^{-1}(V) \subset X$ ist offen, falls jedes $x \in f^{-1}(V)$ eine Umgebung $W \subset X$ besitzt, so dass $(W \times (Y \setminus V)) \cap G_f = \emptyset$.

b) Geben Sie Gegenbeispiele für den Fall an, dass man eine der Voraussetzungen an Y weglässt!

Aufgabe 19.

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei

$$\operatorname{diam} S := \sup\{ d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

der Durchmesser der Teilmenge S.

Zeigen Sie: Zu jeder offenen Überdeckung $U = \{U_i\}_{i \in I}$ existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\operatorname{diam} S < \lambda$ vollständig in einer der Mengen U_i enthalten ist! Eine solche Zahl λ heisst Lebesgue-Zahl der Überdeckung U.

Aufgabe 18.

Zeigen Sie, dass für einen Hausdorff-Raum X mit abzählbarer Basis folgende Aussagen äquivalent sind:

a) X ist kompakt.

b) Jede abzählbare Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

c) X ist folgenkompakt.

d) Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.

Aufgabe 17.

a) Beschreiben Sie die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R} \times S^1$.

b) Zeigen Sie, dass zwei disjunkte kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes stets disjunkte offene Umgebungen besitzen!

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 21.11.2018

Aufgabe 16. Lösen Sie dieses Rätsel:

Drei Gefangene erhalten die folgende Aufgabe: Über eine Folge abzählbar unendlich vieler Tage schalten die Wärter in den Zellen der Gefangenen das Licht entweder ein oder aus, und zwar so, dass entweder

(i) es einen Tag gibt ab dem jeden Tag in mindestens zwei Zellen das Licht eingeschaltet wird, oder

(ii) es einen Tag gibt ab dem jeden Tag in höchstens einer Zelle das Licht eingeschaltet wird.

Nach diesen unendlich vielen Tagen müssen die Gefangenen raten ob (i) oder (ii) eingetreten ist. Mindestens zwei der drei Gefangenen müssen richtig raten.

Vor Beginn der Aufgabe dürfen die Gefangenen unendlich viel Informationen untereinander austauschen, danach dürfen sie keine Informationen mehr austauschen. Gibt es eine Strategie mit der die Gefangenen diese Aufgabe lösen können?

Aufgabe 15. Zeigen Sie:

a) Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorff'sch, wenn kein Filter mehr als einen Grenzwert hat.

b) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\prod_{i\in I} X_i$. Für jedes $i \in I$ sei $x_i \in X_i$ ein Grenzwert von $\pi_i(\mathcal{F})$. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Grenzwert von $\mathcal{F}$.

Aufgabe 14. Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorffsch, wenn die Diagonale

$$\Delta := \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$$

abgeschlossen in $X \times X$ ist.

Aufgabe 13.

a) Zeigen Sie: Ist $(M,<)$ eine linear geordnete Menge, in der jede von oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt, dann ist jedes abgeschlossene Intervall

$$[a,b] := \{\, x \in M \;:\; a < x < b \,\} \cup \{a,b\} \qquad (a < b)$$

kompakt in der Ordnungstopologie auf M.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a):

i) Die abgeschlossenen Intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sind kompakt.

ii) $M = [0,1] \times [0,1]$ versehen mit der Ordnungstopologie aus Aufgabe 6 ist kompakt.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 14.11.2018

Aufgabe 12.

Zeigen Sie: Ist X lokal wegzusammenhängend, so stimmen Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten überein.

Aufgabe 11.

a) Zeigen Sie: ein topologischer Raum Z ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von Z in S^0 (den diskreten Raum mit 2 Punkten) konstant ist. b) Es sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie (weg)zusammenhängender topologischer Räume. Ist das Produkt $\prod_i X_i$ (weg)zusammenhängend? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

Aufgabe 10.

a) Sei $X = D^2$ und $f = \mathrm{id}_{S^1}$. Zeigen Sie: Der Raum $X \cup_f D^2$ ist eine 2-dimensionale Sphäre.

b) Sei M das Möbiusband. Zeigen Sie: Es gibt einen Homöomorphismus $g : S^1 \to \partial M$ und weiter ist der Raum $M \cup_g D^2$ isomorph zum 2-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{R}P^2$.

Aufgabe 9.

a) Beschreiben Sie das Möbiusband M als Quotienten einer Wirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$.
b) Beschreiben Sie die Kleinsche Flasche K als Quotienten bezüglich einer Wirkung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf dem Torus $T = S^1 \times S^1$.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 6.11.2018

Aufgabe 8. Für $n \in \mathbb{N}$ seien nichtleere metrische Räume (X_n, d_n) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für festes n die Funktion $d'_n(x_n, y_n) := \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$ eine Metrik auf X definiert, welche dieselbe metrische Topologie induziert wie d_n.

b) Zeigen Sie, dass

$$d\big((x_n), (y_n)\big) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d'_n(x_n, y_n)$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definiert. (Warum ist es wichtig, hier die Metriken d'_n zu benutzen?)

c) Stimmt die von d induzierte metrische Topologie mit der Produkttopologie überein?

Aufgabe 7. Wir versehen $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie und betrachten für eine irrationale Zahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Abbildung $f_\alpha : \mathbb{Z} \to S^1 \subset \mathbb{C}$, gegeben durch $n \mapsto \exp(2\pi i n\alpha)$.

a) Beschreiben Sie den Abschluß von $f_\alpha(\mathbb{Z})$ in S^1.

b) Ist f_α eine Einbettung?

Aufgabe 6. Die nachfolgenden Mengen seien versehen mit der lexikografischen Ordnung, d.h. $(t_1, s_1) < (t_2, s_2)$ g.d.w. $t_1 < t_2$ oder $t_1 = t_2$ und $s_1 < s_2$,

$$[0,1] \times [0,1], \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ und } [0,\infty) \times [0,\infty).$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass man so jeweils ein lineares Kontinuum erhält.

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Buchstaben des Alphabets als Teilräume des $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2,$$

und benennen Sie alle Buchstaben, die homöomorph zueinander sind.

Übungsaufgaben zur VL Topologie zum 24.10.2018

Aufgabe 4. a) Seien A und B zwei verschiedene echte, nichtleere Teilmengen einer Menge X. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit

$$\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$$

eine Topologie auf X definiert?

b) Geben Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{a, b, c\}$ an, welche genau vier offene Mengen besitzen.

c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die weder diskret noch antidiskret ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch mit den offenen Mengen sind.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

a) Die von der Metrik induzierte Topologie auf X ist die gröbste, so dass für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung $x \to d(x, x_0)$ stetig ist.

b) Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung

$$x \to d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

stetig, und das Urbild der Null ist gerade $\overline{A}$.

c) Für je zwei nichtleere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl.

a) Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir

$$\nu(z) = \sup\{n : p^n \text{ teilt } z\}$$

und $d(x, y) := p^{-\nu(x-y)}$, mit der üblichen Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert, welche die starke Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

erfüllt. Was sind die Einheitssphären dieser Metrik? Wie sehen die ε-Umgebungen um $0 \in \mathbb{Z}$ aus?

b*) Betrachte auf $\mathbb{Q}$ die durch $d(x, y) := p^{-\nu(x-y)}$ mit

$$\nu(z) = \sup\{n : z = p^n \frac{r}{s} \text{ mit } (p, r) = (p, s) = 1\}$$

induzierte Metrik und beantworte die zu a) analogen Fragen.

Aufgabe 1. Es sei $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen, reelwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Betrachten Sie die beiden Metriken

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x}$$

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Identität $id : (X, d_2) \to (X, d_\infty)$ und ihrer Umkehrabbildung.

b) Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $f \to f(0)$ stetig bezüglich d_∞ aber nicht stetig bezüglich d_2 ist.

Literatur

K. Jähnich: Topologie
G. Laures, M Szymik: Grundkurs Topologie
S. Lipschutz: Allgemeine Topologie
C. Schweigert: Skript zur VL Topologie