Über die arithmetischen Selbstschnittzahlen zu Modulkurven und Hilbertschen Modulflächen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

im Fach Mathematik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II

der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Dipl.-Math. Ulfhart Kühn

geboren am 10. Mai 1969 in Köln

Präsident der Humboldt-Universität

Prof. Dr. Dr. h.c. H. Meyer

Dekan der Fakultät

Prof. Dr. B. Krause

Gutachter:

1. Prof. Dr. J.-B. Bost (Université Paris XI)
2. Prof. Dr. J. Kramer (Humboldt-Universität zu Berlin)
3. Prof. Dr. R.-P. Holzapfel (Humboldt-Universität zu Berlin)

Eingereicht am 9. April 1999

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Die Arakelov-Geometrie ist eine arithmetische Schnittheorie für algebraische Varietäten, welche über den ganzen Zahlen definiert sind und durch Hinzufügen entsprechender analytischer Daten "kompaktifiziert" werden. Eine zentrale Rolle in der Arakelov-Geometrie spielen die arithmetischen Selbstschnittzahlen von hermiteschen Geradenbündeln. Von besonderem Interesse ist die Berechnung dieser Selbstschnittzahlen, wenn das Geradenbündel ampel ist und die Metrik die Geometrie der zugrunde liegenden komplexen Varietät respektiert. Vollständige Berechnungen in diesem Zusammenhang sind durchgeführt im Falle des n-dimensionalen projektiven Raums (siehe [BGS]), der Graßmannschen Mannigfaltigkeiten (siehe [Ma1], [Ta], [KR]), der Fahnenmannigfaltigkeiten (siehe [Ta1]) sowie der torischen Varietäten (siehe [Ma]). Ein schwieriges, weitgehend offenes Problem ist die Berechnung der arithmetischen Selbstschnittzahl des mit der Arakelov-Metrik versehenen kanonischen Bündels auf Kurven vom Geschlecht größer oder gleich zwei (siehe [BMMB], [AU], [MU]). Eine geeignete Abschätzung dieser Zahl würde eine effektive Version der Mordell-Vermutung (Satz von Faltings) und die abc-Vermutung implizieren (siehe [MB]). Ein weiterer Gesichtspunkt der Arakelov-Theorie ist die Konstruktion von intrinsischen Höhen bezüglich eines hermiteschen Geradenbündels (siehe [Bo3]). Besonders interessant ist in diesem Zusammenhang die Faltings-Höhe auf dem Modulraum der polarisierten abelschen Varietäten bezüglich des Modulformenbündels, das mit einer logarithmisch singulären, hermiteschen Metrik versehen ist (siehe [CS]).

Die arithmetische Selbstschnittzahl von logarithmisch singulären, hermiteschen Geradenbündeln ist in der bisher entwickelten arithmetischen Schnittheorie nicht definiert. Eine solche verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl ergibt sich erst aus einer entsprechenden Erweiterung der arithmetischen Schnittheorie. In der vorliegenden Arbeit wird eine solche Erweiterung der arithmetischen Schnittheorie im Falle der Modulkurven und dem Modulformenbündel, versehen mit der Petersson-Metrik, durchgeführt und die entsprechende verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl berechnet. Im Falle der Hilbertschen Modulfächen erhalten wir hier nur partielle Ergebnisse in dieser Richtung. Zeitgleich zur vorliegenden Arbeit wurden Erweiterungen der arithmetischen Schnittheorie in zum Teil anderer Hinsicht vorgenommen durch J.-B. Bost (siehe [Bo], [Bo1]), J. Burgos (siehe [Bu]), V. Maillot (siehe [Ma1]) und A. Moriwaki (siehe [Mo]). Ob sich unsere Untersuchungen auf höherdimensionale arithmetische Varietäten und Geradenbündel mit logarithmisch singulären, hermiteschen Metriken übertragen lassen, ist Gegenstand aktueller Forschung.

Im ersten Kapitel zeigen wir, daß eine Erweiterung der arithmetischen Schnittheorie auf logarithmisch singuläre, hermitesche Geradenbündel auf arithmetischen Flächen existiert. Mit Hilfe dieser arithmetischen Schnittpaarung berechnen wir die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl des Geradenbündels $\overline{\mathcal{M}}_k(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ der Modulformen vom Gewicht k, welches wir mit der Petersson Metrik versehen, auf dem kanonischen Modell der Modulkurve zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$; wir erhalten dafür

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))^2 = k^2 \left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right),$$

wobei k eine durch zwölf teilbare natürliche Zahl und $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ ist die Riemannsche Zetafunktion ist. Wir geben zwei Beweise für diese Formel: Im ersten benutzen wir die modulare Jensen-Formel, auf die uns D. Zagier aufmerksam gemacht hat. Im zweiten verwenden wir die Kronecker-Grenzformel, die einen konzeptionelleren Zugang zur Berechnung liefert. Diese Formel ist ebenfalls ein wesentlicher Bestandteil des Manuskriptes von J.-B. Bost, in dem er unabhängig von der vorliegenden Arbeit mit anderen Methoden dasselbe Ergebnis erzielt (siehe [Bo]). Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden in einer Comptes Rendus Note veröffentlicht (siehe [Kü]). Zu Beginn des ersten Kapitels geben wir eine ausführliche Inhaltsangabe.

Im zweiten Kapitel versuchen wir die Methoden der Berechnung und die Ergebnisse des ersten Kapitels auf Hilbertsche Modulflächen zu reell-quadratischen Zahlkörpern K, welche gewisse abelsche Flächen parametrisieren, zu verallgemeinern. Mit Hilfe der entsprechenden Kronecker-Grenzformel konstruieren wir einen verallgemeinerten Greenschen Strom $[\Lambda_K]$. Mit diesem erhalten wir unter der Annahme der Existenz einer verallgemeinerten arithmetischen Selbstschnittzahl des Geradenbündels $\overline{\mathcal{M}}_k(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))$ der Hilbertschen Modulformen vom Gewicht k, welches wir mit der Petersson-Metrik versehen, und unter gewissen technischen Annahmen das Ergebnis

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K))^3 \equiv -k^3 \left(\zeta'_K(-1) + \zeta_K(-1)\left(\frac{\log(D_K)+3}{2} - 12\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right)\right) \mod \log|\mathbb{Q}^*|;$$

hierbei sind D_K die Diskriminante und $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion des Zahlkörpers K. Eine detaillierte Inhaltsangabe findet sich auch hier am Anfang des Kapitels.

Die beiden Hauptergebnisse bestätigen die Erwartungen, daß arithmetische Selbstschnittzahlen im wesentlichen durch spezielle Werte der ersten Ableitung von arithmetischen Funktionen, wie z.B. Zetafunktionen, berechnet werden (siehe [So2], Seite 406 bzw. [Ku]). Die geometrischen Selbstschnittzahlen werden bekanntlich durch spezielle Werte entsprechender arithmetischer Funktionen berechnet; in unserem Fall erhält man die geometrischen Selbstschnittzahlen durch den speziellen Wert von $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$, bzw. $\zeta_K(s)$, an der Stelle -1. Da dies nichts anderes als die Klingen-Siegel-Formel ist, wäre eine andere mögliche Interpretation unserer Ergebnisse ein Schritt in Richtung einer "arithmetischen Klingen-Siegel-Formel".

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Graduiertenkollegs "Geometrie und Nichtlineare Analysis" an der Humboldt Universität zu Berlin realisiert. Beim Entstehen dieser Arbeit habe ich von vielen Gesprächen mit anderen Mathematikern profitiert, welchen ich hiermit herzlich danke. Hervorheben möchte ich insbesondere Prof. Jean-Benoit Bost, Prof. Bas Edixhoven, Dr. Georg Hein, Dr. Damian Roessler und Prof. Don Zagier. Mein ganz besonderer Dank richtet sich an meinen Betreuer, Prof. Jürg Kramer, ohne dessen Engagement diese Arbeit wohl nie entstanden wäre.

1 Arithmetische Schnittheorie auf Modulkurven

Einleitung. Nach einer kurzen Wiederholung der Schnittheorie von hermiteschen Geradenbündeln auf arithmetischen Flächen stellen wir im dritten Abschnitt eine Verallgemeinerung dieser Theorie vor, in der die betrachteten hermiteschen Metriken logarithmisch singulär werden dürfen. Im vierten und fünften Abschnitt wiederholen wir die Theorie der Modulkurven und Modulformen. Im sechsten Abschnitt dieses Kapitel werden wir unsere verallgemeinerte arithmetische Schnittheorie auf das Modulformenbündel, versehen mit der Petersson Metrik, anwenden und die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl dieses Bündels bestimmen. Eine mögliche Anwendung dieses Ergebnisses stellen wir im siebten Abschnitt vor. Im vorletzten Abschnitt geben wir einen zweiten Beweis dieses Ergebnisses mit Hilfe der Kroneckerschen Grenzformel. Im letzten Abschnitt zeigen wir, daß unsere verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahlen den von J.-B. Bost (siehe [Bo1]) eingeführten arithmetischen Schnittzahlen entsprechen.

1.1 Übersicht über die Theorie der arithmetischen Flächen

1.1.1. Definition. In diesem Kapitel ist eine *arithmetische Fläche* $\mathcal{X}/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ein integrales, 2-dimensionales, reguläres Schema über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ derart, daß der Morphismus

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$$

projektiv und flach ist. Da wir in diesem Kapitel ausschließlich solche arithmetischen Flächen $\mathcal{X}/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ betrachten, werden wir der Einfachheit halber diese mit $\mathcal{X}$ bezeichnen.

Unsere Definition orientiert sich an der Definition von J.-B. Bost (siehe [Bo1], Seite 23). Der Ring der regulären Funktionen auf $\mathcal{X}$ ist der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_E$ eines Zahlkörpers E, und es existiert ein kanonischer, projektiver, flacher Morphismus $\mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_E$, der geometrisch zusammenhängende Fasern hat. Für alle Einbettungen $\sigma : E \longrightarrow \mathbb{C}$ ist die komplexe Kurve $\mathcal{X}_\sigma := \mathcal{X} \times_\sigma \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ projektiv, glatt und zusammenhängend. Wir beachten, daß das Schema $\mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_E$ eine arithmetische Fläche im Sinne der ursprünglichen Definition ist (siehe z.B. [So1], Seite 328). Wir bezeichnen die Menge der komplexwertigen Punkte $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ mit $\mathcal{X}_\infty$; dies ist eine kompakte, 1-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit, welche mehrere Zusammenhangskomponenten haben kann, und es besteht die Zerlegung

$$\mathcal{X}_\infty = \coprod_{\sigma:E\to\mathbb{C}} \mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}).$$

Wir bemerken, daß die komplexe Konjugation F_∞ auf $\mathcal{X}_\infty$ operiert.

1.1.2. Definition. Es sei $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ eine arithmetische Fläche. Jeder Divisor $D \subset \mathcal{X}$ besitzt eine Zerlegung der Form $D = D_{\text{ver}} + D_{\text{hor}}$; dabei bezeichnet D_{ver} eine endliche Linearkombination von irreduziblen Komponenten der abgeschlossenen Fasern von $\mathcal{X}$ über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, und D_{hor} ist eine endliche Linearkombination von irreduziblen horizontalen Divisoren. Letztere sind isomorph zum Spektrum des Ringes der ganzen Zahlen einer endlichen algebraischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Für einen Divisor D von $\mathcal{X}$ sei $\mathcal{O}_D$ die Strukturgarbe von D. Für zwei Divisoren D_1 und D_2 von $\mathcal{X}$ werden die kohärenten Garben $\operatorname{Tor}_j^{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2})$ $(j = 0, 1)$ durch die folgende lange exakte Sequenz bestimmt:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{O}_\mathcal{X}, \mathcal{O}_{D_2}) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}) \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{X}(-D_1) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_{D_2} \\ & \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow \operatorname{Tor}_0^{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}) = \mathcal{O}_{D_1} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Es seien $D_1, D_2 \subset \mathcal{X}$ nun zwei effektive Divisoren, die keinen horizontalen Anteil gemeinsam haben, d.h. $D_{1,\text{hor}} \cap D_{2,\text{hor}} = \emptyset$. Dann ist die *Schnittzahl im Endlichen* $(D_1, D_2)_{\text{fin}}$ *von* D_1 *und* D_2 definiert durch

$$(D_1, D_2)_{\text{fin}} := \sum_{i,j=0}^{1} (-1)^{i+j} \log \# \left(R^i \pi_* \left(\operatorname{Tor}_j^{\mathcal{O}_\mathcal{X}}(\mathcal{O}_{D_1}, \mathcal{O}_{D_2}) \right) \right); \tag{1}$$

hierbei sind die $R^i\pi_*$ die abgeleiteten Funktoren des direkten Bildes π_* (siehe z.B. [De], Seite 3).

Die Schnittzahl im Endlichen ist symmetrisch und bilinear. Dies folgt aus der Symmetrie (resp. Linearität) des Tensorproduktes und dessen abgeleiteten Funktoren Tor. Wir setzen die Schnittzahl für beliebige Divisoren additiv fort.

1.1.3. Proposition. *Es seien* $D_{\text{ver}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathbb{F}_p} = \mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p$ *und* D *effektive Divisoren von* $\mathcal{X}$.

(a) *Dann gilt* $(D_{\text{ver}}, D)_{\text{fin}} = \deg_{D_{\text{ver}}}(\mathcal{O}(D)\,|_{D_{\text{ver}}}) \cdot \log(p)$.

(b) *Wenn* D_{ver} *und* D *sich nur in endlich vielen Punkten schneiden, dann gilt*

$(D_{\mathrm{ver}}, D)_{\mathrm{fin}} \geq 0$. *Die Gleichheit gilt genau dann, wenn* D_{ver} *und* D *disjunkt sind.*

(c) *Für alle Hauptdivisoren* D *(*D *muß hier nicht effektiv sein) auf* $\mathcal{X}$ *gilt* $(D_{\mathrm{ver}}, D)_{\mathrm{fin}} = 0$. *Insbesondere gilt* $(D_{\mathrm{ver}}, \mathcal{X}_{\mathbb{F}_p})_{\mathrm{fin}} = 0$.

Beweis. Siehe z.B. [De], Seite 3. □

1.1.4. Proposition. *Es seien* $D_{\mathrm{hor}} \subset \mathcal{X}$ *ein irreduzibler, horizontaler Divisor,* K *der Zahlkörper, für dessen Ring der ganzen Zahlen* $\mathcal{O}_K$ *die Isomorphie* $D_{\mathrm{hor}} \cong \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *gilt, und* $k(\mathcal{X})$ *der Funktionenkörper von* $\mathcal{X}$. *Dann gilt für alle rationalen Funktionen* $r \in k(\mathcal{X})^*$, *deren horizontaler Anteil von* D_{hor} *verschieden ist*

$$(D_{\mathrm{hor}}, \operatorname{div}(r))_{\mathrm{fin}} = \log\left(\operatorname{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(r|_K)\right);$$

hierbei bezeichnet $\operatorname{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(r|_K)$ *die Norm von* K *nach* $\mathbb{Q}$ *der auf* $K \subseteq k(\mathcal{X})$ *eingeschränkten rationalen Funktion* r.

Beweis. Siehe z.B. [La], Seite 56. □

1.2 Arithmetische Schnittzahlen für hermitesche Geradenbündel

1.2.1. Definitionen. Ein *hermitesches Geradenbündel* $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ ist ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{X}$ mit einer glatten, hermiteschen Metrik h auf dem induzierten holomorphen Geradenbündel $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ über $\mathcal{X}_\infty$, die invariant unter F_∞ ist. Die zu h gehörende Norm bezeichen wir mit $\|\cdot\|$. Zwei hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ auf $\mathcal{X}$ heißen *isomorph*, falls gilt:

$$\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1} \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|),$$

wobei $|\cdot|$ der gewöhnliche Betrag ist. Die *arithmetische Picard-Gruppe* $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X})$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln $\overline{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{X}$; die Gruppenstruktur ist durch das Tensorprodukt gegeben.

1.2.2. Definition. Es seien $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche Geradenbündel auf einer arithmetischen Fläche $\mathcal{X}$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ nicht-triviale, reguläre Schnitte l und m (resp.) besitzen, deren Divisoren $\operatorname{div}(l)$ und $\operatorname{div}(m)$ keinen horizontalen Anteil gemeinsam haben. Damit definieren wir

$$(l.m)_{\mathrm{fin}} := (\operatorname{div}(l), \operatorname{div}(m))_{\mathrm{fin}}. \tag{2}$$

1.2.3. Definition. Es seien $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche Geradenbündel auf einer arithmetischen Fläche $\mathcal{X}$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ nicht-triviale, globale Schnitte l und m (resp.) besitzen; diese induzieren globale Schnitte von $\mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{M}_\infty$, welche wir der Einfachheit halber ebenfalls mit l und m (resp.) bezeichnen. Weiter nehmen wir an, daß der Divisor $\operatorname{div}(l)$ von l keinen Punkt des Divisors $\operatorname{div}(m)$ von m auf $\mathcal{X}_\infty$ enthält. Mit $\operatorname{div}(l) = \sum_\alpha p_\alpha P_\alpha$ ($p_\alpha \in \mathbb{Z}$, $P_\alpha \in \mathcal{X}_\infty$) setzen wir

$$(\log \|m\|)[\operatorname{div}(l)] := \sum_\alpha p_\alpha \log \|m(P_\alpha)\|. \tag{3}$$

Wir definieren nun die *Schnittzahl im Unendlichen* $(l.m)_\infty$ von l und m durch die Formel

$$(l.m)_\infty := -(\log \|m\|)[\operatorname{div}(l)] - \int_{\mathcal{X}_\infty} \log \|l\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}), \tag{4}$$

wobei $c_1(\overline{\mathcal{L}}) \in H^2(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{R})$ die erste Chern-Form von $\overline{\mathcal{L}}$ ist; diese ist außerhalb des Divisors $\operatorname{div}(l)$ auf $\mathcal{X}_\infty$ gegeben durch

$$c_1(\overline{\mathcal{L}}) = -dd^c(\log \|l(\cdot)\|^2).$$

Die Funktion $\log \|l(\cdot)\|^2$ ist auf $\mathcal{X}_\infty$ lokal integrierbar, weshalb die Schnittzahl im Unendlichen wohldefiniert ist.

1.2.4. Proposition. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen gelten folgende Identitäten für $(l.m)_\infty$:*

$$\begin{aligned}&(l.m)_\infty = \\ &-(\log \|l\|)[\operatorname{div}(m)] - (\log \|m\|)[\operatorname{div}(l)] - 2\int_{\mathcal{X}_\infty} d(\log \|l\|) \cdot d^c(\log \|m\|)\end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned}&(l.m)_\infty = \\ &\int_{\mathcal{X}_\infty} \Big(-\log \|l\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) - \log \|m\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{L}}) + 2 \cdot d(\log \|l\|) \cdot d^c(\log \|m\|) \Big).\end{aligned} \tag{6}$$

Beweis. Es bezeichne $B_\varepsilon(P)$ eine offene Kreisscheibe vom Radius ε mit Mittelpunkt $P \in \mathcal{X}_\infty$. Mit

$$\mathcal{X}_\varepsilon := \mathcal{X}_\infty \setminus \left(\bigcup_{P_\alpha \in \operatorname{div}(l)} B_\varepsilon(P_\alpha) \quad \cup \bigcup_{Q_\beta \in \operatorname{div}(m)} B_\varepsilon(Q_\beta) \right)$$

erhalten wir

$$\int_{\mathcal{X}_\infty} \log \|l\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathcal{X}_\varepsilon} \log \|l\| \cdot dd^c(\log \|m\|^2).$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes ergibt sich

$$\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} \log \|l\| \cdot dd^c(\log \|m\|^2) = -\sum_\alpha \int_{\partial B_\varepsilon(P_\alpha)} \log \|l\| \cdot d^c(\log \|m\|^2) - \sum_\beta \int_{\partial B_\varepsilon(Q_\beta)} \log \|l\| \cdot d^c(\log \|m\|^2) - 2\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} d(\log \|l\|) \cdot d^c(\log \|m\|).$$

Eine Anwendung des Residuensatzes und der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ implizieren dann

$$-\int_{\mathcal{X}_\infty} \log \|l\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) = -(\log \|l\|)[\operatorname{div}(m)] - 2\int_{\mathcal{X}_\infty} d(\log \|l\|) \cdot d^c(\log \|m\|). \tag{7}$$

Einsetzen von (7) in (4) ergibt (5). Weil das letzte Integral in (7) symmetrisch in l und m ist, erhalten wir Formel (6) durch Vertauschen von l und m nach Auflösen des Ergebnisses nach $-(\log \|m\|)[\operatorname{div}(l)]$ und Einsetzen in (4). □

1.2.5. Definition. Es seien $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche Geradenbündel über $\mathcal{X}$ und l, m (resp.) nicht-triviale, globale Schnitte, deren Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty$ keinen Punkt gemeinsam haben. Dann ist die *arithmetische Schnittzahl* $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}}$ *von* $\overline{\mathcal{L}}$ *und* $\overline{\mathcal{M}}$ definiert durch

$$\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}} := (l.m)_{\text{fin}} + (l.m)_\infty; \tag{8}$$

hierbei werden $(l.m)_{\text{fin}}$ bzw. $(l.m)_\infty$ durch Formel (2) bzw. Formel (4) bestimmt.

Die *arithmetische Selbstschnittzahl* von $\overline{\mathcal{L}}$ ist definiert durch $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{L}}$.

Die arithmetische Schnittzahl $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}}$ von $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ ist, wie der nächste Satz zeigt, unabhängig von der Wahl der Schnitte l, m.

1.2.6. Theorem. *(Arakelov). Die Formel (8) induziert eine bilineare, symmetrische Paarung*

$$\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X}) \times \widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Ausführliche Beweise befinden sich z.B. in [Ar], [La], [SABK]. Wir werden, der Darstellung [So1] (Seite 330) folgend, nur die Hauptideen des Beweises skizzieren.

(a) Symmetrie: Da $(l.m)_{\text{fin}} = (m.l)_{\text{fin}}$ ist, genügt es die Symmetrie von $(l.m)_\infty$ zu zeigen. Das Integral in Formel (6) von Proposition 1.2.4 ist in l und m symmetrisch, weshalb folgt, daß $(l.m)_\infty = (m.l)_\infty$ gilt.

(b) Bilinearität: Es sei nun $\overline{\mathcal{L}'}$ ein drittes hermitesches Geradenbündel auf $\mathcal{X}$ und l' ein nicht-trivialer, globaler Schnitt von $\mathcal{L}'$, dessen Divisor auf $\mathcal{X}_\infty$ keinen Punkt mit $\operatorname{div}(m)$ gemeinsam hat. Damit erhalten wir die Identität

$$(l \otimes l'.m)_{\text{fin}} = (\operatorname{div}(l) + \operatorname{div}(l'), \operatorname{div}(m))_{\text{fin}} = (l.m)_{\text{fin}} + (l'.m)_{\text{fin}}.$$

Andererseits erkennt man leicht aus der Formel (6) in Proposition 1.2.4, daß $(l \otimes l'.m)_\infty = (l.m)_\infty + (l'.m)_\infty$ gilt. Daraus folgt unmittelbar die Bilinearität.

Wir bemerken, daß wir aufgrund der Bilinearität der arithmetischen Schnittzahlen ab jetzt anstelle von globalen Schnitten l und m auch beliebige, rationale Schnitte zulassen dürfen.

(c) Wohldefiniertheit: Es sei $\overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{O}_\mathcal{X}, |\cdot|)$ das triviale hermitesche Geradenbündel und m ein rationaler Schnitt von $\mathcal{M}$. Es genügt zu zeigen, daß für rationale Schnitte l von $\mathcal{L}$ mit horizontalem Divisor die Gleichung

$$(l.m)_{\text{fin}} + (l.m)_\infty = 0$$

besteht. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $\operatorname{div}(l)$ irreduzibel und über einem Zahlkörper K definiert ist. Weiter sei nun r die Einschränkung der rationalen Funktion m auf $\operatorname{div}(l)$. Da $c_1(\overline{\mathcal{M}}) = 0$ ist, erhalten wir aus Formel (4)

$$(l.m)_\infty = -(\log|m|)[\operatorname{div}(l)] = -\sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log|\sigma(r)|;$$

hierbei läuft die Summe auf der rechten Seite über alle Äquivalenzklassen von reellen und komplexen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$. Andererseits haben wir

$$(l.m)_{\text{fin}} = \log\left(\operatorname{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(r)\right).$$

Die Wohldefiniertheit der arithmetischen Schnittpaarung (8) folgt somit aus der Definition der Norm für den Zahlkörper K. $\square$

1.2.7. Bemerkung. S. J. Arakelov betrachtete in seinem bahnbrechenden Artikel [Ar] die Untergruppe $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X},\mu) \subseteq \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})$, welche von den Isomorphieklassen hermitescher Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}$ erzeugt wird, die die folgenden beiden zusätzlichen Bedingungen erfüllen:

$$c_1(\overline{\mathcal{L}}) = \deg(\mathcal{L}) \cdot \mu \quad , \quad \int_{\mathcal{X}_\infty} \log \|1_{\mathcal{L}}\| \cdot \mu = 0;$$

dabei sind μ eine fixierte, normalisierte Volumenform auf $\mathcal{X}_\infty$ und $1_{\mathcal{L}}$ der kanonische Schnitt von $\mathcal{L}$. Von besonderem Interesse ist die Volumenform

$$\frac{1}{g}\sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \overline{\omega}_j,$$

wobei $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ eine orthonormale Basis von $H^0(\mathcal{X}_\infty, \Omega^1_{\mathcal{X}_\infty})$ ist. Mehr Einzelheiten über diesen Aspekt der Arakelov-Theorie finden sich in [Fa] und [MB]. Die beiden zusätzlichen Bedingungen wurden von P. Deligne [De] eliminiert. Dies öffnete den Weg für die in Kapitel 2 skizzierte höherdimensionale Arakelov-Geometrie von H. Gillet und C. Soulé [GS1].

Wir werden diesen Abschnitt mit dem folgenden Beispiel beenden.

1.2.8. Proposition. *Es sei $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ und $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(n), \|\cdot\|_{FS})$ der n-fache ($n \geq 1$) Twist des Hyperebenenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(1)$, versehen mit der Fubini Study Metrik $\|\cdot\|_{FS}$. Dann gilt:*

$$\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \cdot n^2 .$$

Beweis. Diese Proposition ist wohlbekannt, siehe z.B. [BGS], Lemma 3.3.1. Wir werden dieses Ergebnis aber auf eine etwas andere Art beweisen. Wir wählen uns zwei globale Schnitte l, m von $\mathcal{L}$ so, daß die entsprechenden Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ keinen Punkt gemeinsam haben. Man beachte, daß nach Wahl einer Basis von $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(1))$ die Schnitte l, m homogenen Polynomen P, Q vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten (resp.) entsprechen. Mit den gewöhnlichen homogenen Koordinaten $z = (z_0 : z_1)$ von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und der Fubini-Study Form

$$\omega_{FS} := dd^c \log(|z_0|^2 + |z_1|^2)$$

erhalten wir aus der Definition (4), unter Ausnutzung der Symmetrie,

$$2 \cdot (l.m)_\infty = -\log\left(\frac{|P(z)|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^n}\right)[\mathrm{div}(Q)] - n \cdot \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log\left(\frac{|Q(z)|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^n}\right) \cdot \omega_{FS}.$$

Wir faktorisieren nun die homogenen Polynome P, Q über $\mathbb{C}$ in Linearformen, d.h.

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{\mu=1}^{n} (\alpha_{\mu,1} z_0 - \alpha_{\mu,0} z_1), \\ Q(z) &= \prod_{\nu=1}^{n} (\beta_{\nu,1} z_0 - \beta_{\nu,0} z_1). \end{aligned}$$

Einsetzen der Faktorisierung von Q in obiges Integral ergibt die Gleichung

$$-n \cdot \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log\left(\frac{|Q(z)|^2}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^n}\right) \cdot \omega_{FS} = -n \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log\left(\frac{|\beta_{\nu,1} z_0 - \beta_{\nu,0} z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}\right) \cdot \omega_{FS}.$$

Für die Integrale auf der rechten Seite ergibt sich (siehe z.B. [CaMa], Corollaire 2.2.2):

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log\left(\frac{|\beta_{\nu,1} z_0 - \beta_{\nu,0} z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}\right) \cdot \omega_{FS} = \log(|\beta_{\nu,1}|^2 + |\beta_{\nu,0}|^2) - 1.$$

Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} (l.m)_\infty &= -\log\left(\prod_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{|\alpha_{\mu,1}\beta_{\nu,0} - \alpha_{\mu,0}\beta_{\nu,1}|}{(|\beta_{\nu,1}|^2 + |\beta_{\nu,0}|^2)^{1/2}}\right) - \frac{n}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \big(\log(|\beta_{\nu,1}|^2 + |\beta_{\nu,0}|^2) - 1\big) \\ &= -\log(|R(P,Q)|) + \frac{n^2}{2}; \end{aligned} \tag{9}$$

dabei bezeichnet $R(P,Q)$ die Resultante der beiden Polynome P, Q. Andererseits gilt

$$(l.m)_{\text{fin}} = \log(|R(P,Q)|). \tag{10}$$

Durch Addition von (9) und (10) bestätigen wir die Behauptung. □

1.3 Verallgemeinerte arithmetische Schnittzahlen für hermitesche, logarithmisch singuläre Geradenbündel

1.3.1. Definition. *Es sei $\mathcal{X}$ eine arithmetische Fläche und $\mathcal{X}_\infty$ wie in Definition 1.1.1. Für eine endliche Menge $\mathcal{S}$ von Punkten $S_1, ..., S_r$ auf $\mathcal{X}_\infty$ bezeichne $\mathcal{Y}_\infty$ die offene, 1-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}_\infty \setminus \mathcal{S}$. Für ein $S_j \in \mathcal{S}$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne $B_\varepsilon(S_j) \subseteq \mathcal{X}_\infty$ die offene Kreisscheibe vom Radius ε mit Mittelpunkt S_j bezüglich eines lokalen Parameters t in S_j ($j = 1, ..., r$). Weiter sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $\mathcal{X}$. Eine hermitesche Metrik h auf $\mathcal{L}_\infty$ heißt logarithmisch singulär (in Bezug auf $\mathcal{S}$), falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(I) *h ist eine glatte, hermitesche Metrik auf dem Geradenbündel $\mathcal{L}_\infty|_{\mathcal{Y}_\infty}$, welche F_∞-invariant ist.*

(II) *Für jedes $S_j \in \mathcal{S}$ und jeden Schnitt l von $\mathcal{L}$ existieren eine reelle Zahl α und eine positive, stetige Funktion φ, die auf ganz $B_\varepsilon(S_j)$ definiert ist und außerhalb des Mittelpunktes glatt ist, derart, daß die Gleichung*

$$\|l(t)\| = -\log(|t|^2)^\alpha \cdot |t|^{\mathrm{ord}_{S_j}(l)} \cdot \varphi(t)$$

für alle $t \in B_\varepsilon(S_j) \setminus \{0\}$ gilt; darüber hinaus existieren positive Konstanten β und ρ so, daß die folgenden Ungleichungen

$$\left|\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\right| \leq \frac{\beta}{|t|^{1-\rho}}, \quad \left|\frac{\partial \varphi(t)}{\partial \bar{t}}\right| \leq \frac{\beta}{|t|^{1-\rho}}, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t\, \partial \bar{t}}\right| \leq \frac{\beta}{|t|^{2-\rho}}$$

für alle $t \in B_\varepsilon(S_j) \setminus \{0\}$ gelten.

Ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathcal{X}$ mit einer logarithmisch singulären Metrik h heißt ein *hermitesches, logarithmisch singuläres Geradenbündel*, und wir bezeichnen es wie bisher mit $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$. Zur Betonung der Abhängigkeit der Größen α (resp. φ, β, ρ) von $\overline{\mathcal{L}}$ und $S_j \in \mathcal{S}$ werden wir im Folgenden auch die Bezeichnungen $\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}$ (resp. $\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}, \beta_{\overline{\mathcal{L}},j}, \rho_{\overline{\mathcal{L}},j}$) verwenden.

1.3.2. Bemerkungen. – (a) Die letzte Ungleichung in Definition 1.3.1 sichert uns die lokale Integrabilität der ersten Chern-Form $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ (die außerhalb von $\mathrm{div}(l)$ und $\mathcal{S}$ durch $c_1(\overline{\mathcal{L}}) = -dd^c(\log \|l\|^2)$ gegeben ist) auf den offenen Kreisscheiben $B_\varepsilon(S_j)$ und somit auch auf ganz $\mathcal{X}_\infty$.

(b) Die Definition 1.3.1 ist eine leichte Erweiterung von Mumfords Begriff einer *guten Metrik* (siehe [Mu], Seite 242).

1.3.3. Proposition. *Es sei $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ ein hermitesches, logarithmisch singuläres Geradenbündel auf einer arithmetischen Fläche $\mathcal{X}$. Dann gilt:*

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{X}_\infty} c_1(\overline{\mathcal{L}}).$$

Beweis. Es sei l ein rationaler Schnitt von $\mathcal{L}$. Da die Behauptung für Geradenbündel mit glatten, hermiteschen Metriken bekanntlich richtig ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß der Träger des Divisors $\operatorname{div}(l) = \sum_\alpha p_\alpha P_\alpha$ auf $\mathcal{X}_\infty$ in $\mathcal{S}$ enthalten ist. Unter Ausnutzung des Satzes von Stokes für $\mathcal{X}_\varepsilon := \mathcal{X}_\infty \setminus \bigcup_{j=1}^r B_\varepsilon(S_j)$ erhalten wir

$$\int_{\mathcal{X}_\infty} c_1(\overline{\mathcal{L}}) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathcal{X}\varepsilon} dd^c(\log\|l\|^2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^r \int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} d^c(\log\|l\|^2).$$

Aus der lokalen Entwicklung

$$\log\|l(t)\| = \operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot\log|t| + \alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\log(-\log|t|^2) + \log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t))$$

für $t \in B_\varepsilon(S_j)\setminus\{0\}$ folgt die Behauptung, da

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} d^c(\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot\log|t|) = \operatorname{ord}_{S_j}(l)$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} d^c(\log(-\log|t|^2)) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} d^c(\log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t))) = 0$$

gilt. Bei dem letzten Integral haben wir die Wachstumsbedingungen an die Ableitungen von φ, wie sie in Definition 1.3.1 gefordert sind, verwendet. □

1.3.4. Definition. Zwei hermitesche, logarithmisch singuläre Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ auf $\mathcal{X}$ heißen *isomorph*, falls gilt:

$$\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1} \cong (\mathcal{O}_\mathcal{X}, |\cdot|).$$

Diese Definition ist wegen der Stetigkeit von φ zulässig. Wir bezeichnen die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen, logarithmisch singulären Geradenbündeln $\overline{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{X}$ mit $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$; die Gruppenstruktur ist durch das Tensorprodukt gegeben.

1.3.5. Bemerkung. Wir haben eine kanonische Inklusion von $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X})$ nach $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$. Ziel ist es, die durch Formel (8) induzierte Paarung auf $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X})$ zu einer Paarung auf $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X},\mathcal{S})$ zu erweitern. Es seien $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ hermitesche, logarithmisch singuläre Geradenbündel auf $\mathcal{X}$ und l, m rationale Schnitte von $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ (resp.), deren Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty$ keinen Punkt gemeinsam haben. Dann sind die Ausdrücke (3) und (4) der Definition 1.2.3 im Allgemeinen nicht mehr definiert. Deshalb machen wir folgende neue

1.3.6. Definition. *Mit den obigen Bezeichnungen definieren wir die verallgemeinerte Schnittzahl im Unendlichen $\langle l.m\rangle_\infty$ von l und m durch die Formel:*

$$\begin{aligned}\langle l.m\rangle_\infty \quad := \quad & \int_{\mathcal{X}_\infty} \Big(-\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) - \log\|m\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{L}}) + 2\cdot d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)\Big) + \\ & \sum_{j=1}^{r} (\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}). \qquad (11)\end{aligned}$$

1.3.7. Bemerkung. Für $\mathcal{S}=\emptyset$ gilt wegen Formel (6) von Proposition 1.2.4

$$\langle l.m\rangle_\infty = (l.m)_\infty,$$

denn dann haben wir

$$\sum_{j=1}^{r} (\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}) = 0.$$

1.3.8. Theorem. *Die verallgemeinerte Schnittzahl* (11) *im Unendlichen ist wohldefiniert.*

Beweis. Es seien $\overline{\mathcal{L}},\overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche, logaritmisch singuläre Geradenbündel auf $\mathcal{X}$ und l,m nicht-triviale, rationale Schnitte von $\mathcal{L},\mathcal{M}$ (resp.), deren Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty$ keinen Punkt gemeinsam haben. Für ein genügend kleines $\varepsilon>0$ setzen wir

$$\mathcal{X}_\varepsilon := \mathcal{X}_\infty \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{r} B_\varepsilon(S_j)\right)$$

und

$$\begin{aligned}\langle l.m\rangle_\varepsilon \quad := \quad & \int_{\mathcal{X}_\varepsilon} \Big(-\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) - \log\|m\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{L}}) + 2\cdot d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)\Big) + \\ & \sum_{j=1}^{r} \Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\Big).\end{aligned}$$

Die Größe $\langle l.m\rangle_\varepsilon$ ist beschränkt, da die betrachteten Metriken auf $\mathcal{X}_\varepsilon$ glatt und hermitesch sind. Wir müssen zeigen, daß der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle l.m\rangle_\varepsilon = \langle l.m\rangle_\infty$$

existiert. Dazu genügt es, die ε-Abhängigkeit der Integrale

$$\int_{A_{\varepsilon,\varepsilon_0}(S_j)} \Big(-\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) - \log\|m\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{L}}) + 2\cdot d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)\Big) \qquad (12)$$

zu bestimmen; hierbei ist ε_0 so fixiert, daß $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ gilt, und $A_{\varepsilon,\varepsilon_0}(S_j)$ bezeichnet den Kreisring

$$A_{\varepsilon,\varepsilon_0}(S_j)=\{t\in B_{\varepsilon_0}(S_j)\,|\,\varepsilon<|t|<\varepsilon_0\}$$

mit Mittelpunkt S_j $(j=1,...,r)$. Wir betrachten nun die folgenden lokalen Entwicklungen in einer kleinen Umgebung eines Punktes $S_j\in\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\log\|l(t)\| &= \mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\log|t|+\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\log(-\log|t|^2)+\log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)),\\
\partial\log\|l(t)\| &= \left(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\frac{1}{t}-\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\frac{1}{t(\log|t|^2)}+\frac{\partial\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}{\partial t}\cdot\frac{1}{\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}\right)dt,\\
\bar\partial\log\|l(t)\| &= \left(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\frac{1}{\bar t}-\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\frac{1}{\bar t(\log|t|^2)}+\frac{\partial\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}{\partial\bar t}\cdot\frac{1}{\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}\right)d\bar t
\end{aligned}$$

und

$$c_1(\overline{\mathcal{L}}) = \left(\frac{-\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}}{|t|^2(\log|t|^2)^2}+\left(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)\frac{\partial^2\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}{\partial t\partial\bar t}-\frac{\partial\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}{\partial\bar t}\right)\cdot\frac{1}{\varphi^2_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)}\right)\frac{dt\wedge d\bar t}{\pi i}.$$

Analoge Formeln bestehen für $\log\|m(t)\|,\partial\log\|m(t)\|,\bar\partial\log\|m(t)\|$ und $c_1(\overline{\mathcal{M}})$. Man beachte:

$$d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)=-\frac{1}{4\pi i}\left(\partial(\log\|l\|)\cdot\bar\partial(\log\|m\|)+\partial(\log\|m\|)\cdot\bar\partial(\log\|l\|)\right). \quad (13)$$

Nach Einsetzen aller dieser Entwicklungen in die Integrale (12) erhalten wir mit Hilfe der Wachstumsbedingungen an die $\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)$ und $\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(t)$ sowie an ihre Ableitungen, daß alle auftretenden Intgrale von der Form $O_{\varepsilon_0}(1)+O(\varepsilon)$ sind. Man beachte dabei zusätzlich, daß die Terme, deren Integranden proportional zu $\frac{1}{|t|^2(\log|t|^2)}$ sind, sich gegenseitig aufheben und $\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\mathrm{ord}_{S_j}(m)=0$ gilt. □

Es gilt das zu Proposition 1.2.4 analoge Lemma.

1.3.9. Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Identitäten:*

$$\begin{aligned}
&\langle l.m\rangle_\infty=\\
&-(\log\|m\|)[\mathrm{div}(l)-\sum_{j=1}^r\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot S_j]+\sum_{j=1}^r\mathrm{ord}_{S_j}(l)\Big(\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j}-\log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(0))\Big)-\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sum_{j=1}^r\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j}\cdot\log(-\log\varepsilon^2)+\int_{\mathcal{X}_\varepsilon}\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}})\right) \qquad (14)
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&\langle l.m\rangle_\infty = \\
&-(\log\|l\|)[\mathrm{div}(m) - \sum_{j=1}^{r}\mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot S_j] - (\log\|m\|)[\mathrm{div}(l) - \sum_{j=1}^{r}\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot S_j] - \\
&\sum_{j=1}^{r}\Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(0)) + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(0))\Big) - \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{j=1}^{r}\log(-\log\varepsilon^2)\Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\Big) + \\
&2\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Beweis. Wie in Abschnitt 1.2.3 schreiben wir

$$
\mathrm{div}(l) = \sum_\alpha p_\alpha P_\alpha \quad , \quad \mathrm{div}(m) = \sum_\beta q_\beta Q_\beta;
$$

weiter setzen wir für $\varepsilon > 0$

$$
\mathcal{X}_\varepsilon := \mathcal{X}_\infty \setminus \left(\bigcup_{\alpha:P_\alpha\notin\mathcal{S}} B_\varepsilon(P_\alpha) \cup \bigcup_{\beta:Q_\beta\notin\mathcal{S}} B_\varepsilon(Q_\beta) \cup \bigcup_{j=1}^{r} B_\varepsilon(S_j)\right)
$$

und

$$
\begin{aligned}
\langle l.m\rangle_\varepsilon \quad := \quad & \int_{\mathcal{X}_\varepsilon}\Big(-\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) - \log\|m\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{L}}) + 2\cdot d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|)\Big) + \\
& \sum_{j=1}^{r}\Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\Big).
\end{aligned}
$$

Wir haben bereits gezeigt, daß der Grenzwert

$$
\langle l.m\rangle_\infty = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle l.m\rangle_\varepsilon
$$

existiert. Betrachten wir zunächst das Integral

$$
-\int_{\mathcal{X}_\varepsilon}\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}).
$$

Eine Anwendung des Satzes von Stokes ergibt wie im Beweis von Proposition 1.2.4 (siehe (7))

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathcal{X}_\varepsilon}\log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) = -(\log\|l\|)[\mathrm{div}(m) - \sum_{j=1}^{r}\mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot S_j] - \\
&2\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)}\log\|l\|\cdot d^c(\log\|m\|) - 2\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|) + O(\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Wir bestimmen nun die ε-Abhängigkeit des Integrals über den Rand $\partial B_\varepsilon(S_j)$. Dazu verwenden wir wiederum die lokalen Entwicklungen in der Nähe des Punktes $S_j \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\log\|l(t)\| &= \operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot\log|t| + \alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\log(-\log|t|^2) + \log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(t)),\\
\log\|m(t)\| &= \operatorname{ord}_{S_j}(m)\cdot\log|t| + \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j}\cdot\log(-\log|t|^2) + \log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(t)).
\end{aligned}$$

In den folgenden Rechnungen werden wir die Polarkoordinaten r,φ mit $t = re^{i\varphi}$ benutzen. Weiter benötigen wir die Formel

$$\begin{aligned}
d^c(\log\|m(re^{i\varphi})\|) &= \left(\frac{\operatorname{ord}_{S_j}(m)}{4\pi} + \frac{\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j}}{4\pi\log r} + \frac{r}{4\pi}\frac{\partial\log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(re^{i\varphi}))}{\partial r}\right)d\varphi\, -\\
&\quad \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(re^{i\varphi}))}{\partial\varphi}dr; \qquad (17)
\end{aligned}$$

zur Berechnung der Identität (17) haben wir die Formel

$$d^c = \frac{r}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}d\varphi - \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial\varphi}dr$$

herangezogen. Falls $l(S_j) \neq 0$ ist, finden wir für unser Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} \log\|l\|\cdot d^c(\log\|m\|) =\\
&\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ord}_{S_j}(m)\Big(\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\log(-\log\varepsilon^2) + \log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(0))\Big) + O(\varepsilon); \qquad (18)
\end{aligned}$$

falls aber $m(S_j) \neq 0$ ist, finden wir für unser Integral

$$\int_{\partial B_\varepsilon(S_j)} \log\|l\|\cdot d^c(\log\|m\|) = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + O(\varepsilon). \qquad (19)$$

Einsetzen von (18) und (19) ergibt für das Integral (16)

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} \log\|l\|\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}) = -(\log\|l\|)[\operatorname{div}(m) - \sum_{j=1}^{r}\operatorname{ord}_{S_j}(m)\cdot S_j] -\\
&\sum_{j=1}^{r}\Big(\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \operatorname{ord}_{S_j}(m)\Big(\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\cdot\log(-\log\varepsilon^2) + \log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(0))\Big)\Big) -\\
&2\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} d(\log\|l\|)\cdot d^c(\log\|m\|) + O(\varepsilon)\,. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Eine analoge Formel besteht, wenn wir $\overline{\mathcal{L}}$ mit $\overline{\mathcal{M}}$, resp. l mit m vertauschen. Deshalb erhalten wir die Formel

$$
\begin{aligned}
&\langle l.m\rangle_\varepsilon = \\
&-(\log\|l\|)[\mathrm{div}(m) - \sum_{j=1}^{r} \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot S_j] - (\log\|m\|)[\mathrm{div}(l) - \sum_{j=1}^{r} \mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot S_j] - \\
&\sum_{j=1}^{r} \Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot \log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}},j}(0)) + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot \log(\varphi_{\overline{\mathcal{L}},j}(0)) + \log(-\log\varepsilon^2)\cdot \\
&\Big(\mathrm{ord}_{S_j}(l)\cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \mathrm{ord}_{S_j}(m)\cdot \alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\Big)\Big) - 2\int_{\mathcal{X}_\varepsilon} d(\log\|m\|)\cdot d^c(\log\|l\|) + O(\varepsilon). \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Die beiden behaupteten Formeln (14) und (15) für die verallgemeinerte Schnittzahl im Unendlichen folgen nun unmittelbar aus den Formeln (20) (mit vertauschten l und m) und (21). □

1.3.10. Definition. Es seien $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche, logarithmisch singuläre Geradenbündel über $\mathcal{X}$ und l, m (resp.) nicht-triviale, globale Schnitte, deren Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty$ keinen Punkt gemeinsam haben. Dann ist die *verallgemeinerte arithmetische Schnittzahl* $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}}$ *von* $\overline{\mathcal{L}}$ *und* $\overline{\mathcal{M}}$ definiert durch

$$
\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}} := (l.m)_{\mathrm{fin}} + \langle l.m\rangle_\infty; \qquad (22)
$$

hierbei werden $(l.m)_{\mathrm{fin}}$ bzw. $\langle l.m\rangle_\infty$ durch Formel (2) bzw. Formel (11) bestimmt.

Die *verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl* von $\overline{\mathcal{L}}$ ist definiert durch $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{L}}$.

Die verallgemeinerte arithmetische Schnittzahl $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}}$ von $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ ist, wie der nächste Satz zeigt, unabhängig von der Wahl der Schnitte l, m.

1.3.11. Theorem. *Die Formel* (22) *induziert eine bilineare, symmetrische Paarung*

$$
\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X},\mathcal{S}) \times \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X},\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{R},
$$

welche die ursprüngliche Paarung (8) *auf* $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X})$ *erweitert.*

Beweis. Wir müssen die Symmetrie, die Bilinearität und die Wohldefiniertheit der verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahl zeigen.

(a) Symmetrie: Die Symmetrie von $(l.m)_{\mathrm{fin}}$ wurde bereits erwähnt, und die Symmetrie von $\langle l.m\rangle_\infty$ folgt aus Formel (15).

(b) Bilinearität: Die Bilinearität von $(l.m)_{\mathrm{fin}}$ wurde ebenfalls bereits erwähnt, und die Bilinearität von $\langle l.m \rangle_\infty$ folgt ebenfalls aus der Formel (15).

(c) Wohldefiniertheit: Hier reduziert sich der Beweis auf die entsprechende Tatsache im Beweis von Theorem 1.2.6, denn wir erhalten für $\overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|)$ mit Hilfe von Formel (14)

$$\langle l.m \rangle_\infty = -(\log |m|)[\mathrm{div}(l)],$$

da $c_1(\overline{\mathcal{M}}) = 0$ und $\alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} = 0$ sind. $\square$

1.4 Modulkurven und Modulformen über $\mathbb{C}$

1.4.1. Modulkurven über $\mathbb{C}$. Es bezeichne $\mathfrak{h} := \{\tau = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,\tau = y > 0\}$ die obere komplexe Halbebene. Die volle Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert eigentlich, diskontinuierlich vermöge gebrochen linearer Transformationen auf $\mathfrak{h}$:

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}; \quad \tau \in \mathfrak{h}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Wir setzen $\Gamma(1) := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ und betrachten Untergruppen $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ von endlichem Index. Beispiele für solche Untergruppen sind die Kongruenzuntergruppen. Der Quotientenraum $\Gamma \setminus \mathfrak{h}$ hat in natürlicher Weise die Struktur einer offenen Riemannschen Fläche, welche durch Hinzufügen endlich vieler Spitzen kompaktifiziert werden kann. Wir bezeichnen diese kompakten Riemannschen Fläche mit $X(\Gamma)$; es gilt $X(\Gamma) = \Gamma \setminus (\mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$. Wir nennen $X(\Gamma)$ die (allgemeine) Modulkurve zu Γ (siehe z.B. [Se2], Seite 71). Für ein $\tau \in \mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ bezeichne

$$\Gamma_\tau := \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma(\tau) = \tau\}$$

den Stabilisator von τ in Γ und $n_\tau := |\Gamma_\tau|$ seine Ordnung. Auf $X(\Gamma)$ gibt es drei Arten von Punkten:

- *Gewöhnliche Punkte* P_{τ_0}; diese entsprechen den Bahnen der $\tau_0 \in \mathfrak{h}$ mit $n_{\tau_0} = 1$; ein lokaler Parameter in P_{τ_0} ist $t = \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \overline{\tau}_0}$.

- *Elliptische Punkte* Q_{τ_0}; diese entsprechen den Bahnen der $\tau_0 \in \mathfrak{h}$ mit $n := n_{\tau_0} > 1$; ein lokaler Parameter in Q_{τ_0} ist $t = \left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}\right)^n$.
- *Spitzen (auch parabolische Punkte genannt)* S_{τ_0}; diese entsprechen den Bahnen der $\tau_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$; ein lokaler Parameter in S_{τ_0} ist $t = e^{2\pi i\gamma(\tau)/s}$; dabei ist s die Spitzenbreite von S_{τ_0} und $\gamma \in \Gamma(1)$ erfüllt $\gamma(\tau_0) = i\infty$.

Es gibt nur endlich viele elliptische Punkte und Spitzen auf $X(\Gamma)$. Die kompakte Riemannsche Fläche $X(1) := X(\Gamma(1))$ ist bekanntermaßen isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dieser Isomorphismus wird durch die klassische *j-Invariante* bestimmt, deren Fourierentwicklung in der einzigen Spitze $S_{i\infty}$ von $X(1)$ gegeben ist durch

$$j(\tau) = \frac{1}{t} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(j)\, t^n \quad (t = e^{2\pi i\tau}). \tag{23}$$

Weiter stellt sich heraus, daß der Funktionenkörper $k(X(1))$ von $X(1)$ der Körper $\mathbb{C}(j)$ der rationalen Funktionen in $j(\tau)$ ist. Eine Untergruppe Γ von endlichem Index in $\Gamma(1)$ bestimmt eine endliche, holomorphe Abbildung

$$\pi_\Gamma : X(\Gamma) \longrightarrow X(1)$$

vom Grad $\deg \pi_\Gamma = [\Gamma(1) : \Gamma]$. Der Funktionenkörper $k(X(\Gamma))$ von $X(\Gamma)$ ist somit eine endliche, algebraische Erweiterung von $\mathbb{C}(j)$ vom Grad $[\Gamma(1) : \Gamma]$. Mehr Einzelheiten dazu finden sich z.B. in [Sh], Kapitel 1-2.

1.4.2. Die hyperbolische Metrik auf $X(\Gamma)$. Die Volumenform μ der hyperbolischen Metrik auf $\mathfrak{h}$ ist gegeben durch die $(1,1)$-Form

$$\mu = \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{(\operatorname{Im} \tau)^2}.$$

Wir bezeichnen mit μ_Γ die von μ auf $X(\Gamma)$ induzierte Volumenform. Diese $(1,1)$-Form ist singulär. Ihre Singularitäten treten in den elliptischen Punkten und in den Spitzen von $X(\Gamma)$ auf, denn es gilt:

- In einer genügend kleinen Kreisscheibe $B_\varepsilon(Q_{\tau_0})$ um einen elliptischen Punkt Q_{τ_0} ist die Einschränkung von μ_Γ auf $B_\varepsilon(Q_{\tau_0})$ in dem entsprechenden lokalen Parameter t gegeben durch $(n = n_{\tau_0})$

$$\mu_\Gamma\big|_{B_\varepsilon(Q_{\tau_0})} = \frac{2i}{n^2} \cdot \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^{2-2/n}(1-|t|^{2/n})^2}.$$

- In einer genügend kleinen Kreisscheibe $B_\varepsilon(S_{\tau_0})$ um eine Spitze S_{τ_0} ist die Einschränkung von μ_Γ auf $B_\varepsilon(S_{\tau_0})$ in dem entsprechenden lokalen Parameter t gegeben durch

$$\mu_\Gamma|_{B_\varepsilon(S_{\tau_0})} = 2i \cdot \frac{dt \wedge d\bar{t}}{|t|^2 \log(|t|^2)^2}.$$

Trotz der Singularitäten von μ_Γ ist das Integral von μ_Γ über $X(\Gamma)$ definiert; es ist nämlich wohlbekannt, daß

$$\int_{X(\Gamma)} \mu_\Gamma \;=\; \int_{\mathcal{F}(\Gamma)} \mu = \frac{\pi}{3} \cdot [\Gamma(1) : \Gamma] = (-4\pi) \cdot \zeta_{\mathbb{Q}}(-1) \cdot [\Gamma(1) : \Gamma]$$

gilt; hierbei bezeichnen $\mathcal{F}(\Gamma)$ einen Fundamentalbereich für die Wirkung von Γ auf $\mathfrak{h}$ und $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ die Riemannsche Zetafunktion.

1.4.3. Modulformen über $\mathbb{C}$. Es sei $M_2(\mathbb{Z})$ die Algebra der (2×2)-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und k eine natürliche Zahl. Der Slash-Operator $|_k$ induziert wie folgt eine Wirkung von $M_2(\mathbb{Z})$ auf den auf $\mathfrak{h}$ holomorphen Funktionen f: Für gegebenes $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ ist diese definiert durch

$$f(\tau) \mapsto (f|_k\gamma)(\tau) := f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \cdot (c\tau + d)^{-k} \cdot \det(\gamma).$$

Eine *Modulform f vom Gewicht $k \in 2\mathbb{N}$ (bezüglich Γ)* ist eine holomorphe Funktion $f : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(*a*) $(f|_k\gamma)(\tau) = f(\tau)\ \forall\, \gamma \in \Gamma$;

(*b*) $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, t^n$ mit $t = e^{2\pi i \tau / s}$ und analogen Fourierentwicklungen in allen anderen Spitzen von $X(\Gamma)$.

Wir bezeichnen den $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k mit $M_k(\Gamma)$. Die direkte Summe $\bigoplus_k M_k(\Gamma)$ ist ein kommutativer, graduierter Ring; die Multiplikation ist die Multiplikation holomorpher Funktionen, und die Graduierung ist durch das Gewicht gegeben. Die Inklusion $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ induziert eine Inklusion $M_k(\Gamma(1)) \subseteq M_k(\Gamma)$. Umgekehrt gilt:

1.4.4. Proposition. *Es sei* Γ *eine Untergruppe von endlichem Index* $d = [\Gamma(1) : \Gamma]$ *in* $\Gamma(1)$. *Jede Modulform* $f \in M_k(\Gamma)$ *ist algebraisch ganz über* $\bigoplus_k M_k(\Gamma(1))$.

Beweis. Die Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ ist Nullstelle des Polynoms

$$\prod_{\rho \in \Gamma \backslash \Gamma(1)} (X - f|_k \rho),$$

dessen Koeffizienten die elementarsymmetrischen Funktionen in den $f|_k\rho$ sind. Da die Anwendung von $|_k\gamma$ mit $\gamma \in \Gamma(1)$ diese Nullstellen vertauscht, sind die Koeffizienten Modulformen bezüglich $\Gamma(1)$. □

1.4.5. Beispiel. Die klassische *Diskriminante* $\Delta(\tau)$, welche durch die Produktentwicklung

$$\Delta(\tau) = t \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{24} \quad (t = e^{2\pi i \tau}) \tag{24}$$

definiert wird, ist ein Beispiel für eine Modulform vom Gewicht $k = 12$ bezüglich $\Gamma(1)$. Wir bemerken, daß $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathfrak{h}$ und $\mathrm{ord}_{S_{i\infty}}(\Delta) = 1$ gilt.

1.4.6. Definition. Aus dem Transformationsverhalten einer Modulform $f(\tau) \in M_k(\Gamma)$ bezüglich der Wirkung von Γ folgt, daß Modulformen (vom Gewicht k bezüglich Γ) globale Schnitte eines Geradenbündels $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$ auf $X(\Gamma)$ sind. Wir nennen dieses Geradenbündel das *Modulformenbündel (vom Gewicht k bezüglich Γ)*.

1.4.7. Proposition. *Es sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $12|k$. *Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty \cong \pi_\Gamma^* \mathcal{O}_{X(1)}(S_{i\infty})^{\otimes k/12}.$$

Beweis. Wir haben einen Isomorphismus

$$M_k(\Gamma) \cong H^0\big(X(\Gamma), \mathcal{O}_{X(\Gamma)}(\pi_\Gamma^* S_{i\infty})^{\otimes k/12}\big)\,;$$

dieser ist gegeben durch die Abbildung, welche einer Modulform $f \in M_k(\Gamma)$ die Modulfunktion $f/\Delta^{k/12} \in k(X(\Gamma))$ zuordnet; dabei beachte man noch die Ungleichung

$$\mathrm{div}(f/\Delta^{k/12}) \geq -\frac{k}{12} \pi_\Gamma^* S_{i\infty},$$

welche aufgrund der Holomorphie von f und $\mathrm{ord}_{S_{i\infty}}(\Delta) = 1$ gilt. □

1.4.8. Die Petersson Metrik auf $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$. Die *Petersson Metrik* $\|\cdot\|_{Pet}$ auf dem Modulformenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$ ist durch

$$\|f(\tau)\|_{Pet}^2 := |f(\tau)|^2 (4\pi \,\mathrm{Im}\, \tau)^k$$

definiert; dabei ist f ein rationaler Schnitt von $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$, d.h. $f(\tau)$ ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht k. Mit dem Normalisierungsfaktor $(4\pi)^k$ folgen wir J.-B. Bost (siehe [Bo], Seite 11).

1.4.9. Proposition. *Die Petersson Metrik $\|\cdot\|_{Pet}$ auf $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$ ist logarithmisch singulär bezüglich der Menge der elliptischen Punkte und der Spitzen auf $X(\Gamma)$.*

Beweis. Wir müssen die Bedingungen (I) und (II) von Definition 1.3.1 überprüfen.

Bedingung (I): Man sieht leicht, daß die Petersson Metrik $\|\cdot\|_{Pet}$ außerhalb der Menge der elliptischen Punkte und der Spitzen auf $X(\Gamma)$ eine glatte, hermitesche, F_∞-invariante Metrik ist.

Bedingung (II): Für die Menge der elliptischen Punkte und der Spitzen auf $X(\Gamma)$ erhalten wir folgendes lokales Verhalten von $\|\cdot\|_{Pet}$:

- In einer genügend kleinen Kreisscheibe $B_\varepsilon(Q_{\tau_0})$ um einen elliptischen Punkt Q_{τ_0} ist die Einschränkung von $\|f\|_{Pet}$ auf $B_\varepsilon(Q_{\tau_0})$ in dem entsprechenden lokalen Parameter t gegeben durch $(n = n_{\tau_0})$
$$\|f(t)\|_{Pet} = |f(t)| \cdot \left(\frac{1 - |t|^{2/n}}{|t^{1/n} - 1|^2} \cdot 4\pi \operatorname{Im} \tau_0 \right)^{k/2}.$$
- In einer genügend kleinen Kreisscheibe $B_\varepsilon(S_{\tau_0})$ um eine Spitze S_{τ_0} ist die Einschränkung von $\|f\|_{Pet}$ auf $B_\varepsilon(S_{\tau_0})$ in dem entsprechenden lokalen Parameter t gegeben durch
$$\|f(t)\|_{Pet} = |f(t)| \cdot \left(-s \cdot \log |t|^2\right)^{k/2}.$$

Man sieht nun leicht, daß die Bedingungen von Definition 1.3.1 erfüllt sind. □

1.4.10. Bemerkung. Die erste Chern-Form $c_1(\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty, \|\cdot\|_{Pet})$ des Modulformenbündels $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$, versehen mit der Petersson Metrik $\|\cdot\|_{Pet}$, ist gegeben durch
$$c_1(\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty, \|\cdot\|_{Pet}) = \frac{k}{4\pi} \cdot \mu_\Gamma.$$
Weiter folgt aus Proposition 1.3.3
$$\deg(\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty) = \int_{X(\Gamma)} c_1(\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty, \|\cdot\|_{Pet}) = \int_{X(\Gamma)} \frac{k}{4\pi} \cdot \mu_\Gamma = \frac{k}{12} \cdot [\Gamma(1) : \Gamma].$$
Wir beachten, daß $\deg(\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty)$ aufgrund der Definition von $\mathcal{M}_k(\Gamma)_\infty$ eine ganze Zahl ist.

1.5 Modulkurven und Modulformen über $\mathbb{Z}$

1.5.1. Modulkurven über $\mathbb{Z}$. Die kompakte Riemannsche Fläche $X(1)$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Der entsprechende Isomorphismus wird durch das Modulformenbündel $\mathcal{M}_{12}(\Gamma(1))_\infty$ induziert. Indem wir nämlich die beiden kanonischen Schnitte Z_0 und Z_1 des Hyperebenenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\mathbb{C}}(1)$ mit $j \cdot \Delta, \Delta$ (resp.) identifizieren, erhalten wir die Isomorphie

$$X(1) \cong \operatorname{Proj} \mathbb{C}[Z_0, Z_1] = \mathbb{P}^1_\mathbb{C}.$$

Die *arithmetische Fläche* $\mathcal{X}(1)$ *zur Modulgruppe* $\Gamma(1)$, welche $X(1)$ zu einer arithmetischen Fläche über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ fortsetzt, wird somit gegeben durch

$$\mathcal{X}(1) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[Z_0, Z_1] = \mathbb{P}^1_\mathbb{Z}.$$

Es sei nun $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$ und

$$\pi_\Gamma : X(\Gamma) \longrightarrow X(1)$$

die entsprechende Überlagerung von kompakten Riemannschen Flächen, die außerhalb der $\Gamma(1)$-Bahnen von $i, (1+i\sqrt{3})/2, i\infty \in \mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ unverzweigt ist; diese Bahnen entsprechen den Punkten $0, 1728, \infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (resp.). Es läßt sich zeigen, daß $X(\Gamma)$ ein glattes, projektives Modell $X(\Gamma)_E$ besitzt, welches über einem Zahlkörper $E/\mathbb{Q}$ minimalen Grades definiert ist; umgekehrt besagt der Satz von Belyi, daß jede algebraische Kurve, die über einem Zahlkörper definiert ist, als (allgemeine) Modulkurve realisiert werden kann (siehe z.B. [Bo2], Seite 99). Die Überlagerungsabbildung π_Γ induziert einen über E definierten Morphismus

$$\pi_{\Gamma,E} : X(\Gamma)_E \longrightarrow \mathbb{P}^1_\mathbb{Q}$$

glatter, projektiver, algebraischer Kurven. Der Funktionenkörper $k(X(\Gamma)_E)$ bestimmt also eine endliche Körpererweiterung von $k(\mathcal{X}(1)) = \mathbb{Q}(j)$ vom Grad $[\Gamma(1):\Gamma] \cdot [E:\mathbb{Q}]$. Es bezeichne $X(\Gamma)_\mathbb{Z}$ die Normalisierung von $\mathcal{X}(1) = \mathbb{P}^1_\mathbb{Z}$ in $k(X(\Gamma)_E)$; dies ist ein normales, integrales, projektives Schema (siehe [EGAII], Kapitel 6.3), das flach über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist (siehe [Ha], Kapitel III, 9.1.3). Die Singularitäten von $X(\Gamma)_\mathbb{Z}$ sind isolierte Punkte, da $X(\Gamma)_\mathbb{Z}$ normal ist. Diese Singularitäten könnnen aufgelöst werden (siehe [Li], Seite 151). Es sei $\mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow X(\Gamma)_\mathbb{Z}$ eine Desingularisierung von $X(\Gamma)_\mathbb{Z}$. Wir nennen $\mathcal{X}(\Gamma)$ *eine arithmetische Fläche zu* Γ. Wir bemerken, daß jeder dominante Morphismus von $\mathcal{X}(\Gamma)$ nach $\mathcal{X}(1)$

über $X(\Gamma)_{\mathbb{Z}}$ faktorisiert (siehe [EGAII], Kapitel 6.3). Den durch die Desingularisierung induzierten Morphismus von $\mathcal{X}(\Gamma)$ nach $\mathcal{X}(1)$ bezeichnen wir mit $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}$. Wir haben also das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}"'] & X(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\ & \mathcal{X}(1) \end{tikzcd} \tag{25}$$

und es gilt $\deg(\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}) = [E:\mathbb{Q}]\cdot[\Gamma(1):\Gamma]$.

1.5.2. Modulformen über $\mathbb{Z}$. Es seien $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, $\mathcal{X}(\Gamma)$ eine arithmetische Fläche zu Γ und $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}} : \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{X}(1)$ der entsprechende Morphismus (siehe 1.5.1). Die Spitze $S_{i\infty} \in X(1)$ induziert einen Schnitt $s_\infty : \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{X}(1)$, dessen Divisor wir mit D_∞ bezeichnen. Unter Beachtung von Proposition 1.4.7 definieren wir für $k \in \mathbb{N}, 12|k$, das *Modulformenbündel* $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ *auf* $\mathcal{X}(\Gamma)$ durch

$$\mathcal{M}_k(\Gamma) := \pi^*_{\Gamma,\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathcal{X}(1)}(D_\infty)^{\otimes k/12}.$$

Wir beachten, daß nach der Konstruktion unserer Modelle die Gleichheit

$$X(\Gamma)_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj}\bigoplus_{k\geq 0} H^0(\mathcal{X}(\Gamma),\mathcal{M}_k(\Gamma))$$

gilt und jeder Schnitt $l \in H^0(\mathcal{X}(\Gamma),\mathcal{M}_k(\Gamma))$ algebraisch ganz über dem graduierten Ring $\bigoplus_{k\geq 0} H^0(\mathcal{X}(1),\mathcal{M}_k(\Gamma(1)))$ ist.

Wir setzen nun $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma) := (\mathcal{M}_k(\Gamma), \|\cdot\|_{Pet})$; dieses Geradenbündel ist ein hermitesches, logarithmisch singuläres Geradenbündel.

1.5.3. Modulräume elliptischer Kurven. Es sei $\mathcal{X}(N)$ die arithmetische Fläche, welche das Modulproblem 'verallgemeinerte elliptische Kurve versehen mit einer Level-N Struktur' repräsentiert (siehe [DeRa], Seiten 11, 68, 73). Man beachte, daß dieses Modulproblem über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta_N]$ repräsentiert wird (siehe [DeRa], Seite 78); dabei ist ζ_N eine primitive N-te Einheitswurzel. Es gilt $\mathcal{X}(N)_\infty \cong \coprod_{j=1}^{\Phi(N)} X(\Gamma(N))$ (siehe [DeRa], Seite 84); dabei sind $\Phi(N) = [\mathbb{Q}(\zeta_N):\mathbb{Q}]$ und $\Gamma(N)$ die volle Kongruenzuntergruppe von $\Gamma(1)$ zur Stufe N. Es gibt eine universelle, verallgemeinerte elliptische Kurve

$$\nu : \mathcal{E}(N) \longrightarrow \mathcal{X}(N);$$

diese ist eine elliptische Kurve über einem offenen, dichten Unterschema $\mathcal{U}$ von $\mathcal{X}(N)$. Über $\mathcal{U}$ haben wir die Klassifikationsabbildung, welche durch die j-Invariante gegeben ist, auf den groben Modulraum $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ der elliptischen Kurven. Diese Abbildung erweitert sich zu einer Abbildung

$$j_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)} : \mathcal{X}(N) \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}.$$

Es bestehen die Isomorphismen (siehe [DeRa], Seiten 11, 73)

$$\mathcal{X}(N) \cong \mathcal{X}(\Gamma(N)) = X(\Gamma(N))_{\mathbb{Z}};$$

hierbei sind die Bezeichnungen wie im Abschnitt 1.5.1 gewählt. Mit dem Nullschnitt $e : \mathcal{X}(N) \longrightarrow \mathcal{E}(N)$ und dem relativen Kotangentialbündel $\Omega^1_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}$ setzen wir weiter

$$\omega_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)} := e^*\Omega^1_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}.$$

Damit erhalten wir den kanonischen Isomorphismus (siehe [DeRa], Seite 161)

$$j^*_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}\mathcal{O}_{\mathcal{X}(1)}(D_\infty) \cong \omega^{\otimes 12}_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}$$

und somit einen kanonischen Schnitt von $\omega^{\otimes 12}_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}$, den wir mit Δ bezeichnen. Auf $\mathcal{U}$ besteht außerdem der Isomorphismus

$$\omega_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}|_{\mathcal{U}} \cong \nu_*\Omega^1_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}|_{\mathcal{U}}.$$

Deshalb hat $\omega_{\mathcal{E}(N)_\infty/\mathcal{X}(N)_\infty}$ eine natürliche Metrik, welche für alle $x \in \mathcal{X}(N)_\infty \backslash \{j^*_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}S_{i\infty}\}$ und jedes $\alpha \in \omega_{\mathcal{E}(N)_\infty/\mathcal{X}(N)_\infty,x} \cong H^0(\mathcal{E}(N)_{\infty,x}, \Omega^1_{\mathcal{E}(N)_\infty,x})$ durch die folgende Gleichung definiert ist

$$\|\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2} := \frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{E}(N)_{\infty,x}} \alpha \wedge \overline{\alpha}.$$

Diese Metrik setzt sich zu einer hermiteschen, logarithmisch singulären Metrik bezüglich der Spitzen von $\mathcal{X}(N)$ fort, denn auf der Tate-Kurve $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})/q^{\mathbb{Z}}$ $(q = e^{2\pi i\tau})$, die $\mathcal{E}(N)_\infty$ in der Nähe einer Spitze beschreibt, ist der obige kanonische Schnitt Δ gegeben durch

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \cdot \left(\frac{dw}{w}\right)^{\otimes 12};$$

hierbei ist $\frac{dw}{w}$ das natürliche Differential von $\mathbb{G}_m(\mathbb{C})$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\|\Delta^{1/12}\|^2_{\mathrm{L}^2} &= \frac{i}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{G}_m(\mathbb{C})/q^{\mathbb{Z}}} |\Delta^{1/12}|^2 \cdot \frac{dw}{w} \wedge \frac{d\bar{w}}{\bar{w}} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot |\Delta|^{1/6} \cdot \int_{|q|}^{1} \frac{2\pi r \cdot dr}{r^2} \\
&= |\Delta|^{1/6} \cdot (-2 \log |q|)
\end{aligned}$$

(siehe [Bo], Seiten 8,10). Wir erhalten damit

$$\|\Delta^{1/12}\|^2_{\mathrm{L}^2} = |\Delta|^{1/6} \cdot (4\pi \operatorname{Im} \tau),$$

und daraus folgt für $k \in \mathbb{N}, 12|k$, die Isomorphie

$$(\omega^{\otimes k}_{\mathcal{E}(N)/\mathcal{X}(N)}, \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2}) \cong (\mathcal{M}_k(\Gamma(N)), \|\cdot\|_{Pet})$$

von hermiteschen, logarithmisch singulären Geradenbündeln. Dieser Isomorphismus liefert zudem eine Definition von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma(N))$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$.

1.5.4. Bemerkung. Dieser Isomorphismus von hermiteschen, logarithmisch singulären Geradenbündeln begründet die Wahl der Normalisierung der Petersson Metrik in Definition 1.4.8.

1.6 Die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl des Modulformenbündels

1.6.1. Theorem. *Es sei $k \in \mathbb{N}, 12|k$, und es bezeichne $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ die Riemannsche Zetafunktion. Damit ist die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl des Modulformenbündels $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma(1))$ auf $\mathcal{X}(1)$, versehen mit der Petersson Metrik, gegeben durch*

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma(1)).\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma(1)) = k^2 \left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right).$$

Beweis. Zum Beweis dieses Theorems wählen wir zwei Schnitte l, m von $\mathcal{M}_k(\Gamma(1)) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}(1)}(D_\infty)^{\otimes k/12}$, deren Divisoren sich eigentlich schneiden und disjunkt zum Schnitt s_∞ auf $\mathcal{X}(1)$ sind. Weil

$$\mathcal{X}(1) = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[j \cdot \Delta, \Delta]$$

ist, finden wir zwei homogene Polynome P, Q vom Grad $n := k/12$ mit ganzzahligen Koeffizienten so, daß

$$\begin{aligned} P(j \cdot \Delta, \Delta) &= \Delta^n \cdot p(j), \\ Q(j \cdot \Delta, \Delta) &= \Delta^n \cdot q(j) \end{aligned}$$

mit normierten Polynomen $p(\cdot) = P(\cdot, 1), q(\cdot) = Q(\cdot, 1)$ in $\mathbb{Z}[j]$ vom Grad n (resp.), wobei p über $\mathbb{C}$ keine Nullstelle mit q gemeinsam hat. Es sollen nun die Schnitte l, m den Polynomen P, Q (resp.) entsprechen. Zuerst werden wir die verallgemeinerte Schnittzahl im Unendlichen von l und m bestimmen. Die Schnitte l und m entsprechen den beiden Modulformen

$$\begin{aligned} f(\tau) &= P(j(\tau) \cdot \Delta(\tau), \Delta(\tau)) = \Delta(\tau)^n \cdot p(j(\tau)), \\ g(\tau) &= Q(j(\tau) \cdot \Delta(\tau), \Delta(\tau)) = \Delta(\tau)^n \cdot q(j(\tau)) \end{aligned}$$

vom Gewicht k bezüglich $\Gamma(1)$ (resp.). Diese Modulformen erfüllen $f(i\infty) = g(i\infty) = 1$, und wir haben die Faktorisierungen

$$\begin{aligned} p(j(\tau)) &= \prod_{\mu=1}^{n} (j(\tau) - j(\alpha_\mu)), \\ q(j(\tau)) &= \prod_{\nu=1}^{n} (j(\tau) - j(\beta_\nu)); \end{aligned} \tag{26}$$

hierbei sind $\alpha_\mu, \beta_\nu \in \mathfrak{h}$ $(\mu, \nu = 1, ..., n)$. Aufgrund der Formel (14) von Lemma 1.3.9 folgt

$$\begin{aligned} \langle l.m \rangle_\infty &= -(\log \|g(\tau)\|_{Pet})[\mathrm{div}(f(\tau))] - \int_{X(1)} \log \|f(\tau)\|_{Pet} \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma(1))) \\ &= -\sum_{\mu=1}^{n} \log \|g(\alpha_\mu)\|_{Pet} - \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))} \log \|f(\tau)\|_{Pet} \cdot \mu. \end{aligned} \tag{27}$$

Mit Hilfe der Faktorisierung (26) schreiben wir die Summe in (27) als

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{n} \log \|g(\alpha_\mu)\|_{Pet} &= \sum_{\mu=1}^{n} (\log \|\Delta(\alpha_\mu)^n\|_{Pet} + \log |q(j(\alpha_\mu))|) \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \left(n \cdot \log \|\Delta(\alpha_\mu)\|_{Pet} + \sum_{\nu=1}^{n} \log |j(\alpha_\mu) - j(\beta_\nu)| \right) \\ &= n \sum_{\mu=1}^{n} \log \|\Delta(\alpha_\mu)\|_{Pet} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \log |j(\alpha_\mu) - j(\beta_\nu)|. \end{aligned} \tag{28}$$

Aufgrund der Definition der Petersson Metrik ist das Integral in (27) gegeben durch

$$\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))}\log\|f(\tau)\|_{Pet}\cdot\mu=\frac{k^2}{24}\cdot\log(4\pi)+\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))}\log(|f(\tau)|^2(\operatorname{Im}\tau)^{k/2})\cdot\mu.$$

Das Integral auf der rechten Seite bestimmt sich mit Hilfe der modularen Jensen-Formel von D. Rohrlich (siehe [Ro], Seite 19) zu

$$\begin{aligned}&\frac{3}{\pi}\int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))}\log(|f(\tau)|^2(\operatorname{Im}\tau)^{k/2})\cdot\frac{dxdy}{y^2}=\\&-\sum_{\mu=1}^{n}\log(|\Delta(\alpha_\mu)|(\operatorname{Im}\alpha_\mu)^6)-n\cdot 12\left(\frac{1}{2}+\log(2)-\gamma+\zeta_{\mathbb{Q}}'/\zeta_{\mathbb{Q}}(2)\right);\end{aligned}\tag{29}$$

hierbei sind γ die Eulersche Zahl und $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ die Riemannsche Zetafunktion. Nach Ausnutzung der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion erhalten wir

$$\frac{1}{2}+\log(2)-\gamma+\zeta_{\mathbb{Q}}'/\zeta_{\mathbb{Q}}(2)=-12\left(\left(\log(4\pi)-\frac{1}{2}\right)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)-\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right).\tag{30}$$

Mit den Formeln (29), (30) und mit $k=12\cdot n$ erhalten wir für das Integral in (27)

$$\begin{aligned}&\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))}\log\|f(\tau)\|_{Pet}\cdot\mu=\\&\frac{k^2}{24}\log(4\pi)-n\sum_{\mu=1}^{n}\log(|\Delta(\alpha_\mu)|(\operatorname{Im}\alpha_\mu)^6)+k^2\left(\left(\log(4\pi)-\frac{1}{2}\right)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)-\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identitäten $\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)=-1/12$ und $k^2/24=n^2\cdot 6$ ergibt sich

$$\frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{F}(\Gamma(1))}\log\|f(\tau)\|_{Pet}\cdot\mu=-n\sum_{\mu=1}^{n}\log\|\Delta(\alpha_\mu)\|_{Pet}-k^2\left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right).\tag{31}$$

Die Addition der Formeln (28) und (31) bestimmt

$$\langle l.m\rangle_\infty=-\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\log|j(\alpha_\mu)-j(\beta_\nu)|+k^2\left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right).\tag{32}$$

Bei der Berechnung der Schnittzahl im Endlichen $(l.m)_{fin}$ benutzen wir die Gleichheit $\mathcal{X}(1)=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}}(1)^{\otimes k/12}$. Mit der Formel (10) erhalten wir

$$\begin{aligned}(l.m)_{\text{fin}}&=\log(|R(P,Q)|)\\&=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\log|j(\alpha_\mu)-j(\beta_\nu)|.\end{aligned}\tag{33}$$

Die Behauptung folgt durch Addieren von (32) und (33). □

1.6.2. Korollar. *Es bezeichne $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ die Riemannsche Zetafunktion. Es seien $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ eine Untergruppe der vollen Modulgruppe von endlichem Index, $\mathcal{X}(\Gamma)$ eine arithmetische Fläche zu Γ, $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}} : \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{X}(1)$ der entsprechende Morphismus und $d = \deg(\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}})$ sein Grad (siehe 1.5.1). Weiter sei $k \in \mathbb{N}$ derart, daß $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ definiert ist (siehe 1.5.2 bzw. 1.5.3). Dann ist die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl des Modulformenbündels $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma)$ auf $\mathcal{X}(\Gamma)$, versehen mit der Petersson Metrik, gegeben durch*

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma).\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma) = k^2 \cdot d \cdot \left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right).$$

Beweis. Da die verallgemeinerte arithmetische Schnittzahl bilinear ist, genügt es die Behauptung für große $k \in \mathbb{N}$ mit $12|k$ zu beweisen. Wir wählen nun Schnitte $l, m \in H^0(\mathcal{X}(1), \mathcal{M}_k(\Gamma(1)))$ derart, daß die Divisoren $\mathrm{div}(l), \mathrm{div}(m) \subset \mathcal{X}(1)$ disjunkt sind und das Bild der singulären Punkte von $X(\Gamma)_{\mathbb{Z}}$ bezüglich der Faktorisierung von $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}$ (siehe (25)) nicht enthalten. Solche Schnitte existieren für großes $k \in \mathbb{N}$. Damit setzen wir $\tilde{l} := \pi^*_{\Gamma,\mathbb{Z}}(l)$ und $\tilde{m} := \pi^*_{\Gamma,\mathbb{Z}}(m)$. Man beachte, daß $\tilde{l}, \tilde{m} \in H^0(\mathcal{X}(\Gamma), \mathcal{M}_k(\Gamma))$ sind. Diese Schnitte schneiden sich in den endlichen Fasern nicht, deshalb gilt

$$(\tilde{l}.\tilde{m})_{\mathrm{fin}} = 0.$$

Die Schnitte l und $\tilde{l}$ entsprechen derselben Modulform, was aus der Inklusion $M_k(\Gamma(1)) \subseteq M_k(\Gamma)$ folgt; das Analoge gilt auch für m und $\tilde{m}$. Die verallgemeinerte Schnittzahl im Unendlichen von $\tilde{l}$ und $\tilde{m}$ ist somit gegeben durch

$$\langle \tilde{l}.\tilde{m} \rangle_{\infty} = d \cdot \langle l.m \rangle_{\infty}.$$

Das Korollar folgt nun aus der Wohldefiniertheit der verallgemeinerten, arithmetischen Schnittzahl und Theorem 1.6.1. □

1.7 Anwendung: Schlechte Reduktion von $\mathcal{X}(\Gamma)$.

1.7.1. Vorbemerkungen. Es seien $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\Gamma(1)$, $\mathcal{X}(\Gamma)$ eine arithmetische Fläche zu Γ, $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}} : \mathcal{X}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{X}(1)$ der entsprechende Morphismus und $d = \deg(\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}) = [E : \mathbb{Q}] \cdot [\Gamma(1) : \Gamma]$ sein Grad (vgl. 1.5.1). Weiter erinnern wir an die Zerlegung

$$\mathcal{X}(\Gamma)_\infty = \coprod_{\sigma: E \to \mathbb{C}} \mathcal{X}(\Gamma)_\sigma(\mathbb{C}),$$

worin alle $\mathcal{X}(\Gamma)_\sigma(\mathbb{C}) \cong X(\Gamma)$ sind. Es sei nun $l \in H^0(\mathcal{X}(\Gamma), \mathcal{M}_k(\Gamma))$ und $f \in M_k(\Gamma)$ die l entsprechende Modulform. Aufgrund der Konstruktion von $\mathcal{X}(\Gamma)$ ist f Nullstelle des Polynoms

$$\prod_{\sigma: E \to \mathbb{C}} \prod_{\rho \in \Gamma \backslash \Gamma(1)} (X - \sigma(f)|_k \, \rho) = X^d + \sum_{r=0}^{d-1} a_r \cdot X^r, \tag{34}$$

dessen Koeffizienten $a_r \in \mathbb{Z}[j \cdot \Delta, \Delta]$ sind. Wir weisen darauf hin, daß dieses Polynom reduzibel sein kann. Damit setzen wir

$$p_l(j) := \frac{a_0}{\Delta^{dk/12}}$$

und beachten, daß $p_l(j) \in \mathbb{Z}[j]$ ist.

1.7.2. Korollar. *Es gelten die obigen Bezeichnungen. Weiter existiere $l \in H^0(\mathcal{X}(\Gamma), \mathcal{M}_k(\Gamma))$ derart, daß das Polynom $p_l(j)/N$, wobei $N = \prod_p p^{n_p}$ der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $p_l(j)$ ist, normiert ist. Dann sind die Fasern $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_p} = \mathcal{X}(\Gamma) \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$* $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ *von $\mathcal{X}(\Gamma)$ für alle p mit $p|N$ und $n_p \not\equiv 0 \bmod d$ nicht integral, m.a.W. für diese Primzahlen hat $\mathcal{X}(\Gamma)$ schlechte Reduktion in p.*

Beweis. Es sei p_0, $p_0|N$, eine Primzahl mit der Eigenschaft $n_{p_0} \not\equiv 0 \bmod d$. Weiter sei $k_2 \in \mathbb{N}$, $12|k_2$, derart, daß ein Schnitt $m \in H^0(\mathcal{X}(1), \mathcal{M}_{k_2}(\Gamma(1)))$ existiert, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Dem Schnitt m entspricht wie im Beweis von 1.6.1 das normierte Polynom $q(j) \in \mathbb{Z}[j]$ vom Grad $n = k_2/12$.

(2) Der auf $\mathcal{X}(1)_\infty$ induzierte Divisor $\operatorname{div}(m)$ von m ist disjunkt zum Bild der singulären Punkte von $X(\Gamma)_\mathbb{Z}$ bezüglich der Faktorisierung von $\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}}$ (vgl. (25)).

(3) Für die Resultante $|R(p_l(j)/N, q(j))|$ von $p_l(j)$ und $q(j)$ gilt

$$\left| R\left(\frac{p_l(j)}{N}, q(j)\right) \right| = 1.$$

Wählt man k_2 genügend groß, so überlegt man sich leicht, daß ein solcher Schnitt m existiert. Damit setzen wir dann $\tilde{m} := \pi^*_{\Gamma,\mathbb{Z}}(m)$. Aufgrund der Bilinearität der verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahl und Korollar 1.6.2 bestehen die Gleichungen

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma).\overline{\mathcal{M}}_{k_2}(\Gamma) = (l.\tilde{m})_{\mathrm{fin}} + \langle l.\tilde{m}\rangle_\infty = k \cdot k_2 \cdot d \cdot \left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right). \tag{35}$$

Wir wollen nun zuerst die verallgemeinerte Schnittzahl im Unendlichen bestimmen. Es seien f, g die Modulformen, die $l, \tilde{m}$ (resp.) entsprechen. Damit erhalten wir mit Formel (14) von Lemma 1.3.9 unter Ausnutzung der Symmetrie

$$\langle l.\tilde{m}\rangle_\infty \;=\; -(\log\|f(\tau)\|_{Pet})[\mathrm{div}(g(\tau))] - \int_{\mathcal{X}(\Gamma)_\infty} \log\|g(\tau)\|_{Pet} \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma)). \tag{36}$$

Da aufgrund der Faktorisierung (vgl. Beweis von 1.6.1)

$$q(j(\tau)) \;=\; \prod_{\nu=1}^{n}(j(\tau) - j(\beta_\nu))$$

der Divisor von $g(\tau)$ auf jeder irreduziblen Komponente $\mathcal{X}(\Gamma)_\sigma(\mathbb{C})$ von $\mathcal{X}(\Gamma)_\infty$ aus den Γ-Bahnen der Punkte $\{\rho(\beta_\nu) \in \mathfrak{h} |\, \rho \in \Gamma \setminus \Gamma(1),\, \beta_\nu \in \mathfrak{h}\, (\nu = 1, .., n)\}$ besteht, ergibt sich für den ersten Summanden von (36)

$$-(\log\|f(\tau)\|_{Pet})[\mathrm{div}(g(\tau))] = -\sum_{\sigma: E\to\mathbb{C}} (\log\|f(\tau)\|_{Pet})\left[\mathrm{div}(g(\tau))|_{\mathcal{X}(\Gamma)_\sigma(\mathbb{C})}\right] =$$

$$-\sum_{\sigma: E\to\mathbb{C}}\;\sum_{\rho\in\Gamma\setminus\Gamma(1)}\;\sum_{\nu=1}^{n} \log\|\sigma(f)(\rho(\beta_\nu))\|_{Pet} = -\sum_{\nu=1}^{n}\log\|a_0(\beta_\nu)\|_{Pet},$$

wobei bei der letzten Gleichheit die algebraische Gleichung (34) für f zu beachten ist. Aufgrund der Definition von $p_l(j)$ ergibt sich weiter

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\log\|a_0(\beta_\nu)\|_{Pet} = -\sum_{\nu=1}^{n}\left(\log\|\Delta(\beta_\nu)^{\frac{dk}{12}}\|_{Pet} + \log|p_l(j(\beta_\nu))|\right) =$$

$$-\frac{dk}{12}\sum_{\nu=1}^{n}\log\|\Delta(\beta_\nu)\|_{Pet} - n\log(N) - \log\left|R\left(\frac{p_l(j)}{N}, q(j)\right)\right|. \tag{37}$$

Für das Integral in (36) erhalten wir analog der Formel (31) im Beweis von 1.6.1

$$-\int_{\mathcal{X}(\Gamma)_\infty}\log\|g(\tau)\|_{Pet}\cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma)) = -d\cdot\frac{k}{4\pi}\int_{X(1)}\log\|g(\tau)\|_{Pet}\cdot\mu =$$

$$\frac{dk}{12}\sum_{\nu=1}^{n}\log\|\Delta(\beta_\nu)\|_{Pet} + k\cdot k_2\cdot d\cdot\left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right). \tag{38}$$

Zusammenführen der Terme (37) und (38) ergibt

$$\langle l.\tilde{m}\rangle_\infty \quad = \quad -n\cdot\log(N) + k\cdot k_2\cdot d\cdot\left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right); \qquad (39)$$

hierbei haben wir ausgenutzt, daß $|R(p_l(j)/N, q(j))| = 1$ ist. Nun bestimmen wir die Schnittzahl $(l.\tilde{m})_{\text{fin}}$ im Endlichen. Aufgrund von (35) und (39) folgt dazu unmittelbar

$$(l.\tilde{m})_{\text{fin}} = n\cdot\log(N) = \sum_p (n_p\cdot n)\cdot\log(p) = (n_{p_0}\cdot n)\cdot\log(p_0) + \sum_{p\neq p_0}(n_p\cdot n)\cdot\log(p). \quad (40)$$

Wir analysieren nun den $\log(p_0)$ enthaltenden Term von (40): Aufgrund unserer Wahl von $\tilde{m}$ schneiden sich die horizontalen Anteile der Divisoren $\operatorname{div}(l)$ und $\operatorname{div}(\tilde{m})$ nicht, und $\operatorname{div}(\tilde{m})$ enthält keine vertikalen Komponenten. Da sich aber $\operatorname{div}(l)$ und $\operatorname{div}(\tilde{m})$ in der Faser $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}$ aufgrund von Formel (40) schneiden, muß $\operatorname{div}(l)$ somit mindestens eine irreduzible Komponente von $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}$ enthalten. Wenn $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}$ irreduzibel wäre, dann müßte der vertikale Anteil $\operatorname{div}(l)_{\text{ver},p_0}$ von $\operatorname{div}(l)$ über p_0 ein r-faches der Faser $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}$ sein, und es ergäbe sich

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(l)_{\text{ver},p_0},\operatorname{div}(\tilde{m}))_{\text{fin}} &= r\cdot\left(\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}},\operatorname{div}(\tilde{m})\right)_{\text{fin}}\\
&= r\cdot\deg_{\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}}\left(\mathcal{M}_{k_2}(\Gamma)|_{\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}}\right)\cdot\log(p_0)\\
&= r\cdot\deg(\pi_{\Gamma,\mathbb{Z}})\cdot\deg_{X(1)}(\mathcal{M}_{k_2}(\Gamma(1)))\cdot\log(p_0)\\
&= r\cdot(d\cdot n)\cdot\log(p_0),
\end{aligned}$$

d.h. $n_{p_0}\equiv 0 \bmod d$. Dies widerspricht aber der Annahme $n_{p_0}\not\equiv 0\bmod d$. Daraus schliessen wir, daß die Faser $\mathcal{X}(\Gamma)_{\mathbb{F}_{p_0}}$ reduzibel sein muß. □

1.7.3. Beispiel. Für Primzahlen p sei $X(\Gamma_0(p))$ die Modulkurve zur Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma_0(p) := \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(1)\,\middle|\, c\equiv 0\bmod p\right\}.$$

Es besteht die Nebenklassenzerlegung

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \bigcup_{\rho\in\Gamma_0(p)\backslash\Gamma(1)}\Gamma_0(p)\cdot\rho\\
&= \bigcup_{r=0}^{p-1}\Gamma_0(p)\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & r\end{pmatrix}\cup\Gamma_0(p)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};
\end{aligned}$$

insbesondere gilt $[\Gamma(1):\Gamma_0(p)] = p+1$. Der Funktionenkörper $k(X(\Gamma_0(p)))$ von $X(\Gamma_0(p))$ ist gegeben durch $\mathbb{C}(j(\tau), j(p\tau))$. Die Minimalgleichung von $j(p\tau)$, die sogenannte Modulargleichung, über dem Funktionenkörper $\mathbb{C}(j(\tau))$ ist gegeben durch

$$\prod_{\rho\in\Gamma_0(p)\backslash\Gamma(1)} (X - j(p\cdot\rho(\tau))) = 0.$$

Diese Gleichung hat Koeffizienten in $\mathbb{Z}[j]$, was zeigt, daß $X(\Gamma_0(p))$ ein Modell besitzt, welches über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

1.7.4. Proposition. *Es seien $p \neq 2,3,5,11$ eine Primzahl und $\mathcal{X}(\Gamma_0(p))$ eine arithmetische Fläche zu $\Gamma_0(p)$ (siehe 1.5.1). Dann hat $\mathcal{X}(\Gamma_0(p))$ schlechte Reduktion in p.*

1.7.5. Bemerkung. Mittels der modularen Interpretation der Punkte von $X(\Gamma_0(p))_{\mathbb{Z}}$ zeigen P. Deligne und M. Rappoport, daß die Voraussetzung $p \neq 2,3,5,11$ entbehrlich ist und die Faser über p die einzige Faser mit schlechter Reduktion ist. Die Tatsache, daß die Faser über p schlechte Reduktion hat, ist ein klassisches Resultat (siehe z.B. [DeRa], Seite 143).

Beweis von 1.7.4. Die Modulform $\Delta_p(\tau) := p^{12}\cdot\Delta(p\cdot\tau)$ ist eine Modulform vom Gewicht 12 bezüglich $\Gamma_0(p)$ und Nullstelle des Polynoms

$$\begin{aligned}
&\prod_{\rho\in\Gamma_0(p)\backslash\Gamma(1)} (X - \Delta_p|_{12}\,\rho) = \\
&\left(X - p^{12}\Delta(p\cdot\tau)\right)\prod_{r=0}^{p-1}\left(X - p^{12}\Delta\left(p\cdot\frac{-1}{\tau+r}\right)(\tau+r)^{-12}\right) = \\
&\left(X - p^{12}\Delta(p\cdot\tau)\right)\prod_{r=0}^{p-1}\left(X - \Delta\left(\frac{\tau+r}{p}\right)\right) = \\
&\left(X - p^{12}t^p\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^{pn})^{24}\right)\prod_{r=0}^{p-1}\left(X - \zeta_p^r t^{1/p}\prod_{n=1}^{\infty}(1-(\zeta_p^r t^{1/p})^n)^{24}\right),
\end{aligned}$$

wobei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel und $t = e^{2\pi i\tau}$ sind. Da dieses Polynom offensichtlich Koeffizienten in $\mathbb{Z}[j\cdot\Delta,\Delta]$ hat, können wir mit der Modulform Δ_p, d.h. mit dem entsprechenden Schnitt $l \in H^0(\mathcal{X}(\Gamma_0(p)), \mathcal{M}_{12}(\Gamma_0(p)))$, Korollar 1.7.2 anwenden. Indem wir zudem beachten, daß $X(\Gamma_0(p))$ ein Modell über $\mathbb{Q}$ besitzt, erhalten wir aus obiger Produktdarstellung $a_0 = p^{12}\cdot\Delta^{p+1}$, also $p_l(j) = p^{12}$. Die Proposition folgt nun aus Korollar 1.7.2, da für $p\neq 2,3,5,11$ gilt $12 \not\equiv 0 \bmod (p+1)$. □

1.8 Ein zweiter Beweis von Theorem 1.6.1

Im Beweis von Theorem 1.6.1 wählten wir die Schnitte l, m von $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$ so, daß wir die modulare Jensen-Formel anwenden konnten. Diesmal wählen wir andere Schnitte und reduzieren den Beweis von Theorem 1.6.1 auf ein Integral, das wir mittels der Kronecker-Grenzformel bestimmen werden.

1.8.1. Beweis von 1.6.1. Es sei l der globale Schnitt von $\mathcal{M}_{12}(\Gamma(1))$, welcher der Diskriminante $\Delta \in M_{12}(\Gamma(1))$ entspricht und m der Schnitt von $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$, der der Modulform $j \cdot \Delta \in M_{12}(\Gamma(1))$ entspricht. Damit erkennen wir sofort $(l.m)_{\mathrm{fin}} = 0$, also folgt

$$\overline{\mathcal{M}}_{12}(\Gamma(1)).\overline{\mathcal{M}}_{12}(\Gamma(1)) = \langle l.m \rangle_\infty .$$

Zur Bestimmung von $\langle l.m \rangle_\infty$ werden wir Formel (14) aus Lemma 1.3.9 anwenden; dazu beachten wir Proposition 1.4.9. Die Menge der singulären Punkte auf $X(1)$ bezüglich der Petersson-Metrik besteht aus der Spitze $S_1 = S_{i\infty}$ und den Punkten S_2, S_3, die den $\Gamma(1)$-Bahnen von $i, (1+\sqrt{-3})/2 \in \mathfrak{h}$ (resp.) entsprechen; damit ist die offene Riemannsche Fläche $X(1)_\varepsilon$ bestimmt durch $X(1)_\varepsilon = X(1) \setminus \bigcup_{j=1}^{3} B_\varepsilon(S_j)$, wobei die $B_\varepsilon(S_j)$ die ε-Umgebungen aus Definition 1.3.1 sind. Für die Spitzenbreite s von $S_{i\infty}$ gilt $s = 1$, weshalb der Schnitt m in der Spitze $S_{i\infty}$ die lokale Entwicklung

$$\|m(t)\|_{Pet} = |j(t) \cdot \Delta(t)| \cdot \left(\log |t|^2\right)^6 \quad (t = e^{2\pi i \tau})$$

hat. Damit haben wir $\alpha_{\overline{\mathcal{M}}_{12},1} = 6$ und $\varphi_{\overline{\mathcal{M}}_{12},1} = |j(t) \cdot \Delta(t)|$ für diesen Schnitt. Für die beiden anderen Punkte gilt $\alpha_{\overline{\mathcal{M}}_{12},2} = \alpha_{\overline{\mathcal{M}}_{12},3} = 0$. Es folgt nun mit Formel (14)

$$\begin{aligned}
&\langle l.m \rangle_\infty = \\
&-(\log \|m\|_{Pet})[\mathrm{div}(l) - \sum_{j=1}^{3} \mathrm{ord}_{S_j}(l) \cdot S_j] + \sum_{j=1}^{3} \mathrm{ord}_{S_j}(l) \Big(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}_{12},j} - \log(\varphi_{\overline{\mathcal{M}}_{12},j}(0)) \Big) - \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{j=1}^{3} \mathrm{ord}_{S_j}(l) \cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}}_{12},j} \cdot \log(-\log \varepsilon^2) + \int_{X(1)_\varepsilon} \log \|l\|_{Pet} \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}_{12}) \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{ord}_{S_1}(l) = 1$ und $\mathrm{ord}_{S_2}(l) = \mathrm{ord}_{S_3}(l) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle l.m \rangle_\infty &= 0 + 1 \cdot \Big(6 - \log(1) \Big) - \\
&\lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 \cdot 6 \cdot \log(-\log \varepsilon^2) + \int_{X(1)_\varepsilon} \log \|\triangle\|_{Pet} \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}_{12}) \right).
\end{aligned}$$

Damit ist das Integral über $X(1)_\varepsilon$ zu berechnen. Indem wir $\varepsilon = e^{-2\pi T}$ mit einem großen $T \in \mathbb{R}$ wählen und mit $\mathcal{F}_{y\leq T}$ den nach oben abgeschnittenen Standardfundamentalbereich

$$\mathcal{F}_{y\leq T} = \{\tau = x + i\, y \in \mathfrak{h} |\, 1 \leq |\tau|,\, -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2},\, y \leq T\}$$

einführen, erkennen wir leicht, daß

$$\langle l.m\rangle_\infty \quad = \quad 6 - \lim_{T\to\infty}\left(6\log(4\pi T) + \int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \log \|\Delta(\tau)\|_{Pet} \cdot \frac{12}{4\pi} \cdot \frac{dxdy}{y^2}\right) \qquad (41)$$

gilt. Es gilt nun das Integral über $\mathcal{F}_{y\leq T}$ zu bestimmen.

1.8.2. Vorbemerkungen. Es sei $E(\tau, s)$ die nicht-holomorphe Eisensteinreihe, welche für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ wie folgt definiert ist:

$$E(\tau, s) \quad = \quad \sum_{g\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma(1)} \mathrm{Im}\,(g\,\tau)^s = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\(c,d)=1}} \frac{y^s}{|c\tau + d|^{2s}} \qquad \left(\Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

(siehe z.B. [Za2], Seite 415). Diese Funktion ist als Funktion in τ eine $\Gamma(1)$-invariante Funktion, besitzt als Funktion in s eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und hat einen Pol in $s = 1$ mit Residuum $3/\pi$, welches von τ unabhängig ist. Die Fourierentwicklung von $E(\tau, s)$ ist gegeben durch

$$E(\tau, s) \quad = \quad y^s + \varphi(s)y^{1-s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)} \sum_{m\neq 0} |m|^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(m)y^{1/2}K_{s-1/2}(2\pi|m|y)e^{2\pi i m x};$$

dabei sind $K_{s-1/2}(x)$ eine Bessel-Funktion, die ganz in s und für große x exponentiell klein in x ist, $\sigma_s(m) = \sum_{d|m} d^s$ die verallgemeinerte Teilerfunktion und

$$\varphi(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)} = \frac{3}{\pi}(s-1)^{-1} + \frac{3}{\pi}\left(2 - 2\log(4\pi) - 24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right) + O(s-1).$$

1.8.3. Proposition. *(Kronecker-Grenzformel). Es sei $\Delta(\tau) \in M_{12}(\Gamma(1))$ die Diskriminante und $\|\Delta(\tau)\|_{Pet}^2 = |\Delta(\tau)|^2(4\pi y)^{12}$ ihre Petersson-Norm. Dann gilt*

$$-\log\|\Delta(\tau)\|_{Pet}^2 + 12\log(4\pi) = 4\pi \lim_{s\to 1}\left(E(\tau, s) - \varphi(s)\right).$$

Beweis. Diese Darstellung der Kronecker-Grenzformel unterscheidet sich leicht von der in [Za1] auf Seite 267 gegebenen, der Beweis ist aber analog. Unter Berücksichtigung von $K_{1/2}(x)=\sqrt{\pi/(2x)}\,e^{-x}$ und $Y^{(1-s)}-1=-\log(Y)(s-1)+O\left((s-1)^2\right)$ folgt:

$$\lim_{s\to 1}\left(E(\tau,s)-\varphi(s)\right) \;=\; y-\frac{3}{\pi}\log y+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}e^{-2\pi ny}\cos(2\pi nx). \tag{42}$$

Mit dem Standardfundamentalbereich $\mathcal{F}(\Gamma(1))$ für die Aktion von $\Gamma(1)$ auf $\mathfrak{h}$ folgt wegen $|t|=|e^{2\pi i\tau}|<1$ für alle $\tau\in\mathcal{F}(\Gamma(1))$:

$$\log(\Delta(\tau)/t) \;=\; 24\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-t^n)=-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}t^n\,.$$

Unter Ausnutzung der Gleichheit $\log|z|^2=2\,\mathrm{Re}\,\log(z)$ für $z\in\mathbb{C}^*$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}-\log(|\Delta(\tau)|^2y^{12}) &= -\log(|t|^2\cdot|\Delta(\tau)/t|^2\cdot y^{12})\\ &= 4\pi y-12\log y-2\cdot\mathrm{Re}\left(-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}t^n\right)\\ &= 4\pi y-12\log y+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}e^{-2\pi ny}\cos(2\pi nx). \end{aligned}\tag{43}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus dem Vergleich der Formeln (42) und (43). □

1.8.4. Proposition. *Es sei $\mathcal{F}_{y\le T}$ wie in 1.8.1. Dann gilt für $T\gg 0$*

$$\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}-\log\|\Delta(\tau)\|^2_{Pet}\,\frac{dxdy}{4\pi y^2} \;=\; -2+24\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)+\log(4\pi T)+O\left(\frac{\log T}{T}\right).$$

Beweis. Mit der Kronecker-Grenzformel folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}-\log(|\Delta(\tau)|^2y^{12})\,\frac{dxdy}{4\pi y^2} &= \int_{\mathcal{F}_{y\le T}}\lim_{s\to 1}\left(E(\tau,s)-\varphi(s)\right)\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \lim_{s\to 1}\left(\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}E(\tau,s)\frac{dxdy}{y^2}-\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}\varphi(s)\frac{dxdy}{y^2}\right).\end{aligned}$$

Zur Berechnung des ersten Integrals auf der rechten Seite verwenden wir die folgende Formel (siehe z.B. [Za2], Formel (33) auf Seite 426):

$$\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}E(\tau,s)\frac{dxdy}{y^2} \;=\; \frac{T^{s-1}}{s-1}-\varphi(s)\frac{T^{-s}}{s}. \tag{44}$$

Einsetzen der Entwicklung von $\varphi(s)$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{y\le T}}E(\tau,s)\frac{dxdy}{y^2} &= \left((s-1)^{-1}+\log(T)\right)-\\ &\quad\left(\frac{3}{\pi T}(s-1)^{-1}+O\left(\frac{\log T}{T}\right)\right)+O(s-1).\end{aligned}\tag{45}$$

Das zweite Integral bestimmt sich elementar zu

$$\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \varphi(s)\frac{dxdy}{y^2} \quad = \quad \varphi(s)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{T}\right). \tag{46}$$

Einsetzen der Entwicklung von $\varphi(s)$ ergibt dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \varphi(s)\frac{dxdy}{y^2} \quad &= \quad \big((s-1)^{-1}+2-2\log(4\pi)-24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\big) - \\ &\qquad \left(\frac{3}{\pi T}(s-1)^{-1}+O\left(\frac{1}{T}\right)\right)+O(s-1).\end{aligned} \tag{47}$$

Addition der Entwicklungen (45) und (47) führt auf

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} E(\tau,s)\frac{dxdy}{y^2}-\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \varphi(s)\frac{dxdy}{y^2}\Big) = \\ &-2+2\log(4\pi)+24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+\log(T)+O\left(\frac{\log T}{T}\right)+O(s-1).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} -\log\|\Delta(\tau)\|_{Pet}^2\,\frac{dxdy}{4\pi y^2} = \\ &\lim_{s\to 1}\left(-2+2\log(4\pi)+24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+\log(T)+O\left(\frac{\log T}{T}\right)+O(s-1)\right) - \\ &\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} 12\log(4\pi)\frac{dxdy}{4\pi y^2} = \\ &-2+2\log(4\pi)+24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+\log(T)+O\left(\frac{\log T}{T}\right)-\log(4\pi)\cdot\left(1-\frac{3}{\pi T}\right).\end{aligned}$$

□

1.8.5. Ende von Beweis 1.8.1. Mit Hilfe von Proposition 1.8.4 bestimmen wir das gesuchte Integral (41) und erhalten

$$\begin{aligned}\langle l.m\rangle_\infty \quad &= \quad 6-\lim_{T\to\infty}\left(6\log(4\pi T)+\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \log\|\Delta(\tau)\|_{Pet}\cdot\frac{12}{4\pi}\cdot\frac{dxdy}{y^2}\right) \\ &= \quad 6-\lim_{T\to\infty}\left(6\log(4\pi T)-6\log(4\pi T)+12-144\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+O\left(\frac{\log T}{T}\right)\right) \\ &= \quad 144\cdot\left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right).\end{aligned}$$

Aufgrund der Bilinearität der verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahl folgt damit erneut Theorem 1.6.1. □

1.9 Verträglichkeit mit der Theorie der L_1^2-Greenschen Ströme

Wir wollen hier die Theorie der L_1^2-Greenschen Ströme, welche von J.-B. Bost (siehe [Bo], [Bo1]) und A. Moriwaki (siehe [Mo]) entwickelt wurde, vorstellen und zeigen, daß die von uns entwickelten verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahlen mit dieser Theorie verträglich sind.

1.9.1. L_1^2-Greensche Ströme. Es sei M eine Riemannsche Fläche und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M. Der Vektorraum $L_1^2(U)_{\mathrm{loc}}$ besteht aus verallgemeinerten komplexwertigen Funktionen Φ derart, daß Φ und $d\Phi$ lokal L^2 (d.h. betragsquadratintegrierbar) sind (siehe [Bo1], Seite 17). Dieser Raum besitzt unter anderen die Eigenschaft, daß für jedes $\Phi \in L_1^2(U)_{\mathrm{loc}}$ gilt $e^{\Phi} \in L^1(U)$ (siehe [Bo], Seite 1). Wir weisen darauf hin, daß die Funktion $(z \mapsto \log\log|z|^{-1})$ in $L_1^2(B_\varepsilon(0))_{\mathrm{loc}}$, wobei $B_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| < \varepsilon < 1\}$ ist, enthalten ist. Es sei nun $D = \sum_j n_j P_j$ ein Divisor von M. Ein Greenscher Strom g_D für D ist ein F_∞-invarianter Strom, der die Differentialgleichung

$$dd^c g_D + \delta_D = \omega_D$$

erfüllt; dabei sind δ_D der Dirac-Strom zu D und ω_D eine glatte Form. Ein *L_1^2-Greenscher Strom g_{D,L_1^2} für D* ist die Summe von einem Greenschen Strom g_D für D und einer verallgemeinerten Funktion $\Phi \in L_1^2(M)_{\mathrm{loc}}$, d.h. es gilt

$$g_{D,L_1^2} = g_D + \Phi \tag{48}$$

(siehe [Bo1], Seite 33). Diese Definitionen erweitern sich auf offensichtliche Art und Weise auf 1-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeiten, die nicht zusammenhängend sein müssen.

1.9.2. Die erweiterte arithmetische Chow-Gruppe $\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$. Es seien $\mathcal{X}$ eine arithmetische Fläche, $\widehat{Z}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$ die Menge der Paare (D, g_{D,L_1^2}) bestehend aus einen Divisor D auf $\mathcal{X}$ und einem L_1^2-Greenschen Strom g_{D,L_1^2} für den von D induzierten Divisor auf $\mathcal{X}_\infty$, und $\widehat{R}^1(\mathcal{X})$ die Menge der Paare $(\mathrm{div}(f), -\log|f|^2)$, wobei $f \in k(\mathcal{X})^*$ eine rationale Funktion ist. Die *erste arithmetische Chow-Gruppe* $\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$ wird damit definiert als der Quotient

$$\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2) = \widehat{Z}^1(\mathcal{X}, L_1^2) \Big/ \widehat{R}^1(\mathcal{X}).$$

Sind $(D_1, g_{D_1,L_1^2}), (D_2, g_{D_2,L_1^2}) \in \widehat{Z}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$ derart, daß die durch D_1, D_2 induzierten Divisoren auf $\mathcal{X}_\infty$ disjunkt sind, dann ist das arithmetische Schnittprodukt definiert durch

$$\begin{aligned}&(D_1, g_{D_1,L_1^2}).(D_2, g_{D_2,L_1^2}) := \\ &(D_1, D_2)_{\text{fin}} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty}\left(g_1\delta_2 + g_2\omega_1 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2\right);\end{aligned} \tag{49}$$

hierbei ist $(D_1, D_2)_{\text{fin}}$ wie in Formel (1) definiert, $g_{D_j,L_1^2} = g_j + \Phi_j$, wobei $g_j = g_{D_j}$ ein Greenscher Strom für D_j ist, $\delta_j = \delta_{D_j}$ und $\omega_j = dd^c g_j + \delta_j$ $(j = 1, 2)$. Das arithmetische Schnittprodukt (49) induziert eine symmetrische, bilineare Paarung

$$\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2) \times \widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(siehe [Bo1], Seite 38).

1.9.3. Es sei nun $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $\mathcal{X}$. Eine fast überall definierte Metrik $\|\cdot\|$ auf dem von $\mathcal{L}$ induzierten holomorphen Geradenbündel $\mathcal{L}_\infty$ auf $\mathcal{X}_\infty$ heißt L_1^2-regulär, falls für eine glatte Metrik $\|\cdot\|_0$ auf $\mathcal{L}_\infty$ die Gleichung

$$\|\cdot\| = e^{\Phi} \cdot \|\cdot\|_0$$

mit einem $\Phi \in L_1^2(\mathcal{X}_\infty)_{\text{loc}}$ besteht (siehe [Bo], Seite 1). Es bezeichne $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|_{L_1^2})$ ein Paar bestehend aus einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ und einer L_1^2-regulären hermiteschen Metrik $\|\cdot\|_{L_1^2}$ auf $\mathcal{L}_\infty$. Jedes solches Paar bestimmt vermöge

$$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) := [\operatorname{div}(l), -\log\|l\|^2_{L_1^2}] \tag{50}$$

eine wohldefinierte Klasse in $\widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$, die nicht von der Wahl des nicht-trivialen Schnittes l von $\mathcal{L}$ abhängt (siehe [Bo], Seite 2). Die in Definition 1.3.1 eingeführten, logarithmisch singulären Metriken sind L_1^2-regulär und die Zuordnung (50) induziert eine Inklusion

$$\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X}, \mathcal{S}) \hookrightarrow \widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2).$$

1.9.4. Proposition. *Die natürliche Inklusion* $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X}, \mathcal{S}) \hookrightarrow \widehat{CH}^1(\mathcal{X}, L_1^2)$ *ist mit der verallgemeinerten arithmetischen Schnittzahl* (22) *und dem arithmetischen Schnittprodukt* (49) *verträglich.*

Beweis. Es seien $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche, logarithmisch singuläre Geradenbündel auf einer arithmetischen Fläche $\mathcal{X}$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ nicht-triviale, globale Schnitte l und m (resp.) besitzen. Diese induzieren globale Schnitte von $\mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{M}_\infty$, welche wir ebenfalls mit l und m (resp.) bezeichen. Weiter nehmen wir an, daß der Divisor $\operatorname{div}(l)$ von l keinen Punkt des Divisors $\operatorname{div}(m)$ von m auf $\mathcal{X}_\infty$ enthält. Wir werden die Zerlegung (48) verwenden und schreiben

$$-\log \|l\|^2 = g_1 + \Phi_1, \qquad -\log \|m\|^2 = g_2 + \Phi_2. \tag{51}$$

Wir müssen zeigen, daß die beiden Größen

$$\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}} = (l.m)_{\mathrm{fin}} + \langle l.m\rangle_\infty, \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}).\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}) &= (\operatorname{div}(l), \operatorname{div}(m))_{\mathrm{fin}} + \\ &\quad \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty} \left(g_1\delta_2 + g_2\omega_1 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2 \right)\end{aligned} \tag{53}$$

übereinstimmen. Es genügt, die Anteile im Unendlichen zu vergleichen, da die im Endlichen gleich sind. Einsetzen der Zerlegungen (51) in Definition 1.3.6 ergibt folgende Gleichheiten

$$\begin{aligned}\langle l.m\rangle_\infty &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty} \Big((g_1+\Phi_1)\cdot(\omega_2 + c_1(\Phi_2)) + (g_2+\Phi_2)\cdot(\omega_1 + c_1(\Phi_1)) + \\ &\qquad d(g_1+\Phi_1)\cdot d^c(g_2+\Phi_2) \Big) + \sum_{j=1}^r \left(\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \operatorname{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty} \Big(g_1\omega_2 + g_2\omega_1 + dg_1 d^c g_2 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \Phi_1 c_1(\Phi_2) + \Phi_2 c_1(\Phi_1) + \\ &\qquad d\Phi_1 d^c\Phi_2 + g_1 c_1(\Phi_2) + dg_1 d^c\Phi_2 + g_2 c_1(\Phi_1) + d\Phi_1 d^c g_2 \Big) + \\ &\qquad \sum_{j=1}^r \left(\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \operatorname{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty} \Big(g_1\omega_2 + g_2\omega_1 + dg_1 d^c g_2 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2 + \\ &\qquad d(g_1 d^c\Phi_2) + d(g_2 d^c\Phi_1) \Big) + \sum_{j=1}^r \left(\operatorname{ord}_{S_j}(l)\cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j} + \operatorname{ord}_{S_j}(m)\cdot\alpha_{\overline{\mathcal{L}},j}\right);\end{aligned}$$

dabei haben wir bei der letzten Gleichung die Identitäten

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{X}_\infty} \Phi_2 c_1(\Phi_1) = \int_{\mathcal{X}_\infty} \Phi_2 dd^c\Phi_1 = \int_{\mathcal{X}_\infty} \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2 = \\ &\int_{\mathcal{X}_\infty} \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_2\bar{\partial}\Phi_1 = \int_{\mathcal{X}_\infty} \Phi_1 dd^c\Phi_2 = \int_{\mathcal{X}_\infty} \Phi_1 c_1(\Phi_2)\end{aligned}$$

(siehe [Bo1], Seite 32) und die Definition von d^c verwendet. Wir beachten, daß in Analogie zur Formel (19) die Gleichheit

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty} d\left(g_1 d^c \Phi_2\right) = -\sum_{j=1}^{r} \mathrm{ord}_{S_j}(l) \cdot \alpha_{\overline{\mathcal{M}},j}$$

besteht; entsprechend gilt dies auch für das Integral über $d\left(g_2 d^c \Phi_1\right)$. Wir erhalten damit entsprechend dem Beweis von Formel (6) aus Proposition 1.2.4

$$\begin{aligned}
\langle l.m\rangle_\infty &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty}\Big(g_1\omega_2 + g_2\omega_1 + dg_1 d^c g_2 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(g_1[\mathrm{div}(m)] + \int_{\mathcal{X}_\infty} g_2\omega_1 + \int_{\mathcal{X}_\infty}\Big(\Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2\Big)\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{X}_\infty}\Big(g_1\delta_2 + g_2\omega_1 + \Phi_1\omega_2 + \Phi_2\omega_1 + \frac{1}{2\pi i}\partial\Phi_1\bar{\partial}\Phi_2\Big).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar. □

2 Ausblick auf eine arithmetische Schnittheorie auf Hilbertschen Modulflächen

Einleitung. Im ersten Abschnitt wiederholen wir die arithmetische Schnittheorie von H. Gillet und C. Soulé. Von besonderem Interesse sind die arithmetischen Selbstschnittzahlen hermitescher Geradenbündel. Im zweiten und dritten Abschnitt fassen wir Ergebnisse der analytischen Theorie der Hilbertschen Modulflächen und der Hilbertschen Modulformen zusammen. Nach einer kurzen Übersicht über die Kronecker Grenzformel im vierten Abschnit, definieren wir im folgenden Abschnitt mit Hilfe dieser Formel die singuläre Differentialform Λ_K und zeigen, daß der entsprechende Strom $[\Lambda_K]$ ein verallgemeinerter Greenscher Strom ist. Im sechsten Abschnitt stellen wir analytischen Ergebnisse bereit, die wir im Beweis des Hauptergebnisses des siebten Abschnittes, nämlich der expliziten Berechnung eines Sternproduktes, verwenden werden. Im achten Abschnitt untersuchen wir die auf die in der Hilbertschen Fläche eingebettete Modulkurve $X(1)$ eingeschränkte Differentialform Λ_K. Im letzten Abschnitt ordnen wir unsere analytischen Vorarbeiten in ein (vermutetes) arithmetisches Gesamtbild ein, womit wir dann die arithmetische Selbstschnittzahl des Modulformenbündels berechnen.

2.1 Übersicht über die höherdimensionale arithmetische Schnittheorie

2.1.1. Definition. Eine *arithmetische Varietät* $\mathcal{X}$ *(über* $\mathbb{Z}$*)* ist ein projektives, reguläres Schema $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, das flach über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist. Wir nehmen weiter an, daß $\mathcal{X}$ äquidimensional ist und setzen $d := \dim_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X})$, d.h. $\dim(\mathcal{X}) = d + 1$. Die zu $\mathcal{X}$ assoziierte komplexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}_\infty := \mathcal{X}(\mathbb{C})$ hat im Allgemeinen mehrere irreduzible Komponenten. Wir beachten, daß die komplexe Konjugation F_∞ auf $\mathcal{X}_\infty$ operiert.

An dieser Stelle bemerken wir, daß arithmetische Flächen 2-dimensionale arithmetische Varietäten sind. Desweiteren weisen wir daraufhin, daß wir im folgenden anstelle von arithmetischen Varietäten über $\mathbb{Z}$ allgemeiner auch arithmetische Varietäten über arithmetischen Ringen zulassen könnten (siehe [GS1], Seite 124).

2.1.2. Definitionen. – (a) Es bezeichne $A^{p,q}(\mathcal{X}_\infty)$ (resp. $D^{p,q}(\mathcal{X}_\infty)$) den Raum der glatten (p,q)-Formen (resp. (p,q)-Ströme) auf $\mathcal{X}_\infty$. Jedes $\eta \in A^{p,q}(\mathcal{X}_\infty)$ bestimmt einen Strom $[\eta] \in D^{p,q}(\mathcal{X}_\infty)$, dessen Anwendung auf ein $\alpha \in A^{d-p,d-q}(\mathcal{X}_\infty)$ durch $[\eta](\alpha) := \int_{\mathcal{X}_\infty} \eta \wedge \alpha$ gegeben ist . Weiter bezeichne $A^{p,p}(\mathcal{X})$ (resp. $D^{p,p}(\mathcal{X})$) den Raum der reellen (p,p)-Formen α (resp. (p,p)-Ströme α) auf $\mathcal{X}_\infty$, welche der Gleichung $F_\infty^* \alpha = (-1)^p \alpha$ genügen.

(b) Es sei $Z^p(\mathcal{X})$ die freie abelsche Gruppe erzeugt durch die p-kodimensionalen Zykeln $Z \subseteq \mathcal{X}$. Jeder irreduzible Zykel $Z \in Z^p(\mathcal{X})$ definiert vermöge Integration über den glatten Ort von $Z_\infty = Z(\mathbb{C})$ den *Dirac-Strom* $\delta_Z \in D^{p,p}(\mathcal{X})$; für beliebige Zykel $Z = \sum_j n_j Z_j$, wobei Z_j die irreduziblen Komponenten von Z seien, setzen wir $\delta_Z := \sum_j n_j \delta_{Z_j}$. Ein *Greenscher Strom* g_Z für einen Zykel $Z \in Z^p(\mathcal{X})$ ist ein Strom $g_Z \in D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$, welcher der Differentialgleichung

$$dd^c g_Z + \delta_Z = [\omega_Z]$$

mit einer glatten Form ω_Z genügt. Zu jedem Zykel $Z \in Z^p(\mathcal{X})$ existiert ein Greenscher Strom g_Z (siehe [GS1], Seite 106).

(c) Es bezeichne $\widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ die freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Paare (Z, g_Z), wobei $Z \in Z^p(\mathcal{X})$ und g_Z ein Greenscher Strom für Z ist. Indem man für ein $(p-1)$-kodimensionales, integrales Unterschema $W \subseteq \mathcal{X}$ den Funktionenkörper von W mit $k(W)$ bezeichnet, bestimmt jedes $f \in k(W)^*$ ein Paar

$$\widehat{\mathrm{div}}(f) = (\mathrm{div}(f), -\log|f|^2 \delta_W) \in \widehat{Z}^p(\mathcal{X}),$$

wobei $-\log|f|^2\delta_W \in D^{p-1,p-1}(\mathcal{X})$ denjenigen Strom bedeutet, der eine Differentialform auf den glatten Ort von $W_\infty = W(\mathbb{C})$ einschränkt und dort gegen $-\log|f|^2$ integriert. Damit bezeichne $\widehat{R}^p(\mathcal{X}) \subset \widehat{Z}^p(\mathcal{X})$ die freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Elemente $\widehat{\mathrm{div}}(f)$ ($f \in k(W)^*$, $W = (p-1)$-kodimensionales, integrales Unterschema von $\mathcal{X}$) und $(0, \partial(u) + \bar{\partial}(v))$, wobei $u \in D^{p-2,p-1}(\mathcal{X})$ und $v \in D^{p-1,p-2}(\mathcal{X})$ sind. Die *p-kodimensionale, arithmetische Chow-Gruppe* $\widehat{CH}^p(\mathcal{X})$ ist dann definiert als der Quotient

$$\widehat{CH}^p(\mathcal{X}) := \widehat{Z}^p(\mathcal{X}) \big/ \widehat{R}^p(\mathcal{X}).$$

Im folgenden bezeichne $[Z, g_Z]$ die Klasse von (Z, g_Z) in $\widehat{CH}^p(\mathcal{X})$.

2.1.3. Beispiele. – (a) Ein *hermitesches Geradenbündel* $\overline{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{X}$ ist ein Paar $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ über $\mathcal{X}$ und einer glatten, F_∞-invarianten, hermiteschen Metrik $\|\cdot\|$ auf dem induzierten holomorphen Geradenbündel $\mathcal{L}_\infty$ über $\mathcal{X}_\infty$. Zwei hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ heißen *isomorph*, wenn

$$\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1} = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}} \otimes \|\cdot\|_{\mathcal{M}}^{-1}) \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|)$$

gilt; hierbei ist $|\cdot|$ die Betragsmetrik auf $\mathbb{C}$. Die *arithmetische Picard-Gruppe* $\widehat{Pic}(\mathcal{X})$ von $\mathcal{X}$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln auf $\mathcal{X}$, wobei die Gruppenstruktur durch das Tensorprodukt gegeben ist. Die Abbildung

$$\widehat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^1(\mathcal{X}),$$

die die Klasse von $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ auf die Klasse $[\mathrm{div}(s), -\log\|s\|^2]$ (hierbei ist s ein nichttrivialer, rationaler Schnitt von $\mathcal{L}$) abbildet, ist ein Isomorphismus (siehe [SABK], Seite 67). Das Element $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) \in \widehat{CH}^1(\mathcal{X})$ wird die *erste arithmetische Chern-Klasse von* $\overline{\mathcal{L}}$ genannt. Man beachte in diesem Zusammenhang die Gleichung

$$dd^c(-\log\|s\|^2) + \delta_{\mathrm{div}(s)} = [c_1(\overline{\mathcal{L}})];$$

hierbei ist $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ die *erste Chern-Form von* $\overline{\mathcal{L}}$.

(b) Der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_E$ eines algebraischen Zahlkörpers $E/\mathbb{Q}$ bestimmt die arithmetische Varietät $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E$. Indem wir mit Σ die Menge aller Einbettungen $\sigma : E \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen, bestehen die Elemente von $\widehat{Z}^1(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E)$ aus Paaren (Z, g_Z), wobei der Divisor Z eine endliche Summe $\sum_j n_j \wp_j$ von Primidealen $\wp_j$ in $\mathcal{O}_E$ und g_Z eine endliche Menge $(g_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ von reellen Zahlen g_σ ist. $\widehat{R}^1(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E)$ wird erzeugt durch die Paare $((f), (-\log|\sigma(f)|)_{\sigma\in\Sigma})$, wobei $f \in E^*$ ist. Aufgrund der Produktformel von E ist die Abbildung

$$\widehat{\deg} : \widehat{CH}^1(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E) \longrightarrow \mathbb{R},$$

gegeben durch die Zuordnung

$$\widehat{\deg}\,([Z, g_Z]) = \sum_j n_j \cdot \#\,(\mathcal{O}_E/\wp_j\mathcal{O}_E) + \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\Sigma} g_\sigma,$$

ein Homomorphismus; im Spezialfall $E = \mathbb{Q}$, d.h. $\mathcal{O}_E = \mathbb{Z}$, ist die Abbildung $\widehat{\deg}$ sogar ein Isomorphismus (siehe [GS1], Seite 131).

2.1.4. Das arithmetische Schnittprodukt. Weiter beweist man nun das Bestehen eines arithmetischen Schnittproduktes

$$\widehat{CH}^p(\mathcal{X}) \times \widehat{CH}^q(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+q}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}};$$

hierbei ist $\widehat{CH}^{p+q}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} = \widehat{CH}^{p+q}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dieses läßt sich wie folgt beschreiben: Sind $[Z_1, g_{Z_1}] \in \widehat{CH}^p(\mathcal{X})$, $[Z_2, g_{Z_2}] \in \widehat{CH}^q(\mathcal{X})$, und schneiden sich die beiden Zykeln Z_1, Z_2 eigentlich, so ist das arithmetische Schnittprodukt gegeben durch die Klasse

$$[Z_1 \cdot Z_2, g_{Z_1} * g_{Z_2}] \in \widehat{CH}^{p+q}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}},$$

wobei $Z_1 \cdot Z_2$ das geometrische Schnittprodukt von Z_1 mit Z_2 (siehe [GS1], Seite 138) und

$$g_{Z_1} * g_{Z_2} := g_{Z_1} \wedge \delta_{Z_2} + \omega_{Z_1} \wedge g_{Z_2}$$

das Sternprodukt der Greenschen Ströme g_{Z_1}, g_{Z_2} bedeuten (siehe [GS1], Seite 112). Man beachte hierzu die Gleichung

$$dd^c\ (g_{Z_1} * g_{Z_2}) + \delta_{Z_1 \cdot Z_2} = [\omega_{Z_1} \wedge \omega_{Z_2}].$$

2.1.5. Theorem. *Die arithmetische Chow-Gruppe $\widehat{CH}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{p \geq 0} \widehat{CH}^p(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, versehen mit dem obigen arithmetischen Schnittprodukt, ist ein assoziativer, kommutativer, graduierter Ring mit Einselement.*

Beweis. Siehe [GS1], Seite 138. □

2.1.6. Funktorialitäten. Jeder Morphismus $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ von arithmetischen Varietäten $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ bestimmt einen Ringhomomorphismus (Pull-back)

$$f^* : \widehat{CH}^p(\mathcal{Y}) \longrightarrow \widehat{CH}^p(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$$

(siehe [GS1], Seite 158). Insbesondere gilt für hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}$ über $\mathcal{Y}$

$$f^* \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}}) = \widehat{c}_1(f^* \overline{\mathcal{L}}) \in \widehat{CH}^1(\mathcal{X});$$

dabei ist $f^* \overline{\mathcal{L}}$ das mit der zurückgezogenen Metrik versehene Geradenbündel $f^* \mathcal{L}$ (siehe [SABK], Seite 84). Ist $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ein eigentlicher, generisch glatter Morphismus zwischen arithmetischen Varietäten $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ von relativer Dimension $\dim(\mathcal{X}/\mathcal{Y}) = r$, dann existiert ein Gruppenhomomorphismus (Push-forward)

$$f_* : \widehat{CH}^p(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^{p-r}(\mathcal{Y})$$

(siehe [GS1], Seite 134). Schießlich erwähnen wir in diesem Zusammenhang das Bestehen einer Projektionsformel (siehe [GS1], Seite 134).

2.1.7. Arithmetische Selbstschnittzahl. Es seien $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ eine arithmetische Varietät über $\mathbb{Z}$, $\dim(\mathcal{X}) = d+1$ und $\overline{\mathcal{L}}$ ein hermitesches Geradenbündel auf $\mathcal{X}$. Dann ist die *arithmetische Selbstschnittzahl* $\overline{\mathcal{L}}^{d+1}$ von $\overline{\mathcal{L}}$ gegeben durch die reelle Zahl

$$\overline{\mathcal{L}}^{d+1} := \widehat{\deg}\left(\pi_*(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1})\right).$$

2.1.8. Bemerkung. Für arithmetisch ample Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}$, d.h. für hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ mit positiver Krümmung und positiver arithmetischer Selbstschnittzahl $\overline{\mathcal{L}}^{d+1}$, gilt für $n \gg 0$ die *arithmetische Hilbert-Samuel-Formel*

$$\log\#\left\{s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \,|\, \|s\|_{\sup} \leq 1\right\} \geq \frac{\overline{\mathcal{L}}^{d+1}}{(d+1)!}\, n^{d+1} + O(n^d \log n)$$

(siehe [SABK], Seite 163 oder [AB], Seite 2). Dieser Satz spielt eine bedeutende Rolle in Vojtas Beweis der Mordell-Vermutung und dem Beweis von Spziro-Ullmo-Zhang der Bogomolov-Vermutung über die Diskretheit gewisser Punkte auf abelschen Varietäten.

2.2 Hilbertsche Modulflächen über $\mathbb{C}$

2.2.1. Notationen. Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper. Weiter bezeichnen D_K die Diskriminante, $\mathcal{O}_K$ den Ring der ganzen Zahlen, $\mathfrak{d}_K$ die Differente, h_K die Klassenzahl, R_K den Regulator, $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion und $\zeta_K^*(s) = \pi^{-s} D_K^{s/2}\Gamma(s/2)^2\zeta_K(s)$ die vervollständigte Dedekindsche Zetafunktion von K. Mit $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{id, \sigma\}$ setzen wir für $a \in K$: $a^{(1)} = id(a), a^{(2)} = \sigma(a)$. Für eine reell-quadratische Zahl $a \in K$ bedeutet $a \gg 0$, daß a total positiv ist, d.h. daß sowohl $a^{(1)}$ als auch $a^{(2)}$ positiv sind. Der Einfachheit halber wird im folgenden meist $h_K = 1$ angenommen.

Wie im ersten Kapitel sei $\mathfrak{h}$ die obere Halbebene versehen mit der hyperbolischen Metrik. Auf dem Produkt $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ haben wir damit eine hyperbolische Metrik gegeben durch die Produktmetrik. Im folgenden fassen wir die für uns wichtigen Ergebnisse über Hilbertsche Modulflächen zusammen. Für Einzelheiten verweisen wir auf das Buch von Van der Geer [Ge].

2.2.2. Hilbertsche Modulflächen als Quotienten von $\mathfrak{h}^2$. Mit den obigen Bezeichnungen ist die *Hilbertsche Modulgruppe* Γ_K gegeben durch

$$\Gamma_K := \mathrm{PSL}_2(\mathcal{O}_K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\Big|\, a, b, c, d \in \mathcal{O}_K,\ ad - bc = 1 \right\} / \{\pm 1\}.$$

Vermöge gebrochen linearer Transformationen

$$z \mapsto \gamma(z) = \left(\frac{a^{(1)} z_1 + b^{(1)}}{c^{(1)} z_1 + d^{(1)}}, \frac{a^{(2)} z_2 + b^{(2)}}{c^{(2)} z_2 + d^{(2)}} \right), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{h}^2, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_K,$$

operiert Γ_K eigentlich diskontinuierlich auf $\mathfrak{h}^2$. Der Quotient $\Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$ heißt *Hilbertsche Modulfläche*. Für jeden Punkt $\xi \in \mathfrak{h}^2$ ist die Isotropiegruppe $\Gamma_{K,\xi} \subset \Gamma_K$ eine endliche zyklische Gruppe. Ein Punkt $\xi \in \mathfrak{h}^2$ heißt *elliptisch*, falls die Ordnung $|\Gamma_{K,\xi}|$ seiner Isotropiegruppe von eins verschieden ist; wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß unabhängig von der Wahl von K jeweils elliptische Fixpunkte der Ordnungen zwei und drei existieren. Die Wirkung von Γ_K läßt sich auf $\mathfrak{h}^2 \cup \mathbb{P}^1(K)$ ausdehnen, indem wir $\mathbb{P}^1(K)$ vermöge der Automorphismen $\{id, \sigma\}$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ eingebettet auffassen und die Zuordnung

$$x \mapsto \left(\frac{a^{(1)} x^{(1)} + b^{(1)}}{c^{(1)} x^{(1)} + d^{(1)}}, \frac{a^{(2)} x^{(2)} + b^{(2)}}{c^{(2)} x^{(2)} + d^{(2)}} \right)$$

betrachten; hierbei sind $x \in \mathbb{P}^1(K), x^{(1)} = id(x) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), x^{(2)} = \sigma(x) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_K$. Diese Aktion hat nur endlich viele Bahnen, deren Anzahl der Klassenzahl h_K von K entspricht. Die Elemente von $\Gamma_K \setminus \mathbb{P}^1(K)$ werden *Spitzen* genannt. Der Quotientenraum $\Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$ kann durch Hinzufügen dieser Spitzen kompaktifiziert werden. Der so erhaltene normale, komplexe Raum

$$X(\Gamma_K) := \Gamma_K \setminus \left(\mathfrak{h}^2 \cup \mathbb{P}^1(K) \right)$$

ist eine normale, projektive, algebraische Varietät über $\mathbb{C}$. Die endliche Menge der isolierten Singularitäten von $X(\Gamma_K)$ entspricht der Menge bestehend aus den Bahnen der elliptischen Punkte und den Spitzen. Wir nennen $X(\Gamma_K)$ die *Baily-Borel-Kompaktifizierung der Hilbertschen Modulfläche* $\Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$.

2.2.3. Desingularisierung der Spitzen. Es sei $S_\xi \in X(\Gamma_K)$ eine Spitze, die der Bahn eines $\xi \in \mathbb{P}^1(K)$ entspricht. Da eine Matrix $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ existiert, so daß $g(\xi) = \infty$ ist, können wir durch Ersetzen von Γ_K durch $g^{-1}\Gamma_K g$ annehmen, daß die Spitze S_ξ die Spitze S_∞ ist. Weiter sei

$$W_T := \{z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{h}^2 | \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2) > T\}.$$

Dann besteht für $T \gg 0$ die Einbettung

$$\Gamma_{K,\infty} \setminus W_T \hookrightarrow \Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2;$$

hierbei ist $\Gamma_{K,\infty} \subseteq \Gamma$ die Isotropiegruppe der Spitze S_∞. Um die Desingularisierung von $S_\infty \in X(\Gamma_K)$ zu beschreiben, genügt es daher, eine Auflösung der Singularität in $S_\infty \in \Gamma_{K,\infty} \setminus W_T \cup \{S_\infty\}$ zu kennen. Wir geben nun einige Eigenschaften der minimalen Desingularisierung

$$\tilde{\pi} : M \longrightarrow \Gamma_{K,\infty} \setminus W_T \cup \{S_\infty\},$$

welche zuerst von F. Hirzebruch konstruiert worden ist (siehe dazu z.B. [Ko], Seiten 54-57): Es existiert eine endliche, offene Überdeckung $\{M_j\}_{1 \le j \le d}$ von M derart, daß für die Karten $M_j \subseteq \mathbb{C}^2$ mit den lokalen Parametern (u_j, v_j) gilt:

(a) Das Urbild $\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty) \subseteq M$ der Spitze S_∞ ist ein d-Zykel von rationalen Kurven E_j, dessen Schnittmatrix negativ definit ist.

(b) Das Urbild $\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty) \subseteq M$ ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen in M und auf den Karten M_j gilt

$$\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty)\Big|_{M_j} = \{(u_j, v_j) \in M_j : \, u_j v_j = 0\}.$$

(c) Es existieren total-positive Zahlen $r_j \in K$ $(j = 1, ..., d)$ so, daß die Abbildung

$$\tilde{\pi}_j^{-1} : \Gamma_{K,\infty} \setminus W_T \longrightarrow M_j \setminus \{(u_j, v_j) \in M_j : \, u_j v_j = 0\},$$

welche durch den Koordinatenwechsel

$$2\pi i \cdot (z_1, z_2) = (\log u_j, \log v_j) \begin{pmatrix} r_{j-1}^{(1)} & r_{j-1}^{(2)} \\ r_j^{(1)} & r_j^{(2)} \end{pmatrix}$$

bestimmt wird, biholomorph ist.

2.2.4. Desingularisierung der elliptischen Fixpunkte. Es seien $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{h}^2$ ein elliptischer Fixpunkt, $n = |\Gamma_{K,\xi}|$ und $U_\xi \subseteq \mathfrak{h}^2$ eine genügend kleine Umgebung von ξ derart, daß die Einbettung

$$\Gamma_{K,\xi} \setminus U_\xi \hookrightarrow \Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$$

besteht. Durch den Koordinatenwechsel

$$t_j = \frac{z_j - \xi_j}{z_j - \bar{\xi}_j} \quad (j = 1, 2)$$

wird nun U_ξ in eine kleine Umgebung des Ursprungs von $\mathbb{C}^2$ und ξ in den Ursprung abgebildet. Die Wirkung von $\Gamma_{K,\xi}$ entspricht dann der Wirkung einer Gruppe G, die von einer primitiven n-ten Einheitswurzel ζ erzeugt wird. Diese operiert auf $\mathbb{C}^2$ durch $(t_1, t_2) \mapsto (\zeta t_1, \zeta^q t_2)$; hierbei ist q eine zu n teilerfremde natürliche Zahl. Wir geben nun einige Eigenschaften der minimalen Desingularisierung

$$\tilde{\pi} : M \longrightarrow G \setminus \mathbb{C}^2$$

(siehe hierzu z.B. [Ge], Seite 41-43): Es existiert eine endliche, offene Überdeckung $\{M_j\}_{1 \le j \le d}$ von M derart, daß für die Karten $M_j \subseteq \mathbb{C}^2$ mit den lokalen Parametern (u_j, v_j) gilt:

(a) Das Urbild $\tilde{\pi}^{-1}(\overline{0}) \subseteq M$ der Klasse des Ursprungs $\overline{0} \in G \setminus \mathbb{C}^2$ ist eine Kette von $d-1$ rationalen Kurven E_j, deren Schnittmatrix negativ definit ist.

(b) Das Urbild $\tilde{\pi}^{-1}(\overline{0}) \subseteq M$ ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen in M und auf den Karten M_j gilt

$$\tilde{\pi}^{-1}(\overline{0})\Big|_{M_j} = \begin{cases} \{(u_j, v_j) \in M_j : u_j v_j = 0\}, & falls \quad j \neq 1, d \\ \{(u_j, v_j) \in M_j : u_j = 0\}, & falls \quad j = 1 \\ \{(u_j, v_j) \in M_j : v_j = 0\}, & falls \quad j = d. \end{cases}$$

(c) Es existieren rationale Zahlen c_j, c'_j $(j = 1, ..., d)$ so, daß die Abbildung

$$\tilde{\pi}_j^{-1} : G \setminus \left(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\right) \longrightarrow M_j \setminus \{\tilde{\pi}^{-1}(\overline{0})\},$$

welche durch den Koordinatenwechsel

$$t_1^\lambda t_2^{\lambda'} = u_j^{\lambda c_{j-1} + \lambda' c'_{j-1}} v_j^{\lambda c_j + \lambda' c'_j} \quad (t_1^\lambda t_2^{\lambda'} \in \mathbb{C}[t_1, t_2]^G, \text{ wobei } \lambda + q\lambda' \equiv 0 \bmod n)$$

bestimmt wird, biholomorph ist.

2.2.5. Definition. Mit Hilfe der vorhergehenden Konstruktionen können sämtliche singulären Punkte der kompaktifizierten Hilbertschen Modulfläche $X(\Gamma_K)$ aufgelöst werden. Es bezeichne im folgenden

$$\tilde{\pi} : \widetilde{X(\Gamma_K)} \longrightarrow X(\Gamma_K)$$

die minimale Desingularisierung von $X(\Gamma_K)$. Wir nennen $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ die *desingularisierte Hilbertsche Modulfläche.*

2.3 Hilbertsche Modulformen über $\mathbb{C}$ und Petersson Metrik

2.3.1. Definitionen. Eine *Hilbertsche Modulform vom Gewicht* $k \in \mathbb{N}$ *(bezüglich* Γ_K*)* ist eine holomorphe Funktion $F : \mathfrak{h}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$F(\gamma(z)) = (c^{(1)}z_1 + d^{(1)})^k \cdot (c^{(2)}z_2 + d^{(2)})^k \cdot F(z_1, z_2) \quad \forall\, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_K.$$

Es bezeichne $M_k(\Gamma_K)$ den Vektorraum der Hilbertschen Modulformen vom Gewicht k (bezüglich Γ_K). Wir beachten, daß Hilbertsche Modulformen aufgrund des Köcherprinzips in den Spitzen holomorph sind. Jedes $F \in M_k(\Gamma_K)$ besitzt demnach eine Fourierentwicklung der Form

$$F(z_1, z_2) = a_0 + \sum_{\substack{\nu \in \mathfrak{d}_K^{-1} \\ \nu \gg 0}} a_\nu e^{2\pi i(\nu^{(1)}z_1 + \nu^{(2)}z_2)};$$

dabei ist $\mathfrak{d}_K^{-1}$ das inverse Ideal zur Differente $\mathfrak{d}_K$. Wir beachten, daß $\bigoplus_k M_k(\Gamma_K)$ ein kommutativer graduierter Ring ist.

2.3.2. Theorem. *Es existiert eine von* K *abhängige, natürliche Zahl* $n_K \in \mathbb{N}$, $6|n_K$, *derart, daß gilt:*

$$X(\Gamma_K) \cong \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n_K | k}} M_k(\Gamma_K) \right).$$

Beweis. Siehe [Ge], Seite 44, und [Ch], Seite 549. Die Präzisierung der Teilbarkeit an n_K, d.h. $6|n_K$, rührt daher, daß eine Hilbertsche Modulform $F \in M_k(\Gamma_K)$ an gewissen elliptischen Fixpunkten der Ordnungen zwei und drei verschwindet, falls $6 \nmid k$ gilt. $\square$

2.3.3. Das Modulformenbündel. Ist n_K wie in Theorem 2.3.2, so zeigt man für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $n_K | k$ die Existenz eines Geradenbündels $\mathfrak{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ über $X(\Gamma_K)$, welches die Isomorphie

$$M_k(\Gamma_K) \cong H^0\left(X(\Gamma_K), \mathfrak{M}_k(\Gamma_K)_\infty\right)$$

erfüllt. Wir nennen $\mathfrak{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ das *Modulformenbündel.* Es ist bekannt, daß auch

$$M_k(\Gamma_K) \cong H^0(\widetilde{X(\Gamma_K)}, \tilde{\pi}^* \mathfrak{M}_k(\Gamma_K)_\infty)$$

gilt. Damit setzen wir der Einfachheit halber

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty := \tilde{\pi}^* \mathfrak{M}_k(\Gamma_K)_\infty.$$

2.3.4. Die Petersson-Metrik. Die *Petersson-Metrik* $\|\cdot\|_{Pet}$ auf dem Modulformenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ ist definiert durch

$$\|F(z_1, z_2)\|^2_{Pet} := |F(z_1, z_2)|^2 \left((4\pi \mathrm{Im}\, z_1) \cdot (4\pi \mathrm{Im}\, z_2)\right)^k;$$

hierbei ist F ein rationaler Schnitt von $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$, d.h. $F(z)$ ist eine meromorphe Hilbertsche Modulform.

Diese Metrik ist nicht glatt; das folgende Lemma beschreibt die Art der Singularitäten der Petersson-Metrik.

2.3.5. Lemma. – (a) *Für alle Spitzen S_ξ hat die Petersson-Metrik entlang der Desingularisierungskurven E_ξ logarithmische Singularitäten.*

(b) *Für alle elliptischen Punkte P_ξ ist die Petersson-Metrik entlang der Desingularisierungskurven E_ξ stetig, aber nicht differenzierbar.*

Beweis. – (a) O.B.d.A. sei S_ξ die Spitze S_∞ und M_l eine Karte der Desingularisierung mit den lokalen Koordinaten (u_l, v_l). Aus dem Koordinatenwechsel

$$2\pi i \cdot (z_1, z_2) = (\log u_l, \log v_l) \begin{pmatrix} r^{(1)}_{l-1} & r^{(2)}_{l-1} \\ r^{(1)}_l & r^{(2)}_l \end{pmatrix}$$

folgt unmittelbar

$$-4\pi \mathrm{Im}\, z_j = r^{(j)}_{l-1} \log|u_l|^2 + r^{(j)}_l \log|v_l|^2 \qquad (j, l = 1, 2).$$

Die Petersson-Metrik besitzt damit in der Karte M_l der Desingularisierung der Spitze S_∞ die lokale Entwicklung

$$\|F(u_l,v_l)\|^2_{Pet} = |F(u_l,v_l)|^2 \left((r^{(1)}_{l-1}\log|u_l|^{-2} + r^{(1)}_l \log|v_l|^{-2})(r^{(2)}_{l-1}\log|u_l|^{-2} + r^{(2)}_l \log|v_l|^{-2}) \right)^k,$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Auf analoge Art zeigt man mit Hilfe der Beschreibung 2.2.4: Die Petersson-Metrik besitzt in einer Karte M_l der Desingularisierung eines elliptischen Fixpunktes P_ξ mit den lokalen Koordinaten (u_l,v_l) die lokale Entwicklung

$$\|F(u_l,v_l)\|^2_{Pet} = |F(u_l,v_l)|^2 \cdot \left(4\pi \mathrm{Im}\xi_1 \cdot 4\pi \mathrm{Im}\xi_2 \cdot \frac{(1-|u_l^{c_{l-1}} v_l^{c_l}|^{2/n}) \cdot (1-|u_l^{c'_{l-1}} v_l^{c'_l}|^{2/n})}{|(u_l^{c_{l-1}} v_l^{c_l})^{1/n} - 1|^2 \cdot |(u_l^{c'_{l-1}} v_l^{c'_l})^{1/n} - 1|^2} \right)^k.$$

□

2.3.6. Bemerkung. Die *erste Chern-Form* $c_1(\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty), \|\cdot\|_{Pet})$ des Modulformenbündels $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ versehen mit der Petersson-Metrik ist auf $\mathfrak{h}^2$ gegeben durch

$$c_1(\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty), \|\cdot\|_{Pet}) = k \cdot \omega$$

mit

$$\omega := \frac{1}{4\pi}\left(\frac{dx_1 dy_2}{y_1^2} + \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} \right).$$

Man zeigt, daß die Differentialform ω für alle Spitzen S_ξ und elliptischen Fixpunkte P_ξ entlang der Desingularisierungskurven E_ξ Singularitäten hat. Trotz dieser Singularitäten ist das Integral von ω^2 über $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ definiert; es ist nämlich wohlbekannt, daß

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \omega^2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathcal{F}(\Gamma_K)} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \cdot \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} = \zeta_K(-1) \tag{54}$$

gilt (siehe z.B. [Ge], Seite 59); hierbei bezeichnet $\mathcal{F}(\Gamma_K)$ einen Fundamentalbereich für die Wirkung von Γ_K auf $\mathfrak{h}^2$. Indem wir noch das Volumenelement

$$d\mu := 8\pi^2\omega^2 = \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \cdot \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2}$$

definieren, erhalten wir $\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) = 8\pi^2\zeta_K(-1)$.

2.3.7. Lemma. *Die Kohomologieklasse* $\mathrm{cl}(\mathrm{div}(F)) \in H^{1,1}(\widetilde{X(\Gamma_K)}, \mathbb{R})$ *des Divisors einer Hilbertschen Modulform* $F \in M_k(\Gamma_K)$ *ist gegeben durch* $k \cdot \mathrm{cl}(\omega)$, *wobei* $\mathrm{cl}(\omega)$ *die Kohomologieklasse der singulären Differentialform* ω *bezeichnet.*

Beweis. Die Aussage des Lemma ist wohlbekannt, mangels geeigneter Referenz geben wir eine Beweisskizze. Aufgrund eines Satzes von D. Mumford ([Mu], Seite 242) gilt die Behauptung für torsionsfreie Untergruppen von endlichem Index in Γ_K. Da $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ auf den exzeptionellen Kurven der Desingularisierung der elliptischen Fixpunkte und der Spitze trivial ist, folgt die Behauptung aus den bekannten Identitäten

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \mathrm{cl}(E_j) \wedge \omega = 0,$$

wobei $\mathrm{cl}(E_j)$ die Kohomologieklasse einer irreduziblen Komponente E_j der Desingularisierungskurven der elliptischen Fixpunkte und der Spitze ist. □

Aus der Formel (54) folgt nun unmittelbar

2.3.8. Korollar. *Die geometrische Selbstschnittzahl $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty^2$ des Modulformenbündels ist gegeben durch $k^2 \cdot \zeta_K(-1)$.*

2.4 Übersicht über die Kronecker-Grenzformel

Von jetzt an sei für den Rest dieses Kapitels die Klassenzahl h_K von K gleich eins. Es sei $E_K(z;s)$ die nicht-holomorphe Eisensteinreihe (für den Zahlkörper K), welche für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ wie folgt definiert ist:

$$E_K(z,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{K,\infty} \backslash \Gamma_K} \left(\mathrm{Im}(\gamma^{(1)}(z_1)) \cdot \mathrm{Im}(\gamma^{(2)}(z_2))\right)^s$$

(siehe z.B. [Ef], Seiten 41, 47). Diese Funktion ist als Funktion in z eine Γ_K-invariante Funktion, besitzt als Funktion in s eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, hat einen Pol in $s = 1$ mit einem Residuum, welches von z unabhängig ist, und ist eine Eigenfunktion zum Eigenwert $s(s-1)$ der hyperbolischen Laplace-Operatoren

$$\triangle_j = y_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right) \quad (j = 1, 2).$$

Die Fourierentwicklung von $E_K(z,s)$ ist gegeben durch

$$E_K(z,s) = (y_1 \cdot y_2)^s + \phi(s)\,(y_1 \cdot y_2)^{1-s} +$$
$$\frac{2^2}{\zeta_K^*(2s)} \sum_{\substack{l \in \mathfrak{d}_K^{-1} \\ l \neq 0}} (\mathrm{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(l\mathfrak{d}_K))^{s-1/2} \sigma_{1-2s}^K(l\mathfrak{d}_K) \prod_{j=1}^{2} y_j^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi |l^{(j)}| y_j) e^{2\pi i\, l^{(j)} x_j};$$

dabei sind $K_{s-1/2}(x)$ eine K-Besselfunktion, die ganz in s und für große x exponentiell klein in x ist, $\sigma_s^K(a) = \sum_{(b)|(a)} (\mathrm{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(b))^s$ $(a, b \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\})$ und

$$\phi(s) = \frac{\zeta_K^*(2s-1)}{\zeta_K^*(2s)} = \frac{\alpha_{-1}}{s-1} + \alpha_0 + O(s-1)$$

(siehe z.B. [Za2], Seite 432). Hieraus folgt schließlich die *Kronecker-Grenzformel*:

Die nicht-holomorphe Eisensteinreihe $E_K(z, s)$ hat in $s = 1$ die Laurententwicklung

$$E_K(z, s) = \frac{\alpha_{-1}}{s-1} - \alpha_{-1} \log(y_1 \cdot y_2) + \alpha_0 + H(z) + O(s-1),$$

wobei die reell-analytische Funktion $H(z)$ gegeben ist durch

$$H(z) = y_1 \cdot y_2 + \frac{1}{\zeta_K^*(2)} \sum_{\substack{l \in \mathfrak{d}_K^{-1} \\ l \neq 0}} \sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)\, e^{-2\pi(|l^{(1)}|y_1 + |l^{(2)}|y_2)}\, e^{2\pi i(l^{(1)}x_1 + l^{(2)}x_2)};$$

weiter ist $H(z)$ eine Eigenfunktion der hyperbolischen Laplace-Operatoren mit Eigenwert 0, d.h. $\triangle_j H(z) = 0 \quad (j = 1, 2)$ (siehe z.B. [As], Seiten 204-207).

Die beiden folgenden Lemmata werden wir im Verlauf der vorliegenden Arbeit benötigen.

2.4.1. Lemma. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen gilt:*

$$\alpha_{-1} = \frac{R_K \sqrt{D_K}}{4\pi^2 \zeta_K(-1)}.$$

Beweis. Unter Verwendung der analytischen Klassenzahlformel (siehe z.B. [FT], Seite 284)

$$\lim_{s \to 1} ((s-1) \cdot \zeta_K(2s-1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 \cdot 1 \cdot R_K \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{D_K}},$$

erhalten wir $\mathrm{Res}_{s=1} \zeta_K^*(2s-1) = \lim_{s \to 1} ((s-1) \cdot \zeta_K^*(2s-1)) = R_K$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Gleichheit

$$\zeta_K^*(2) = \zeta_K^*(-1) = \frac{4\pi^2}{\sqrt{D_K}} \zeta_K(-1).$$

□

2.4.2. Lemma. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen gilt:*

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_{-1}} = \frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{R_K} - \log(16\pi^2) + \log(D_K) - 2\gamma + 4 + 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)},$$

wobei $\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)$ *der konstante Term der Laurententwicklung von* $\zeta_K^*(2s-1)$ *in* $s=1$ *und* γ *die Eulersche Konstante ist.*

Beweis. Aus der Laurententwicklung von $\phi(s)$ folgt unmittelbar

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_{-1}} = \lim_{s\to1}\left(\frac{d\log\left((s-1)\phi(s)\right)}{ds}\right) = \lim_{s\to1}\left(\frac{d\log\left((s-1)\zeta_K^*(2s-1)\right)}{ds} - \frac{d\log\left(\zeta_K^*(2s)\right)}{ds}\right) =$$
$$\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)} - \lim_{s\to1}\left(\frac{d\log\left(\zeta_K^*(2s)\right)}{ds}\right).$$

Mit der Identität $\zeta_K^*(2s) = \zeta_K^*(1-2s) = \pi^{2s-1}D_K^{1/2-s}\Gamma(1/2-s)^2\zeta_K(1-2s)$ zerlegen wir den rechten Term und erhalten dafür:

$$\lim_{s\to1}\left(\frac{d\log\left(\pi^{2s-1}\right)}{ds} + \frac{d\log\left(D_K^{1/2-s}\right)}{ds} + \frac{d\log\left(\Gamma(1/2-s)^2\right)}{ds} + \frac{d\log\left(\zeta_K(1-2s)\right)}{ds}\right) =$$
$$2\log(\pi) - \log(D_K) + 2\gamma - 4 + 4\log(2) - 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

2.5 Definition der singulären Differentialform Λ_K

2.5.1. Definitionen. Die Funktion $G_K(z) = G_K(z_1, z_2)$ ist definiert durch

$$G_K(z) := \frac{1}{\alpha_{-1}}\lim_{s\to1}\left(E_K(z,s) - \phi(s)\right).$$

Weiter setzen wir $\omega_K := \omega/\zeta_K(-1)$ und definieren damit die Differentialform $\Lambda_K(z)$ durch

$$\Lambda_K(z) := G_K(z)\,\omega_K.$$

2.5.2. Bemerkung. Es bestehen aufgrund der Kronecker-Grenzformel die Gleicheiten

$$\Lambda_K = \left(-\log(y_1\cdot y_2) + \frac{1}{\alpha_{-1}}\cdot H(z_1,z_2)\right)\omega_K = \Bigg(-\log(y_1\cdot y_2) + \frac{4\pi^2\zeta_K(-1)}{R_K\sqrt{D_K}}y_1\cdot y_2 +$$
$$\frac{1}{R_K}\sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq0}}\sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)\,e^{-2\pi(|l^{(1)}|y_1+|l^{(2)}|y_2)}\,e^{2\pi i(l^{(1)}x_1+l^{(2)}x_2)}\Bigg)\cdot\frac{1}{\zeta_K(-1)}\left(\frac{dx_1dy_1}{4\pi y_1^2} + \frac{dx_2dy_2}{4\pi y_2^2}\right),$$

wobei wir in der letzten Formel die Identitäten aus 2.3.6 und 2.4.1 verwendet haben.

2.5.3. Proposition. *Die Differentialform $\Lambda_K(z)$ ist eine glatte, Γ_K-invariante Differentialform und erfüllt auf $\mathfrak{h}^2$ die Differentialgleichung*

$$dd^c\Lambda_K(z_1, z_2) = \omega_K \wedge \omega \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathfrak{h}^2.$$

Beweis. Eine elementare Rechnung zeigt

$$dd^c\Lambda_K(z_1, z_2) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Lambda_K(z_1, z_2)\, d\bar{z}_1 dz_1 + \frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\Lambda_K(z_1, z_2)\, d\bar{z}_2 dz_2\right).$$

Aufgrund der Kronecker-Grenzformel besteht weiter die Zerlegung

$$\Lambda_K = \left(-\log(y_1) - \log(y_2) + \frac{1}{\alpha_{-1}} \cdot H(z_1, z_2)\right)\omega_K.$$

Da die Funktion $H(z_1, z_2)$ auf $\mathfrak{h}^2$ reell-analytisch ist und die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} H(z_1, z_2) = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

erfüllt, folgt aus der elementaren Identität

$$\frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(-\log(y_j))\, d\bar{z}_j dz_j = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dx_j dy_j}{y_j^2} \qquad (j = 1, 2)$$

die Behauptung unmittelbar. □

2.5.4. Bemerkung. Da die Differentialform Λ_K Γ_K-invariant ist, steigt sie zu einer Differentialform, welche wir ebenfalls mit Λ_K bezeichnen, auf die Hilbertsche Modulfäche $\Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$ ab; die Fortsetzung von Λ_K auf $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ wird entlang der Desingularisierungskurven der Spitzen und der elliptischen Fixpunkte singulär.

2.5.5. Neue Koordinaten in der Spitze S_∞. Wir führen nun, wie in [Ef] ab Seite 51, neue Koordinaten in einer Umgebung der Spitze S_∞ ein: Wir lassen x_1, x_2 unverändert und ersetzen y_1, y_2 durch

$$Y_0 := y_1 \cdot y_2, \qquad Y_1 := \frac{\log y_1 - \log y_2}{4R_K}.$$

Mit diesen Koordinaten gilt dann (siehe [Ef], Seite 54)

$$d\mu = 8\pi^2\omega^2 = \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \cdot \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} = 2R_K \frac{dY_0}{Y_0^2} dY_1 dx_1 dx_2. \tag{55}$$

Ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_{K,\infty}$ auf $\mathfrak{h}^2$ ist in diesen Koordinaten gegeben durch die Ungleichungen

$$0 < Y_0 < \infty, \qquad -1/2 \leq Y_1 < 1/2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}_K};$$

dabei ist $\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}$ eine Fundamentalmasche des Gitters $\mathcal{O}_K$ in $\mathbb{R}^2$. Einen Fundamentalbereich $\mathcal{F}(\Gamma_K)$ für die Aktion von Γ_K auf $\mathfrak{h}^2$ erhält man, indem man zusätzlich zu den obigen Ungleichungen endlich viele Ungleichungen, welche Y_0 von unten beschränken, hinzufügt. Es bezeichne nun $\mathcal{F}_{Y_0\leq T}$ den an der Hyperfläche $Y_0 = T$ nach "oben" abgeschnittenen Fundamentalbereich. Für spätere Rechnungen benötigen wir das Volumenelement $d\sigma$ der durch $Y_0 = T$ beschriebenen Hyperfläche; dieses ist gegeben durch die Formel (siehe [Ef], Seite 54)

$$d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{T} 2R_K dY_1 dx_1 dx_2. \tag{56}$$

Für eine Funktion g ist die Ableitung in Normalenrichtung ν an diese Hyperfläche durch

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = \sqrt{2}T \frac{\partial g}{\partial Y_0} \tag{57}$$

gegeben (siehe [Ef], Seite 54).

2.5.6. Proposition. *Es sei f eine glatte Funktion auf $\widetilde{X(\Gamma_K)}$, die entlang der Desingularisierungskurven konstant ist. Dann gilt*

$$dd^c[\Lambda_K](f) + f(S_\infty) = [\omega_K \wedge \omega](f),$$

wobei $f(S_\infty)$ die Auswertung von f an (irgend)einem Punkt von $\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty)$ bedeutet, und $[\omega_K \wedge \omega], [\Lambda_K]$ die von $\omega_K \wedge \omega, \Lambda_K$ (resp.) induzierten Ströme auf $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ bezeichnen.

Beweis. Wir müssen

$$\left([\omega_K \wedge \omega] - dd^c[\Lambda_K]\right)(f) = \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} (f\omega_K \wedge \omega - \Lambda_K \wedge dd^c f)$$

berechnen. Dazu wählen wir eine genügend kleine ε-Umgebung U_ε von $\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty)$ so, daß $\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon := \widetilde{X(\Gamma_K)} \setminus U_\varepsilon$ bis auf eine Nullmenge dem abgeschnittenen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_{Y_0\leq T}$ entspricht. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} (f\omega_K \wedge \omega - \Lambda_K \wedge dd^c f) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (f\omega_K \wedge \omega - \Lambda_K \wedge dd^c f) \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} (f\omega_K \wedge \omega - \Lambda_K \wedge dd^c f).\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\triangle G_k = (\triangle_1 + \triangle_2) G_K = 2$ und einer elementaren Rechnung wie im Beweis von Proposition 2.5.3 erhalten wir die Gleichungen

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} (f\omega_K \wedge \omega - \Lambda_K \wedge dd^c f) = \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} (f\cdot\triangle G_K - G_K\cdot\triangle f) \frac{\omega_K \wedge \omega}{2} =$$
$$\frac{1}{16\pi^2\zeta_K(-1)} \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} (f\cdot\triangle G_K - G_K\cdot\triangle f)\, d\mu.$$

Mit Hilfe der Green'schen Integralformel ergibt sich

$$\frac{1}{16\pi^2\zeta_K(-1)}\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}}(f\cdot\triangle G_K-G_K\cdot\triangle f)\,d\mu=$$
$$\frac{1}{16\pi^2\zeta_K(-1)}\int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}}\int_{\substack{Y_0=T\\-1/2\leq Y_1<1/2}}\left(f\frac{\partial G_K}{\partial\nu}-G_K\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)d\sigma; \tag{58}$$

hierbei bemerken wir, daß nur das Integral über den Rand gegeben durch die Hyperfläche $Y_0=T$ übrigbleibt, da die übrigen Randintegrale sich gegenseitig aufheben. Aufgrund der Voraussetzungen an f und der Kronecker-Grenzformel bestehen für $Y_0\gg 0$ die Asymptotiken

$$f=f(S_\infty)+O(Y_0^{-\varepsilon'}),\qquad G_K=-\log Y_0+\frac{Y_0}{\alpha_{-1}}+O(Y_0^{-\varepsilon'})\qquad(\varepsilon'>0).$$

Wir erhalten damit unter Verwendung der Formeln (56),(57) für das Integral (58)

$$\frac{1}{16\pi^2\zeta_K(-1)}\int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}}\int_{\substack{Y_0=T\\-1/2\leq Y_1<1/2}}\left(f\frac{\partial G_K}{\partial\nu}-G_K\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)d\sigma=$$
$$\frac{4R_K\sqrt{D_K}}{16\pi^2\zeta_K(-1)}\Big[\left(f(S_\infty)+O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)\cdot\frac{\partial}{\partial Y_0}\left(-\log(Y_0)+\frac{Y_0}{\alpha_{-1}}+O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)+$$
$$\left(\log(Y_0)-\frac{Y_0}{\alpha_{-1}}+O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)\cdot\frac{\partial}{\partial Y_0}\left(f(S_\infty)+O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)\Big]\Big|_{Y_0=T}=$$
$$\frac{4R_K\sqrt{D_K}}{16\pi^2\zeta_K(-1)}\left(\frac{f(S_\infty)}{\alpha_{-1}}+O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)\Big|_{Y_0=T}=f(S_\infty)+O(T^{-\varepsilon'});$$

hierbei haben wir bei der letzten Gleichheit Lemma 2.4.1 verwendet. Die Behauptung folgt nun indem wir den Grenzwert für $T\to\infty$ bilden. □

2.6 Ein Integral über die singuläre Differentialform Λ_K

Die beiden folgendenen Lemmata entsprechen den Formeln (44) und (46) aus dem ersten Teil der Arbeit.

2.6.1. Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus 2.5.5 gilt*

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}}d\mu=\left(\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K))-\frac{2R_K\sqrt{D_K}}{T}\right).$$

Beweis. Unter Ausnutzung von Formel (55) erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} d\mu &= \int_{\mathcal{F}(\Gamma_K)} d\mu - \int_{\mathcal{F}_{Y_0 \geq T}} d\mu \\
&= \mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) - 2R_K \int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} dx_1 \cdot dx_2 \int_{-1/2\leq Y_1<1/2} dY_1 \int_T^\infty \frac{dY_0}{Y_0^2} \\
&= \mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) - 2R_K\sqrt{D_K}\cdot\frac{1}{T}.
\end{aligned}$$

. □

2.6.2. Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus 2.5.5 gilt für* $s \neq 0, 1$*:*

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} E_K(z,s) d\mu = 2R_K\sqrt{D_K}\left(\frac{T^{s-1}}{s-1} - \phi(s)\frac{T^{-s}}{s}\right).$$

Beweis. Da $E_K(z,s)$ eine Eigenfunktion der hyperbolischen Laplace-Operatoren ist, besteht die Formel

$$2\,s(s-1)\int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} E_K(z,s) d\mu = \int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} \triangle E_K(z,s)\cdot 1\, d\mu. \tag{59}$$

Damit wenden wir den Green'schen Integralsatz ($g \equiv 1$, $f = E_K(z,s)$) an und erhalten für das Integral rechter Hand

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} \triangle E_K(z,s)\cdot 1 d\mu = \int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} \int_{\substack{Y_0=T \\ -1/2\leq Y_1<1/2}} \frac{\partial E_K(z,s)}{\partial \nu} d\sigma.$$

Mit der Fourierentwicklung von $E_K(z,s)$ erhalten wir unter Verwendung von

$$\int_{\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} e^{2\pi i (l^{(1)}x_1 + l^{(2)}x_2)} dx_1 dx_2 = 0 \qquad \forall\, l \in \mathfrak{d}_K^{-1}, l \neq 0,$$

für das letztere Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} \int_{\substack{Y_0=T \\ -1/2\leq Y_1<1/2}} \frac{\partial E_K(z,s)}{\partial \nu} d\sigma = \int_{(x_1,x_2)\in\mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} \int_{\substack{Y_0=T \\ -1/2\leq Y_1<1/2}} \frac{\partial Y_0^s + \phi(s) Y_0^{1-s}}{\partial \nu} d\sigma = \\
&4R_K\sqrt{D_K} \int_{\substack{Y_0=T \\ -1/2\leq Y_1<1/2}} \frac{\partial Y_0^s + \phi(s) Y_0^{1-s}}{\partial Y_0} dY_1 = 4R_K\sqrt{D_K}\left(sT^{s-1} + (1-s)\phi(s)T^{-s}\right).
\end{aligned}$$

Zusammengenommen erhalten wir schließlich

$$2\,s(s-1)\int_{\mathcal{F}_{Y_0 \leq T}} E_K(z,s) d\mu = 4R_K\sqrt{D_K}\left(sT^{s-1} + (1-s)\phi(s)T^{-s}\right),$$

woraus nach Division durch $2\,s(s-1)$ das Lemma folgt. □

2.6.3. Proposition. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \Lambda_K \wedge \omega = -\frac{\alpha_0}{\alpha_{-1}} + \log T + O\left(\frac{\log T}{T}\right).$$

Beweis. Aus der Definition von Λ_K folgt die Gleichheit

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \Lambda_K \wedge \omega = \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} G_K\, \omega_K \wedge \omega = \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \lim_{s\to 1}\left(\frac{E_K(z,s)-\phi(s)}{\alpha_{-1}}\right)\frac{d\mu}{\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K))};$$

bei der letzten Gleichheit haben wir die Identität $\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) = 8\pi^2\zeta_K(-1)$ verwendet. Da die Residuen von $E_K(z,s)$ und $\phi(s)$ übereinstimmen und unabhängig von z sind, ist das Integral wohldefiniert. Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \lim_{s\to 1}\left(E_K(z,s)-\phi(s)\right)d\mu &= \lim_{s\to 1}\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \left(E_K(z,s)-\phi(s)\right)d\mu \\ &= \lim_{s\to 1}\left(\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} E_K(z,s)d\mu - \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \phi(s)d\mu\right). \qquad (60)\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Laurententwicklung der beiden letzten Integrale in (60). Nach Lemma 2.6.2 ist

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} E_K(z,s)d\mu = 2R_K\sqrt{D_K}\left(\frac{T^{s-1}}{s-1} - \phi(s)\frac{T^{-s}}{s}\right).$$

Damit ergibt sich unter Beachtung von

$$\phi(s) = \frac{\alpha_{-1}}{s-1} + \alpha_0 + O(s-1), \quad \frac{T^{s-1}}{s-1} = \frac{1}{s-1} + \log T + O(s-1)$$

und

$$\frac{T^{-s}}{s} = \frac{1}{T} - \left(\frac{\log T + 1}{T}\right)(s-1) + O((s-1)^2)$$

die Laurententwicklung

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} E_K(z,s)d\mu = 2R_K\sqrt{D_K}\left(1-\frac{\alpha_{-1}}{T}\right)\frac{1}{s-1} + \\ 2R_K\sqrt{D_K}\left(\log T + \frac{\alpha_{-1}-\alpha_0+\alpha_{-1}\log T}{T}\right) + O(s-1).\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit Lemma 2.6.1 für das zweite Integral die Laurententwicklung

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \phi(s)d\mu = \alpha_{-1}\left(\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) - \frac{2R_K\sqrt{D_K}}{T}\right)\frac{1}{s-1} + \\ \alpha_0\left(\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) - \frac{2R_K\sqrt{D_K}}{T}\right) + O(s-1).\end{aligned}$$

Subtrahieren der obigen Laurententwicklungen ergibt schließlich

$$\int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} E_K(z,s)d\mu - \int_{\mathcal{F}_{Y_0\leq T}} \phi(s)d\mu = \left(2R_K\sqrt{D_K} - \alpha_{-1}\cdot \mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K))\right)\frac{1}{s-1} -$$
$$\alpha_0 \cdot \mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) + 2R_K\sqrt{D_K}\cdot \log T + (\alpha_{-1} + \alpha_{-1}\log T)\frac{2R_K\sqrt{D_K}}{T} + O(s-1).$$

Da das Integral (60) keinen Pol hat, finden wir erneut die Formel

$$\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K)) = \frac{2R_K\sqrt{D_K}}{\alpha_{-1}} = 8\pi^2\zeta_K(-1). \tag{61}$$

Damit folgt schließlich die Behauptung nach Division durch $\alpha_{-1}\mathrm{Vol}_{d\mu}(\mathcal{F}(\Gamma_K))$ und Grenzübergang $s \to 1$. □

2.7 Erster Schritt zur Berechnung der arithmetischen Selbstschnittzahl

2.7.1. Definitionen. – (a) Es sei $F \in M_k(\Gamma_K)$ eine Hilbertsche Modulform, welche weder an der Spitze S_∞ noch an den elliptischen Fixpunkten verschwindet, d.h. der Divisor $\mathrm{div}(F)$ ist disjunkt zu den exzeptionellen Kurven der Desingularisierung von $X(\Gamma_K)$. Wir definieren dann den *verallgemeinerten Green'schen Strom zum Schnitt F von $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$* durch folgenden Strom auf $\widetilde{X(\Gamma_K)}$

$$g_F := -\log \|F\|^2_{Pet}.$$

Der Strom g_F genügt der Gleichung $dd^c g_F + \delta_{\mathrm{div}(F)} = k\cdot[\omega]$; dies zeigt man analog dem Beweis von Proposition 2.5.6 (siehe hierzu auch [Mu], Seite 242).

(b) Damit definieren wir nun das *erweiterte Sternprodukt* von g_F und dem Strom $[\Lambda_K]$ auf $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ durch

$$g_F * [\Lambda_K] := \Lambda_K \wedge \delta_{\mathrm{div}(F)} + g_F\,\omega_K \wedge \omega.$$

2.7.2. Theorem. *Es gelten die vorherigen Bezeichnungen. Das erweiterte Sternprodukt $g_F * [\Lambda_K]$ von g_F und $[\Lambda_K]$ ist wohldefiniert, und es gilt*

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} g_F * [\Lambda_K] = -\log|F(S_\infty)|^2 - k\left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{R_K} + \log(D_K) - 2\gamma + 3 + 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)}\right).$$

Beweis. Aufgrund der Definition gilt

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} g_F * [\Lambda_K] = \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \Lambda_K \wedge \delta_{\mathrm{div}(F)} + \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} g_F\, \omega_K \wedge \omega .$$

Das erste Integral ist wohldefiniert, da die Einschränkung von Λ_K auf den Divisor $\mathrm{div}(F)$ eine glatte Differentialform ist. Die Existenz des zweiten Integrals folgt aus der Tatsache, daß die Differentialform $\omega_K \wedge \omega$ in einer genügend kleinen Umgebung von $\mathrm{div}(F)$ glatt ist und daß das Integral über kleine Umgebungen der Desingularisierungskurven der Spitze S_∞ definiert ist, was mit Hilfe einer einfachen Rechnung mit den in 2.5.5 eingeführten Koordinaten folgt. Es sei nun U_ε eine genügend kleine ε-Umgebung von $\tilde{\pi}^{-1}(S_\infty)$, welche wie in Proposition 2.5.6 gewählt sei, und $\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon = \widetilde{X(\Gamma_K)} \setminus U_\varepsilon$. Mittels des Satzes von Stokes erhalten wir

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, \omega_K \wedge \omega = \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, dd^c \Lambda_K = \int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, d^c \Lambda_K - \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} dg_F \wedge d^c \Lambda_K . \quad (62)$$

Indem wir eine genügend kleine ε_1-Umgebung von $\mathrm{div}(F)$ wählen und $\widetilde{X(\Gamma_K)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} := \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon \setminus U_{\varepsilon_1}$ setzen, erhalten wir wiederum mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, \omega_K \wedge \omega = \int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, d^c \Lambda_K - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_{\varepsilon,\varepsilon_1}} dg_F \wedge d^c \Lambda_K =$$
$$\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, d^c \Lambda_K - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_{\varepsilon,\varepsilon_1}} d\Lambda_K \wedge d^c g_F =$$
$$\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F\, d^c \Lambda_K - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_{\varepsilon,\varepsilon_1}} \Lambda_K \wedge d^c g_F - \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_{\varepsilon,\varepsilon_1}} \Lambda_K \wedge dd^c g_F \right) =$$
$$\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (g_F\, d^c \Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) + k \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} \Lambda_K \wedge \omega - \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} \Lambda_K \wedge \delta_{\mathrm{div}(F)} .$$

Zusammengefaßt erhalten wir somit

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} g_F * [\Lambda_K] = \int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (g_F\, d^c \Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) + k \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} \Lambda_K \wedge \omega .$$

Für das Integral über den Rand $\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon$ von $\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon$ nutzen wir die Gleichheit (beachte U_ε ist wie in Proposition 2.5.6 gewählt)

$$\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (g_F\, d^c \Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) = \int_{(x_1,x_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}_K}} \int_{\substack{Y_0 = T \\ -1/2 \leq Y_1 < 1/2}} (g_F\, d^c \Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) .$$

Damit folgt unter Verwendung der Formel

$$\omega \wedge d^c\Big|_{Y_0=T} = \frac{R_K}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial Y_0}\Big|_{Y_0=T} dY_1 dx_1 dx_2$$

und der Asymptotiken für $Y_0 \gg 0$ ($\varepsilon' > 0$)

$$\begin{aligned} g_F &= -k\log(16\pi^2 Y_0) - \log|F(S_\infty)|^2 + O(Y_0^{-\varepsilon'}), \\ G_K &= -\log Y_0 + \frac{Y_0}{\alpha_{-1}} + O(Y_0^{-\varepsilon'}) \end{aligned}$$

für das gesuchte Randintegral

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (g_F\, d^c\Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) = \frac{R_K\sqrt{D_K}}{4\pi^2\zeta_K(-1)} \cdot \\ &\Big[\left(-k\log(16\pi^2 Y_0) - \log|F(S_\infty)|^2 + O(Y_0^{-\varepsilon'})\right) \cdot \frac{\partial}{\partial Y_0}\left(-\log Y_0 + \frac{Y_0}{\alpha_{-1}} + O(Y_0^{-\varepsilon'})\right) + \\ &\left(\log Y_0 - \frac{Y_0}{\alpha_{-1}} + O(Y_0^{-\varepsilon'})\right) \cdot \frac{\partial}{\partial Y_0}\left(-k\log(16\pi^2 Y_0) - \log|F(S_\infty)|^2 + O(Y_0^{-\varepsilon'})\right)\Big]\Big|_{Y_0=T} = \\ &\left(-k\log(16\pi^2 Y_0) - \log|F(S_\infty)|^2 + k + O\left(\frac{\log Y_0}{Y_0}\right)\right)\Big|_{Y_0=T} = \\ &-k\log(16\pi^2 T) - \log|F(S_\infty)|^2 + k + O\left(\frac{\log T}{T}\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir unter Verwendung von Proposition 2.6.3

$$\begin{aligned} &\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} g_F * [\Lambda_K] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} (g_F\, d^c\Lambda_K - \Lambda_K \wedge d^c g_F) + k\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}_\varepsilon} \Lambda_K \wedge \omega\right) = \\ &k - \log|F(S_\infty)|^2 + k \cdot \lim_{T\to\infty}\left(-\log(16\pi^2 T) + O\left(\frac{\log T}{T}\right) + \int_{\mathcal{F}_{Y_0\le T}} \Lambda_K \wedge \omega\right) = \\ &k - \log|F(S_\infty)|^2 + k \cdot \lim_{T\to\infty}\left(-\log(16\pi^2) - \log T - \frac{\alpha_0}{\alpha_{-1}} + \log T + O\left(\frac{\log T}{T}\right)\right). \end{aligned}$$

Indem wir den Grenzwert $T \to \infty$ bilden und Lemma 2.4.2 verwenden, erhalten wir die Behauptung. $\square$

2.8 Einbettung von Modulkurven in Hilbertsche Modulflächen

2.8.1. Die Einbettung $X(1) \hookrightarrow X(\Gamma_K)$. Es bezeichne im folgenden $\triangle := \{(\tau,\tau) | \tau \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}^2$ das Bild der Diagonaleinbettung von $\mathfrak{h}$ nach $\mathfrak{h}^2$. Für die Isotropiegruppe $\Gamma_{K,\triangle} \subseteq \Gamma_K$ der Diagonalen $\triangle$ besteht die Gleichheit $\Gamma_{K,\triangle} = \Gamma(1)$, wobei $\Gamma(1) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Die Wirkung von $\Gamma(1)$ auf $\mathfrak{h}$ ist mit der Wirkung von Γ_K auf $\mathfrak{h}^2$ verträglich. Somit erhalten wir eine Einbettung $\Gamma(1) \setminus \mathfrak{h} \hookrightarrow \Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$, und nach Kompaktifizierung ergeben sich daraus die Einbettungen

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X(\Gamma_K)} \arrow[d] \\ X(1) \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & X(\Gamma_K). \end{tikzcd} \tag{63}$$

2.8.2. Restriktion von Hilbertschen Modulformen. Die Restriktion einer Hilbertschen Modulform $F(z_1, z_2)$ vom Gewicht k auf die Diagonale $\triangle$ ist eine Modulform vom Gewicht $2k$ bezüglich der Modulgruppe $\Gamma(1)$. Weiter folgt aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{X(1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X(\Gamma_K)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X(1)} \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{I}_{X(1)}$ die Idealgarbe des Unterschemas $X(1) \subseteq X(\Gamma_K)$ bezeichnet, nach Tensorieren mit dem amplem Geradenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ für genügend große k $(n_K|k)$ die kurze exakte Sequenz

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow H^0(X(\Gamma_K), \mathcal{I}_{X(1)} \otimes \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty) \longrightarrow H^0(X(\Gamma_K), \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty) \longrightarrow \\ &H^0(X(1), \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty|_{X(1)}) \longrightarrow H^1(X(\Gamma_K), \mathcal{I}_{X(1)} \otimes \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty) = 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Gleichheit $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma(1))_\infty = \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty|_{X(1)}$ erhalten wir somit für genügend große k $(n_K|k)$ die Surjektion

$$M_k(\Gamma_K) \twoheadrightarrow M_{2k}(\Gamma(1)).$$

Weiter stellen wir fest, daß die Einschränkung der Petersson-Metrik auf dem Modulformenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ auf $X(1)$ mit der Petersson-Metrik auf $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma(1))_\infty$ übereinstimmt.

2.8.3. Die Restriktion der singulären Differentialform $\Lambda_K(z_1, z_2)$ auf die Diagonale $\triangle$ ist schließlich gegeben durch

$$\Lambda_K(\tau) := \frac{1}{\zeta_K(-1)} \cdot G_K(\tau,\tau) \cdot \frac{dx\,dy}{2\pi y^2};$$

hierbei ist $\tau = x + iy \in \mathfrak{h}$. Diese $\Gamma(1)$-invariante Differentialform ist nicht über $X(1)$ integrierbar, wie das folgende Lemma zeigt.

2.8.4. Lemma. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen gilt*

$$\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \Lambda_K(\tau) = \frac{1}{\zeta_K(-1)} \left(-\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(s)}{6R_K} + 4\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) - \frac{1}{3} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\zeta_K^*(-1)}{2\pi R_K} T + O\left(\frac{\log T}{T}\right)\right);$$

dabei ist $\mathcal{F}_{y\leq T}$ der bei $y = T$ nach oben abgeschnittene Standardfundamentalbereich für die Wirkung von $\Gamma(1)$ auf $\mathfrak{h}$.

Der Beweis dieses Lemma beruht auf dem nachfolgenden Theorem 2.8.5 und weiteren Ergebnissen des Artikels [Za2] von D. Zagier.

2.8.5. Theorem. *Es sei $F(\tau)$ eine stetige, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariante Funktion auf $\mathfrak{h}$ mit der Fourierentwicklung*

$$F(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e^{2\pi i n x} \qquad (\tau = x + iy \in \mathfrak{h}),$$

so daß für alle $N > 0$ und $y \gg 0$ die Asymptotik $F(\tau) = \varphi(y) + O(y^{-N})$ besteht, wobei

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{n_j!} y^{\alpha_j} \log^{n_j}(y) \qquad (n, n_j \in \mathbb{N};\ c_j, \alpha_j \in \mathbb{C})$$

ist. Dann gilt

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} F(\tau)\frac{dxdy}{y^2} = \mathrm{Res}_{s=1}\left(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\int_0^\infty (a_0(y) - \varphi(y))\, y^{s-2} dy\right) +$$

$$\mathrm{Res}_{s=1}\big(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\, h_{\varphi,T}(s)\big) + \mathrm{Res}_{s=1}\big(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s-1)\, h_{\varphi,T}(1-s)\big) + O(T^{-N-1});$$

dabei sind

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta_{\mathbb{Q}}(s),$$

$$h_{\varphi,T}(s) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{m=0}^{n_j} \frac{(-1)^{n_j-m}}{m!} \frac{T^{s+\alpha_j-1}}{(s+\alpha_j-1)^{n_j-m+1}} \log^m(T).$$

Beweis. Siehe [Za2], Seite 424, Formel (28). □

Beweis des Lemma. Definitionsgemäß besteht die Gleichheit

$$\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} \Lambda_K(\tau) = \frac{1}{2\pi\,\zeta_K(-1)} \int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} G_K(\tau,\tau)\frac{dxdy}{y^2}.$$

Es erweist sich als günstig, anstelle des Integrals über $G_K(\tau,\tau)$ das Integral über $F(\tau) := R_K \cdot G_K(\tau,\tau)$ zu untersuchen. Indem wir nämlich $E_K^*(\tau,s) := \zeta_K^*(2s)E_K(\tau,\tau,s)$ setzen, so erhalten wir mit Hilfe der Kronecker-Grenzformel (siehe 2.4) die Identität

$$F(\tau) = \lim_{s\to 1}(E_K^*(\tau,s) - \zeta_K^*(2s-1))$$

und somit

$$F(\tau) = \zeta_K^*(-1)\cdot y^2 - 2R_K \cdot \log y + \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0}} \sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)e^{-2\pi(|l^{(1)}|+|l^{(2)}|)y}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(l)x} =$$
$$\zeta_K^*(-1)\cdot y^2 - \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot \log y + \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0}} \sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)e^{-2\pi(|l^{(1)}|+|l^{(2)}|)y}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(l)x}.$$

Hieraus folgt, daß $F(\tau)$ die Voraussetzung des Theorems 2.8.5 erfüllt; mit den dortigen Bezeichnungen gilt insbesondere:

$$\varphi(y) = \zeta_K^*(-1)\cdot y^2 - \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot \log y,$$

d.h. es gilt $n = 2$ und weiter

$$n_1 = 0,\ \alpha_1 = 2,\ c_1 = \zeta_K^*(-1),$$
$$n_2 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ c_2 = -\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s);$$

somit ist

$$h_{\varphi,T}(s) = \zeta_K^*(-1)\frac{T^{s+1}}{s+1} - \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\left(\frac{-T^{s-1}}{(s-1)^2} + \frac{T^{s-1}}{s-1}\log T\right).$$

Weiter erhalten wir

$$a_0 = \varphi(y) + \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0,\,\mathrm{tr}(l)=0}} \sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)e^{-2\pi(|l^{(1)}|+|l^{(2)}|)y}.$$

Mit diesen Angaben bestimmen wir nun die in der Formel von Zagier

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} F(\tau)\frac{dxdy}{y^2} = \mathrm{Res}_{s=1}\left(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\int_0^\infty (a_0(y)-\varphi(y))\,y^{s-2}dy\right) +$$
$$\mathrm{Res}_{s=1}\left(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\,h_{\varphi,T}(s)\right) + \mathrm{Res}_{s=1}\left(\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s-1)\,h_{\varphi,T}(1-s)\right) + O(T^{-N-1}) \qquad (64)$$

auftretenden Residuen:

Zur Bestimmung der entsprechenden Laurententwicklung des Integrals rechter Hand ziehen wir folgende Identität von D. Zagier (siehe [Za2], Seite 433) heran:

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\int_0^\infty 2^2 y \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0,\,\mathrm{tr}(l)=0}} (\mathrm{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(l\mathfrak{d}_K))^{r-1/2}\sigma_{1-2r}^K(l\mathfrak{d}_K)\prod_{j=1}^2 K_{r-1/2}(2\pi|l^{(j)}|y)y^{s-2}dy =$$

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(s+2r-1)\zeta_{\mathbb{Q}}^*(s-2r+1)\zeta_K^*(s)\quad (r\in\mathbb{C}).$$

Damit erhalten wir wegen

$$a_0(y)-\varphi(y) = \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0,\,\mathrm{tr}(l)=0}} \sigma_{-1}^K(l\mathfrak{d}_K)e^{-2\pi(|l^{(1)}|+|l^{(2)}|)y} =$$

$$\lim_{r\to 1}\left(2^2 y \sum_{\substack{l\in\mathfrak{d}_K^{-1}\\ l\neq 0,\,\mathrm{tr}\,(l)=0}} (\mathrm{Nm}_{K/\mathbb{Q}}(l\mathfrak{d}_K))^{r-1/2}\sigma_{1-2r}^K(l\mathfrak{d}_K)\prod_{j=1}^2 K_{r-1/2}(2\pi|l^{(j)}|y)\right)$$

nach Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)\int_0^\infty (a_0(y)-\varphi(y))\,y^{s-2}dy = \zeta_{\mathbb{Q}}^*(s+1)\zeta_{\mathbb{Q}}^*(s-1)\zeta_K^*(s) = -\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot$$

$$\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{\pi}{6}\Big(\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\Big(1-\log(4\pi)-12\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\Big)-\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(s)\Big)\frac{1}{s-1}+O(1). \tag{65}$$

Weiter erhalten wir für den zweiten bzw. dritten Summanden die Laurententwicklungen

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s)h_{\varphi,T}(s) = \frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{\pi}{6}\cdot\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot$$

$$\Big(-2+\log(4\pi)+24\,\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+\gamma\Big)\frac{1}{s-1}+O(1), \tag{66}$$

bzw.

$$\zeta_{\mathbb{Q}}^*(2s-1)h_{\varphi,T}(1-s) = \left(\frac{\zeta_K^*(-1)}{2}\cdot T+\frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)}{2}\cdot\frac{1+\log T}{T}\right)\frac{1}{s-1}+O(1). \tag{67}$$

Mit Hilfe der Laurententwicklungen (65) bis (67) erhalten wir somit für (64)

$$\int_{\mathcal{F}_{y\leq T}} F(\tau)\frac{dxdy}{y^2} = \frac{\pi}{3}\Big(\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\Big(-1+12\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)+\gamma\Big)-\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(s)\Big)+$$

$$\zeta_K^*(-1)\,T+\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K^*(s)\cdot\frac{1+\log T}{T}+O(T^{-N-1}). \tag{68}$$

Da $F(\tau) = R_K\cdot G_K(\tau,\tau)$ ist, folgt die Behauptung, indem wir Gleichung (68) durch $2\pi\cdot R_K\cdot\zeta_K(-1)$ dividieren. □

2.9 Epilog

2.9.1. Hilbertsche Modulflächen als Moduläume. Wir erinnern an die Annahme, daß die Klassenzahl h_K von K Eins ist. Es ist bekannt, daß die Punkte von $\Gamma_K \setminus \mathfrak{h}^2$ Isomorphieklassen von abelschen Flächen A mit reeller Multiplikation durch $\mathcal{O}_K$ entsprechen (für mehr Einzelheiten siehe [Pa], Seite 46). Man zeigt nun, daß das Modulproblem "Isomorphieklassen von abelschen Flächen mit reeller Multiplikation durch $\mathcal{O}_K$" durch einen regulären Stack $\mathfrak{X}_K$, der flach und von relativer Dimension 2 über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist, repräsentiert wird (siehe [Pa], Seite 47; beachte auch [Ch], [Rap]). Auf $\mathfrak{X}_K$ existiert ein Geradenbündel $\mathfrak{M}_k(\Gamma_K)$, dessen globale Schnitte Hilbertschen Modulformen mit *ganzzahligen* Fourierkoeffizienten entsprechen (q-Entwicklungsprinzip); wir bezeichnen den entsprechenden $\mathbb{Z}$-Modul mit $M_k(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$. Vermöge

$$X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}} := \operatorname{Proj}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n_K|k}} M_k(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}\right)$$

erhalten wir die minimale Kompaktifizierung des entsprechenden groben Modulraums. $X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ ist ein zusammenhängendes, normales, projektives Schema, das flach über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist (siehe [Ch], Seite 549). Wir beachten, daß die Isomorphie

$$X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \cong X(\Gamma_K)$$

besteht. Wir bemerken an dieser Stelle, daß reguläre Überlagerungen von $X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ existieren (siehe [Pa], Seite 49).

2.9.2. Annahme A1.

(A1) $\widetilde{X(\Gamma_K)}$ *besitze ein projektives, reguläres Modell* $\mathcal{X}(\Gamma_K)$, *das flach über* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *ist;* $\pi_K : \mathcal{X}(\Gamma_K) \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *bezeichne den Strukturmorphismus. Weiter sei* $\mathcal{X}(\Gamma_K)$ *eine Desingularisierung von* $X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$; $\tilde{\pi}_{\mathbb{Z}} : \mathcal{X}(\Gamma_K) \longrightarrow X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ *sei der entsprechende Morphismus.*

Damit definieren wir das Geradenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)$ durch $\tilde{\pi}_{\mathbb{Z}}^*\,\mathfrak{M}_k(\Gamma_K)$. Unter Berücksichtigung der Gleichheit $\mathcal{M}_k(\Gamma_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathcal{M}_k(\Gamma_K)_\infty$ setzen wir

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K) := (\mathcal{M}_k(\Gamma_K), \|\cdot\|_{Pet}).$$

Wir beachten, daß das Geradenbündel $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)$ entlang der exzeptionellen Divisoren der Desingularisierung $\tilde{\pi}_{\mathbb{Z}}$ trivial ist.

2.9.3. Folgerung aus A1. Indem wir eine Hilbertsche Modulform vom Gewicht k mit ganzzahligen Koeffizienten auf die Diagonale einschränken, erhalten wir eine elliptische Modulform vom Gewicht $2k$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten. Da $6|n_K$ gilt, erhalten wir einen Morphismus

$$f_{\mathbb{Z}} : \mathcal{X}(1) = \operatorname{Proj}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ 12|k}} M_{2k}(\Gamma(1))_{\mathbb{Z}}\right) \longrightarrow \operatorname{Proj}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n_K|k}} M_{k}(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}\right) = X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}},$$

welcher über die Desingularisierung $\mathcal{X}(\Gamma_K)$ von $X(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ faktorisiert, d.h. wir erhalten einen Morphismus

$$f : \mathcal{X}(1) \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma_K).$$

Wir beachten, daß konstruktionsgemäß $f^*(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)) = \overline{\mathcal{M}}_{2k}(\Gamma(1))$ gilt.

2.9.4. Annahme A2. Gemäß Annahme (A1) haben wir auf der arithmetischen Varietät $\mathcal{X}(\Gamma_K)$ das hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)$. Ist s ein rationaler Schnitt von $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)$, so ist aufgrund der logarithmischen Singularitäten der Petersson-Metrik in den elliptischen Fixpunkten und in der Spitze das Paar $(\operatorname{div}(s), -\log\|s\|^2_{Pet}) \notin \widehat{Z}^1(\mathcal{X}(\Gamma_K))$. Deshalb treffen wir die folgende weitere Annahme:

(A2) *Es existieren erweiterte, arithmetische Chow-Gruppen* $\widehat{CH}^p_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ *derart, daß* $\widehat{CH}_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))_{\mathbb{Q}} := \bigoplus_{p\geq 0}\widehat{CH}^p_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *ein kommutativer, assoziativer Ring mit Einselement ist, der* $\widehat{CH}(\mathcal{X}(\Gamma_K))_{\mathbb{Q}}$ *als Unterring enthält, und derart, daß die üblichen funktoriellen Eigenschaften gelten. Das Paar* $(\operatorname{div}(s), -\log\|s\|^2_{Pet})$ *definiere ein Element in* $\widehat{CH}^1_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$, *das mit* $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))$ *bezeichnet und erste verallgemeinerte arithmetische Chern-Klasse genannt wird.*

Die Elemente von $\widehat{CH}^p_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ sind $\widehat{R}^p(\mathcal{X}(\Gamma_K))$-Äquivalenzklassen von Paaren (Z, g_Z), wobei $Z \in Z^p(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ und g_Z ein *verallgemeinerter Green'scher Strom* ist, d.h. g_Z erfüllt die Differentialgleichung

$$dd^c g_Z + \mu_Z = \omega_Z,$$

wobei ω_Z eine logarithmisch singuläre Differentialform und μ_Z eine leichte Verallgemeinerung des Dirac-Stromes ist, welche der Bedingung $\operatorname{cl}(\omega_Z) = \operatorname{cl}(\mu_Z) = \operatorname{cl}(Z) \in H^{p,p}(\mathcal{X}(\Gamma_K), \mathbb{R})$ genügen. Das *verallgemeinerte, arithmetische Schnittprodukt* zweier Klassen $[Z_1, g_{Z_1}] \in$

$\widehat{CH}^p_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$, $[Z_2, g_{Z_2}] \in \widehat{CH}^q_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ ist im Fall eines eigentlichen Durchschnittes gegeben durch die Klasse

$$[Z_1 \cdot Z_2, g_{Z_1} * g_{Z_2}] \in \widehat{CH}^{p+q}_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))_{\mathbb{Q}},$$

wobei $Z_1 \cdot Z_2$ das übliche geometrische Schnittprodukt von Z_1 mit Z_2 bedeutet und der verallgemeinerte Greensche Strom $g_{Z_1} * g_{Z_2}$ wie üblich der Gleichung

$$dd^c(g_{Z_1} * g_{Z_2}) + \mu_{Z_1 \cdot Z_2} = \omega_{Z_1} \wedge \omega_{Z_2}$$

genügt. Insbesondere ist eine *verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl*

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 := \widehat{\deg}\left(\pi_{K*}\left(\widehat{c}_1\left(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)\right)^3\right)\right) \in \mathbb{R}$$

von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)$ definiert.

2.9.5. Bemerkungen zu A2. – (a) Die im ersten Kapitel konstruierte Schnittpaarung liefert im absolut 2-dimensionalen Fall ein Beispiel für die Plausibilität der Annahme (A2).

(b) Der Strom $[\Lambda_K]$ zur singulären Differentialform Λ_K (siehe Definition 2.5.1) ist ein verallgemeinerter Green'scher Strom; die Definition des erweiterten Sternproduktes befindet sich in 2.7.1.

2.9.6. Die Annahme A3.

(A3) *Es existiere ein $k \in \mathbb{N}$, so daß das Quadrat der ersten verallgemeinerten arithmetischen Chernklasse $\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))^2 \in \widehat{CH}^2_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ sich durch ein Paar (P, g_P) repräsentieren lasse, wobei $P_\infty = P(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot S_{i\infty}$ mit $S_{i\infty} \in X(1) \subset \widetilde{X(\Gamma_K)}$ ist und der verallgemeinerte Green'sche Strom g_P durch die Gleichung*

$$g_P \equiv [\Lambda_P + \alpha] \mod (\mathrm{Im}\partial + \mathrm{Im}\bar{\partial})$$

charakterisiert ist; hierbei sind $\Lambda_P = \mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot \Lambda_K$ (siehe Definition 2.5.1) und $\alpha \in A^{1,1}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$ eine geschlossene Form.

2.9.7. Bemerkungen zu A3. Unter der Annahme (A1) und der wohlbekannten Vermutung, daß $\left|\mathrm{Kern}\left(\deg : \mathrm{CH}^2(\mathcal{X}(\Gamma_K)_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{Z}\right)\right| < \infty$ gilt (siehe [Ram], Seite 363), folgt (A3) aus der Wohldefiniertheit des Sternproduktes in $\widehat{CH}^*_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K))$.

2.9.8. Proposition. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen und unter den Annahmen (A1),(A2) und (A3) besteht für geeignete $F \in M_k(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ die Gleichheit*

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 = \sum_{p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p - k^2 \zeta_K(-1) \log|F(S_{i\infty})| - \frac{k^3}{2}\zeta_K(-1) \cdot \\ \left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{R_K} + \log(D_K) - 2\gamma + 3 + 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)} \right) + \frac{k}{2} \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \omega \wedge \alpha,$$

wobei $\sum_{p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p$ der geometrische Anteil der verallgemeinerten arithmetischen Selbstschnittzahl von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)$ ist, der von der Wahl von F abhängt.

Beweis. Aufgrund der Annahmen (A1), (A2) folgt die Existenz der verallgemeinerten arithmetischen Selbstschnittzahl $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3$. Zur Berechnung von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3$ wählen wir nun eine Hilbertsche Modulform $F \in M_k(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$, deren Divisor $\operatorname{div}(F)$ generisch disjunkt zu den Desingularisierungskurven der elliptischen Fixpunkte und der Spitze ist. Damit gilt aufgrund der Annahmen (A1), (A2) und (A3)

$$\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))^3 = \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)) \cdot \widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))^2 = [\operatorname{div}(F), -\log\|F\|^2_{Pet}] \cdot [P, g_P] = \\ [\operatorname{div}(F) \cdot P, g_F * [\Lambda_P + \alpha]] = [\operatorname{div}(F) \cdot P, \mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot (g_F * [\Lambda_K]) + k\,[\omega \wedge \alpha]].$$

Anwenden von $\pi_{K*} : \widehat{CH}^3_{erw.}(\mathcal{X}(\Gamma_K)) \longrightarrow \widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$ und $\widehat{\deg} : \widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ liefert

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 &= \widehat{\deg}\left(\pi_{K*}\left(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))^3\right)\right) \\ &= \sum_{p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p + \frac{1}{2}\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \left(\mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot (g_F * [\Lambda_K]) + k\,\omega \wedge \alpha\right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Theorem 2.7.2 folgt somit

$$\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 = \sum_{p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot \Big[-\log|F(S_{i\infty})|^2 - \\ k\left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{R_K} + \log(D_K) - 2\gamma + 3 + 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)} \right) \Big] + \frac{k}{2}\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \omega \wedge \alpha,$$

woraus wegen $\mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty = k^2\zeta_K(-1)$ die Behauptung folgt. □

2.9.9. Die Annahmen A4 und A5. In obiger Proposition (unter den Annahmen (A1), (A2) und (A3)) ist bei der Berechnung von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3$ die Bestimmung von α problematisch. Wir treffen deshalb folgende weitere Annahmen:

(A4) *Die geschlossene* $(1,1)$*-Form* α *sei orthogonal zu den Kohomologieklassen der irreduziblen Komponenten* E_j *der Desingularisierungskurven.*

(A5) *Es existieren ein* $k \in \mathbb{N}$ *und eine Hilbertsche Modulform* $\Theta_K \in M_k(\Gamma_K)$ *mit der Eigenschaft*

$$\operatorname{div}(\Theta_K) = n\,X(1) + \sum_j n_j E_j,$$

wobei die Multiplizitäten $n = n(\Theta_K)$, $n_j = n_j(\Theta_K)$ *von* Θ_K *abhängen;* E_j *sind die irreduziblen Komponenten der Desingularisierungskurven der Spitze bzw. der elliptischen Fixpunkte aus 2.2.3 bzw. 2.2.4.*

2.9.10. Bemerkungen zu A4 und A5. – (a) Die Annahme (A4) bringt zum Ausdruck, daß die arithmetische Selbstschnittzahl $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3$ nicht von der Wahl der Desingularisierung von $X(\Gamma_K)$ abhängen sollte.

(b) Die Annahme (A5) ist für gewisse reell-quadratische Zahlkörper bekannt. So existiert zum Beispiel für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ eine Hilbertsche Modulform $\Theta_K \in M_5(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ mit $\operatorname{div}(\Theta_K) = X(1) + \sum_j n_j E_j$ (siehe z.B. [Gu], Seite 237).

2.9.11. Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.3.7 und unter der Annahme (A5) besteht in* $H^{1,1}(\widetilde{X(\Gamma_K)},\mathbb{R})$ *die Formel*

$$\operatorname{cl}(X(1)) + \sum_j \frac{n_j}{n}\operatorname{cl}(E_j) = \frac{1}{6\cdot\zeta_K(-1)}\cdot\operatorname{cl}(\omega).$$

Beweis. Aufgrund des Lemma 2.3.7 besteht in $H^{1,1}(\widetilde{X(\Gamma_K)},\mathbb{R})$ die Gleichheit

$$\operatorname{cl}\left(n\,X(1) + \sum_j n_j E_j\right) = \operatorname{cl}(\operatorname{div}(\Theta_K)) = k\cdot\operatorname{cl}(\omega),$$

d.h.

$$\operatorname{cl}\left(X(1) + \sum_j \frac{n_j}{n} E_j\right) = \frac{k}{n}\cdot\operatorname{cl}(\omega).$$

Damit ergeben sich für alle natürlichen l die Gleichheiten

$$\frac{l}{6} = \deg_{X(1)}(\mathcal{M}_l(\Gamma_K)_\infty) = \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \operatorname{cl}(X(1))\wedge l\cdot\omega =$$

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \operatorname{cl}\left(X(1) + \sum_j \frac{n_j}{n}E_j\right)\wedge l\cdot\omega = \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \frac{k}{n}\cdot\omega\wedge l\cdot\omega = \frac{l\,k}{n}\cdot\zeta_K(-1),$$

woraus durch Vergleich $k/n = 1/(6\,\zeta_K(-1))$ und somit die Behauptung folgt. □

2.9.12. Annahme A6. Im Verlauf des nachfolgenden Lemma benötigen wir eine rationale K_1-Kette, welche den Nullzykel $S_{i\infty} \in X(1)$ vom Divisor $X(1) \subset \widetilde{X(\Gamma_K)}$ generisch trennt. Die Existenz einer solchen wird durch das Moving-Lemma für K_1-Ketten (siehe [SABK], Seite 61) garantiert. Der Übersichtlichkeit der Darstellung wegen treffen wir die folgende Annahme:

(A6) *Es existieren ein irreduzibles Unterschema $C \subset \mathcal{X}(\Gamma_K)$ mit $\dim(C) = 2$ und eine rationale Funktion $h \in k(C)^*$ mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt*

$$(P + \operatorname{div}(h)) \cap f(\mathcal{X}(1))$$

leer ist.

2.9.13. Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus Proposition 2.9.8, unter den Annahmen (A1)-(A6) und unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß*

$$\int_{X(1)} f^* \left[\Lambda_K(z) - \frac{\log |h(z)|^2 \delta_{C_\infty}}{k^2 \zeta_K(-1)} \right] = \lim_{T \to \infty} \left(\int_{\mathcal{F}_{y \leq T}} \Lambda_K(\tau) - \frac{2\pi T}{R_K \sqrt{D_K}} \right)$$

gilt, ist das Integral in Proposition 2.9.8 gegeben durch

$$\int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \omega \wedge \alpha = k^2 \zeta_K(-1) \left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1} \zeta_K^*(s)}{R_K} - 2\gamma + 24 \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) \right).$$

Beweis. Aufgrund der Annahmen (A1), (A2) genügt der erweiterte arithmetische Chow-Ring den üblichen Funktorialitäten; wir werden den Pull-back bezüglich des Morphismus $f : \mathcal{X}(1) \longrightarrow \mathcal{X}(\Gamma_K)$ und den Push-forward bezüglich des Morphismus $\pi : \mathcal{X}(1) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ verwenden. Aufgrund von Lemma 2.9.11 und der Annahme (A4) gilt somit

$$\begin{gathered} \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \omega \wedge \alpha = 6 \cdot \zeta_K(-1) \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \mathrm{cl} \left(X(1) + \sum_j \frac{n_j}{n} E_j \right) \wedge \alpha = 6 \cdot \zeta_K(-1) \cdot \\ \int_{\widetilde{X(\Gamma_K)}} \mathrm{cl}\,(X(1)) \wedge \alpha = 6 \cdot \zeta_K(-1) \int_{X(1)} f^* \alpha = 12 \cdot \zeta_K(-1) \cdot \widehat{\deg}\,(\pi_*(f^*[0, [\alpha]])) . \end{gathered} \tag{69}$$

Weiter erhalten wir unter nochmaliger Verwendung der Annahme (A4)

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(\pi_*(f^*[0, [\alpha]])) &= \widehat{\deg}(\pi_*(f^*(\widehat{c}_1(\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K))^2 - [P, [\Lambda_P]]))) \\ &= \overline{\mathcal{M}}_{2k}(\Gamma(1))^2 - \widehat{\deg}(\pi_*(f^*[P, [\Lambda_P]])). \end{aligned} \tag{70}$$

Die verallgemeinerte arithmetische Selbstschnittzahl $\overline{\mathcal{M}}_{2k}(\Gamma(1))^2$ wurde in Theorem 1.6.1 berechnet zu

$$\overline{\mathcal{M}}_{2k}(\Gamma(1))^2 = (2k)^2 \left(\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) \right). \tag{71}$$

Zur Bestimmung der verbleibenden Größe $\widehat{\deg}(\pi_*(f^*[P,[\Lambda_P]]))$ verwenden wir für die Klasse $[P,[\Lambda_P]]$ den Repräsentanten $(P+\mathrm{div}(h), [\Lambda_P - \log|h|^2\delta_{C_\infty}])$ mit der rationalen Funktion h aus Annahme (A6); dies hat den Vorteil, daß das Pull-back $f^*(P+\mathrm{div}(h)) = 0$ ist und daß das Pull-back $f^*[\Lambda_P - \log|h|^2\delta_{C_\infty}]$ auf $X(1)$ integrierbar ist. Damit erhalten wir aufgrund der zusätzlichen Voraussetzung und Lemma 2.8.4 die Gleichheiten

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}\left(\pi_*\left(f^*\left[P,[\Lambda_P]\right]\right)\right) &= \widehat{\deg}(\pi_*(f^*[P+\mathrm{div}(h), [\Lambda_P - \log|h|^2\delta_{C_\infty}]])) \\
&= \widehat{\deg}\left(\pi_*\left(f^*\left[P+\mathrm{div}(h), [\mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot \Lambda_K - \log|h|^2\delta_{C_\infty}]\right]\right)\right) \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_{X(1)} f^*\left[\mathcal{M}_k(\Gamma_K)^2_\infty \cdot \Lambda_K(z) - \log|h(z)|^2\delta_{C_\infty}\right] \\
&= \frac{k^2}{2}\zeta_K(-1)\cdot \lim_{T\to\infty}\left(\int_{\mathcal{F}_{y\le T}} \Lambda_K(\tau) - \frac{2\pi T}{R_K\sqrt{D_K}}\right) \\
&= \frac{k^2}{2}\left(-\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta^*_K(s)}{6R_K} + 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{3} + \frac{\gamma}{3}\right).
\end{aligned} \tag{72}$$

Einsetzen von (71) und (72) in (70) ergibt

$$\widehat{\deg}(\pi_*(f^*[0,[\alpha]])) = \frac{k^2}{12}\left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta^*_K(s)}{R_K} - 2\gamma + 24\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right). \tag{73}$$

Die Behauptung folgt schließlich nach Einsetzen von (73) in (69). □

2.9.14. Korollar. *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen, unter den Annahmen (A1)-(A6) und unter der zusätzlichen Voraussetzung aus Lemma 2.9.13 besteht für geeignete $F \in M_k(\Gamma_K)_{\mathbb{Z}}$ die Gleichheit*

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 &= \sum_{p\in\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} n_p \log p - k^2\zeta_K(-1)\log|F(S_{i\infty})| - \\
&\quad k^3\left(\zeta'_K(-1) + \zeta_K(-1)\left(\frac{\log(D_K)+3}{2} - 12\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei $\sum_{p\in\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} n_p \log p$ der geometrische Anteil der verallgemeinerten arithmetischen Selbstschnittzahl von $\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)$ ist, der von der Wahl von F abhängt.

Beweis. Durch Einsetzen des Resultats von Lemma 2.9.13 in dasjenige von Proposition

2.9.8 erhalten wir die Behauptung unter Beachtung von $\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1) = \mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(s)$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}}_k(\Gamma_K)^3 &= \sum_{p\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p - k^2\zeta_K(-1)\log|F(S_{i\infty})| - \frac{k^3}{2}\zeta_K(-1)\cdot \\
&\quad \left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(2s-1)}{R_K} + \log(D_K) - 2\gamma + 3 + 2\frac{\zeta_K'(-1)}{\zeta_K(-1)}\right) + \\
&\quad \frac{k^3}{2}\zeta_K(-1)\left(\frac{\mathrm{CT}_{s=1}\zeta_K^*(s)}{R_K} - 2\gamma + 24\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right) \\
&= \sum_{p\in\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} n_p \log p - k^2\zeta_K(-1)\log|F(S_{i\infty})| - \\
&\quad k^3\left(\zeta_K'(-1) + \zeta_K(-1)\left(\frac{\log(D_K)+3}{2} - 12\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1)\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Literatur

[AB] *A. Abbes, T. Bouche:* Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”. Ann. Inst. Fourier **45**, No.2, 375-401 (1995).

[AU] *A. Abbes, E. Ullmo:* Auto-intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$. J. Reine Angew. Math. **484**, 1-70 (1997).

[Ar] *S.J. Arakelov:* Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. Math. USSR, Izv. **8**, 1167-1180 (1976); Translation from Izv., Ser. Math. **38**, 1179-1192 (1974).

[As] *T. Asai:* On a certain function analogous to $\log \eta(z)$. Nagoya Math. J. **40**, 193-211 (1970).

[Bo] *J.-B. Bost:* Intersection theory on arithmetic surfaces and L_1^2 metrics. Brief vom 6. März 1998.

[Bo1] *J.-B. Bost:* Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces. Preprint, IHES/M/98/07.

[Bo2] *J.-B. Bost:* Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties. From number theory to physics, ed. M. Waldschmidt. Springer-Verlag (1992).

[Bo3] *J.-B. Bost:* Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties. Duke Math. J. **82**, 21-70 (1996).

[BGS] *J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé:* Heights of projective varieties and positive Green forms. J. Am. Math. Soc. **7**, 903-1027 (1994).

[BMMB] *J.-B. Bost, J.-F. Mestre, L. Moret-Bailly:* Sur le calcul explicite des “classes de Chern” des surfaces arithmetiques de genre 2. Les pinceaux des courbes elliptiques. Astérisque **183**, 69-105 (1990).

[Bu] *J.I. Burgos:* Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology. J. Algebr. Geom. **6**, 335-377 (1997).

[CaMa] *J. Cassaigne, V. Maillot:* Hauteurs des hypersurfaces et fonctions zêta d'Igusa. Preprint, LMENS-94-5 (1994).

[Ch] *C.-L. Chai:* Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli spaces. Ann. Math. **131**, 541-554 (1990) .

[CS] *G. Cornell, J.H. Silverman (ed.):* Arithmetic Geometry. Springer-Verlag (1986).

[De] *P. Deligne:* Le déterminant de la cohomologie. Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Contemporary Math. **67**, 93-178 (1987).

[De2] *P. Deligne:* Intersections sur les surfaces régulières, Expose X. SGA 7 II, Lecture Notes Math. **340**, 1-38 (1973).

[DeRa] *P. Deligne, M. Rapoport:* Les schémas de modules de courbes elliptiques. Modular Functions of One Variable II. Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972. Lecture Notes Math. **349**, 143-316 (1973).

[Ef] *I. Effrat:* The Selberg trace formula for $PSL_2(\mathbf{R})^n$. Memoir AMS **359** (1987).

[EGAII] *A. Grothendieck:* Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Publ. Math. IHES **8** (1961).

[Fa] *G. Faltings:* Calculus on arithmetic surfaces. Ann. Math. **119**, 387-424 (1984).

[FT] *A. Fröhlich, M. J. Taylor:* Algebraic number theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **27**. Cambridge University Press (1994).

[Ge] *G. Van der Geer:* Hilbert modular surfaces. Springer-Verlag (1980).

[Gu] *K. Gundlach:* Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Math. Ann. **152**, 226-256 (1963).

[GS1] *H. Gillet, C. Soulé:* Arithmetic intersection theory. Publ. Math. IHES **72**, 94-174 (1990).

[Ha] *R. Hartshorne:* Algebraic Geometry. Springer-Verlag (1993).

[Ko] *R. Kobayashi:* Einstein-Kähler metrics on open algebraic surfaces of general type. Tôhôku Math. Journ. **37**, 43-77 (1985).

[KR] *K. Köhler, D. Roessler:* A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. Preprint, IHES/M/98/76.

[Kü] *U. Kühn:* Generalized arithmetic intersection numbers. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I **327**, 283-288 (1998).

[Ku] *S. Kudla:* Central derivatives of Eisenstein series and height pairings. Ann. Math., **146**, 545-646 (1997).

[La] *S. Lang:* Introduction to Arakelov Theory. Springer-Verlag (1988).

[Li] *Lichtenbaum:* Desingularization of two-dimensional schemes. Ann. Math. **107**, 151-207 (1978).

[Ma] *V. Maillot:* Un calcul de Schubert arithmétique. Duke Math. J. **80**, 195-221 (1995).

[Ma1] *V. Maillot:* Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. Preprint alg-geom/**9706005** (1997).

[Mo] *A. Moriwaki:* Intersection pairing for arithmetic cycles with degenerate Green currents. Preprint alg-geom/**9803054** (1998).

[MB] *L. Moret-Bailly:* Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques. Les pinceaux de courbes elliptiques. Astérisque **183**, 37-58 (1990).

[Mu] *D. Mumford:* Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. Invent. Math. **42**, 239-272 (1977).

[MU] *P. Michel, E. Ullmo:* Points de petite hauteur sur les corbes modulaires $X_0(N)$. Invent. Math. **131**, 645-674 (1998).

[Pa] *G. Pappas:* Arithmetic models for Hilbert modular varieties. Comp. Math. **98**, 43-76 (1995).

[Ram] *D. Ramakrishnan:* Arithmetic of Hilbert-Blumenthal surfaces. Number theory, Proc. Conf., Montreal 1985. CMS Conf. Proc. **7**, 285-370 (1987).

[Rap] *M. Rapoport:* Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. Comp. Math. **36**, 255-335 (1978).

[Ro] *D. Rohrlich:* A modular version of Jensen's formula. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **95**, 15-20 (1984).

[Se] *J.-P. Serre:* A course in arithmetic. Springer-Verlag (1978).

[Se2] *J.-P. Serre:* Lectures on the Mordell-Weil theorem. Aspects of Math. E **15**, Vieweg (1997).

[Sh] *G. Shimura:* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton University Press (1971).

[So1] *C. Soulé:* Géométrie d'Arakelov des surfaces arithmétiques. Séminaire Bourbaki 713. Astérisque **177-178**, 327-343 (1989).

[So2] *C. Soulé:* Hermitian vectorbundles on arithmetic varieties. Proc. Symp. Pure Math. **62.I**, 383-419 (1997).

[SABK] *C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol, J. Kramer:* Lectures on Arakelov Geometry. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **33**. Cambridge University Press (1992).

[Ta] *H. Tamvakis:* Schubert Calculus on the arithmetic Grassmanian. To appear in Duke Math. J.

[Ta1] *H. Tamvakis:* Arithmetic intersection theory on flag varieties. To appear in Math. Ann.; Preprint alg-geom/**9611006** (1996).

[Za1] *D. Zagier:* Introduction to modular forms. From number theory to physics, ed. M. Waldschmidt. Springer-Verlag (1992).

[Za2] *D. Zagier:* The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay. J. Fac. Sci, Univ. Tokyo, Sect. I A **28**, 415-437 (1981).

Tabellarischer Lebenslauf von Ulfhart Kühn

10.05.1969	Geburt in Köln
1975-1979	Besuch der Grundschule in Reutlingen
1979-1988	Besuch des Gymnasiums in Reutlingen
WS 1988/89	Beginn des Studienganges Diplomphysik an der FAU Erlangen
25.11.1991	Vordiplom in Physik
WS 1991/92	Wechsel in den Studiengang Diplommathematik
07.07.92	Vordiplom in Mathematik
WS 1993/94	Auslandsemester an der ETH Zürich
17.02.1995	Diplom in Mathematik an der FAU Erlangen
SS 1995	Begin der Promotion in Mathematik an der HU Berlin
1.1.96-1.2.99	Stipendiat des Graduiertenkollegs 'Geometrie und Nichtlineare Analysis' der HU Berlin

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe.

Ich erkläre, daß ich die Arbeit erstmalig und nur an der Humboldt-Universität zu Berlin eingereicht habe und mich nicht anderwärts um einen Doktorgrad beworben habe. In dem Promotionsfach besitze ich keinen Doktorgrad.

Der Inhalt der dem Verfahren zugrundeliegenden Promotionsordnung ist mir bekannt.