Universität Hamburg

Department Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Ulf Kühn

Algebra 2 Wintersemester 2009/10 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1 (6 Punkte):
a) Zeigen Sie: Ist $A \to B$ ein Ringhomomorphismus so ist B ein A-Modul.

b) Zeigen Sie: Jeder Modul ist ein $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 1.2 (2 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

a) Das direkte Produkt von Ringen $\prod_{i\in I} R_i$ ist wieder ein Ring.

b) Die direkte Summe von Ringen $\bigoplus_{i\in I} R_i$ ist wieder ein Ring.

Aufgabe 1.3 (8 Punkte):
Beweisen Sie die Noetherschen Isomorphiesätze.

a) Sei $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$

b) Seien $N, N' \subset M$ Untermoduln, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $(N + N')/N \cong N'/(N \cap N')$.

c) Sind $N' \subset N \subset M$ Untermoduln, so ist $(M/N')/(N/N') \cong M/N$.

d) Rechnen sie obige Aussagen a)-c) für $N' = 6\mathbb{Z}$, $N = 3\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}$ nach.

Aufgabe 1.4 (3 Punkte):
Bestimmen Sie:

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.5 (3 Punkte):
Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Weiter sei A_1 das von $1 + \sqrt{-5}$ und 2 erzeugte Ideal in R und A_2 das von 2 erzeugte Ideal.

Berechnen Sie die R-Moduln $A_1 + A_2$, A_1A_1 und A_1A_2. Welcher dieser Moduln ist frei?

Aufgabe 1.6$*$ Zeige: Ist K ein Körper, so entsprechen $K[x]$-Moduln M genau den K-Vektorräumen V versehen mit einen $\phi \in \operatorname{End}(V)$. Tip: Die Multiplikation von $\sum a_i x^i$ auf M entspricht dabei der Anwendung des Endomorphismus $\sum a_i \phi^i$ auf V.

Aufgabe 2.1 (8 Punkte):
Sei $(*) :\ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.

a) Man sagt $(*)$ spaltet, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen i)-iii) gilt:

i) Es gibt ein $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ mit $g \circ \phi = \mathrm{id}$ ("g hat einen Schnitt").

ii) Es gibt ein $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ mit $\psi \circ f = \mathrm{id}$ ("f hat eine Retraktion").

iii) Es gibt einen Isomorphismus $h : M \to M' \oplus M''$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0\ , \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota_1"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

hierbei sei ι_1 die natürliche Injektion und pr_2 die Projektion auf die zweite Komponente. Zeigen Sie, daß i) -iii) äquivalent sind.

b) Zeige falls $(*)$ spaltet, dann gibt es Isomorphismen $M \cong \mathrm{im}\, f \oplus \ker \psi$ und $M \cong \ker g \oplus \mathrm{im}\, \phi$.

Aufgabe 2.2 (4+2+2* Punkte):

Sei $(*)$: $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Zeigen Sie:

a) Für jeden A-Modul F ist auch die Sequenz (" Tensorieren mit $F \otimes_A$ -")

$$F \otimes_A M' \xrightarrow{f} F \otimes_A M \xrightarrow{g} F \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

exakt.

b) Falls $(*)$ spaltet, dann ist für jeden A-Modul F ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow F \otimes_A M' \xrightarrow{f} F \otimes_A M \xrightarrow{g} F \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

exakt.

c*). Was ändert sich falls wir $(*)$ mit $- \otimes_A F$ tensorieren.

Aufgabe 2.3 (8 Punkte):

Sei A ein Ring und P ein A-Modul. Man nennt P einen projektiver Modul, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

i) Sind $f \in \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ und $g \in \mathrm{Hom}_A(M, M'')$ gegeben, wobei g surjektiv sei, dann existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ii) Jede exakte Sequenz $0 \to M' \to M'' \to P \to 0$ spaltet.

iii) Es gibt einen A-Modul M, sodaß $P \oplus M$ ein freier Modul ist.

iv) Der Funktor $M \to \mathrm{Hom}_A(P, M)$ ist exakt.

Zeigen Sie, daß i) -iv) äquivalent sind.

Aufgabe 2.4 (6 Punkte):
Ein Modul M heißt flach, falls das Tensorieren mit $- \otimes_A M$ kurze exakte Sequenzen erhält. Zeigen oder widerlegen sie die Aussagen:

a) Projektive Moduln sind flach.

b) Flache Moduln sind projektiv.

c) Freie Moduln sind projektiv.

d) Flache Moduln sind frei.

Aufgabe 2.5 (6 Punkte):
Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Weiter sei A_1 das von $1 + \sqrt{-5}$ und 2 erzeugte Ideal in R und A_2 das von 2 erzeugte Ideal.

Welcher der R-Moduln A_1, A_2, A_1A_1 und A_1A_2 ist frei, projektiv, bzw. flach?

Aufgabe 2.6$*$

i) Beweisen Sie den chinesischen Restsatz.

ii) Überprüfen Sie die Rechenregeln des Tensorprodukts.

iii) Zeige, dass Hauptidealringe faktoriell sind.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte):
a) Sei A ein Integritätsbereich und $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge. Zeigen sie: Die Zuordnungen

$$\mathfrak{q} \to \mathfrak{q}S^{-1} \text{ und } \mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q} \cap A$$

sind zueindander inverse 1-1-Korrespondenzen zwischen den Primidealen $\mathfrak{q} \subseteq A \setminus S$ von A und den Primidealen $\mathfrak{Q}$ von AS^{-1}.

b) Sei A ein Integritätsbereich und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeige der Ring $S^{-1}A$ mit $S = A \setminus \mathfrak{p}$ ist ein diskreter Bewertungsring genau dann wenn $\mathfrak{p}$ maximal ist.

Aufgabe 3.2 (2 Punkte):
Sei R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K, d.h. $K = S^{-1}R$ mit $S = R \setminus \{0\}$. Zeige: Ist M ein endlich erzeuger R-Modul, so ist $S^{-1}M \cong K^n$, wobei n der Rang von $M/T(M)$ ist.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte):
Sei N der von $(4, 5, 6)$ und $(9, 8, 7)$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^3$.

a) Finde die Elementarteiler von N.

b) Setze $M = \mathbb{Z}^3/N$. Bestimme den Rang von $M/T(M)$ und die Ordnung von $T(M)$.

Aufgabe 3.4 (4+2* Punkte):
Ein direkter Summand eines R-Modul M ist ein Untermodul N von M, so daß es einen Untermodul N' von M mit $M = N \oplus N'$ gibt.

a) Sei $(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Zeige, daß $\mathbb{Z}(n,m)$ genau dann ein direkter Summand des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^2$ ist, wenn $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$.

b) Gibt es zwei Untermoduln M_1, M_2 von $\mathbb{Z}^2$, so daß M_1 und M_2 direkte Summanden von $\mathbb{Z}^2$ sind, aber $M_1 + M_2$ kein direkter Summand ist.

c*) Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Ist das Ideal $(2, 1 + \sqrt{-5}) \subset R$ ist ein direkter Summand von R^2?

Aufgabe 3.5∗
a) Zeige: $S^{-1}A$ ist ein Ring und $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}A$-Modul.

b) Zeige: Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist ein Primideal genau dann wenn $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist.

c) Zeige: Alle maximalen Ideale sind prim.

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)
a) Geben Sie ein Beispiel einer kurzen exakten Folge

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

von abelschen Gruppen an, die nicht zerfällt.

b) Können Sie ein Beispiel für a) angeben, so dass A frei ist bzw. B frei ist bzw. C frei ist?

c) Gibt es ein Beispiel für a), in dem sogar zwei der drei Moduln frei sind, oder alle drei? In welchen Fällen können Sie zeigen, dass es kein solches Beispiel geben kann?

Aufgabe 4.2 (2+2+3 Punkte)
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten den Körper $k(T)$ der rationalen Funktionen in einer Variablen (Bemerkung: Dieser ist gerade der Körper der rationalen Funktionen auf der affinen Geraden $\mathbb{A}^1$).

a) Gegeben ein Element $a \in k$, so sei $\mathcal{O}_a$ der Unterring von $k(T)$ aller Brüche f/g mit $f, g \in k[T]$ und $g(a) \neq 0$. Zeige: $\mathcal{O}_a$ ist ein diskreter Bewertungsring und bestimme eine Uniformisierende.

b) Ist auch $\mathcal{O}_\infty = \{f/g | f, g \in k[T] \text{ mit } \deg f \leq \deg g\}$ ist ein diskreter Bewertungsring und ist $1/X$ eine Uniformisierende für $\mathcal{O}_\infty$?

c) Zeige: Man erhält auf obige Art und Weise alle Unterrringe R von $k(T)$, die k enthalten und diskrete Bewertungsringe sind.

Aufgabe 4.3 (2 Punkte)
Man bestimme alle Unterringe von $\mathbb{Z}$, die diskrete Bewertungsringe sind.

Aufgabe 4.4 (2 Punkte)
Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige: Aus $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ folgt $f^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

Aufgabe 4.5∗
a) Zeige: Ist $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ eine beliebige Teilmenge, so ist $I(X) = \{f \in A[x_1, ..., x_n] \,|\, f(P) = 0 \quad \forall P \in X\} \subset A[x_1, ..., x_n]$ ein Ideal.

b) Zeige: Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist auch das Radikal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ ein Ideal.

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)
Es seien $C \subset B \subset A$ Ringe. Zeigen Sie:

i) Ist A ein endlich erzeugter B-Modul und B ein endlich erzeugter C-Modul, so ist A ein endlich erzeugter C-Modul.

ii) Ist A ein endlich erzeugter B-Modul, so ist A ganz über B, d.h. jedes Element $x \in A$ erfüllt eine Gleichung der Form

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

für geeignete $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$.

iii) Erfüllt umgekehrt ein $x \in A$ eine Gleichung der obigen Form, so ist

$$B[x] := \{b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \,|\, b_0, \ldots, b_l \in B, l \geq 0\}$$

ein endlich erzeugter B-Modul.

Aufgabe 5.2 (3 Punkte)
Beweisen Sie das Lemma von Nakayama: Es seien $B \subset A$ Ringe, so dass $A \neq 0$ ein endlich erzeugter B-Modul ist. Dann gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von B, dass $\mathfrak{m}A \neq A$ ist.

Aufgabe 5.3 (3 Punkte)
Sei $A = \mathbb{Z}\sqrt{-5}$ und $I = (2, 1 + \sqrt{-5}) \subset A$. Zeigen Sie, dass die A-Moduln $A \oplus A$ und $I \oplus I$ isomorph sind.

Aufgabe 5.4 (3∗ Punkte)
Zeigen Sie, dass jeder endlich erzeugte Modul $M \neq 0$ über einem noetherschen Ring R eine Kette von Untermoduln

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M,$$

besitzt, wobei für $1 \leq i \leq n$ gilt $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_i$.

Aufgabe 6.1 (3+1 Punkte)
a) Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Man zeige: Das einzige Polynom

$f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ für alle $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$ ist das Nullpolynom.

b) Gebe ein Gegenbeispiel zu a) für einen endlichen Körper an.

Aufgabe 6.2 (2+1 Punkte)
a) Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$. Man bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus $\psi : K[x_1, \ldots, x_n] \to K$ gegeben durch $\psi(f) = f(a_1, \ldots, a_n)$.

b) Ändert sich $\ker \psi$ aus a), falls K nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)
Man zeige in einen Ring R ist jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ enthalten.

Aufgabe 6.4 (3 Punkte)
Es sei $\ldots \longrightarrow M_{r-1} \xrightarrow{\alpha_r} M_r \xrightarrow{\alpha_{r+1}} M_{r+1} \longrightarrow \ldots$ eine exakte Sequenz von Moduln. Man zeige, dass dann die induzierten kurzen Sequenzen $0 \to L_r \to M_r \to L_{r+1} \to 0$ mit $L_r = \operatorname{im} \alpha_r \subset M_r$ exakt sind.

Aufgabe 6.5 (2 Punkte)
Man zeige, dass für jede exakte Sequenz von Vektorräumen $0 \to V_1 \to V_2 \to \ldots \to V_n \to 0$ die Gleichheit $\sum (-1)^i \dim V_i = 0$ gilt.

Aufgabe 7.1 (3 Punkte)
Beweisen Sie folgende Aussage, aus der Vorlesung: Die folgende Sequenz ist exakt:

$$\operatorname{coker} d_1' \xrightarrow{\quad f \quad} \operatorname{coker} d_2' \xrightarrow{\quad g \quad} \operatorname{coker} d_3.$$

Aufgabe 7.2 (3 Punkte)
Gegeben sei folgendes kommutatives Diagram von Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_1"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Man zeige: Falls d_2 und d_3 Isomorphismen sind, dann ist auch d_1 ein Isomorphismus.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)(deRham Komplex)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\Omega(U)^i$ der Vektorraum der glatten i-Formen auf U

versehen mit dem Differential d (siehe z.B. Forster 3 par.19, Bott-Tu chapt. 1,...). Man zeige, dass (Ω^*, d) ein Komplex ist.

Aufgabe 7.4 (6 Punkte)
Es sei Γ ein endlicher, zusammenhaängender Graph mit Ecken $(e_1, \dots, e_E)$ und Kanten $(k_1, \dots, k_K)$. Wir versehen die Kanten mit einer Orientierung und erhalten dann wir folgt die Inzidenzmatrix $I_\Gamma \in \mathrm{Mat}_{E\times K}(\mathbb{Z})$ von Γ. Wir setzen

$$(I_\Gamma)_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls } k_j \text{ in } e_i \text{ beginnt} \\ -1 & \text{falls } k_j \text{ in } e_i \text{ endet} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten nun den (Homologie)-Komplex C_* gegeben durch $C_0 = e_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus e_E\mathbb{Z}$, $C_1 = k_1\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus k_K\mathbb{Z}$ und $C_n = 0$ sonst versehen mit dem Differential $d_1 : C_1 \to C_0$ gegeben durch Multiplikation mit I_Γ und $d_n = 0$ sonst. Man zeige:

a) (C_*, d) ist ein Komplex

b) Nur die Homologiemoduln $H_0(C_*)$ und $H_1(C_*)$ sind von Null verschieden und diese haben den Rang 1 und $E - K - 1$.

c) Die Anzahl der geschlossenen Wege in Γ ist $E - K - 1$.

Aufgabe 7.5$*$
a) Zeigen Sie: Homotope Morphismen induzieren diesselbe Abbildung auf der Kohomologie.

b) Zeigen Sie: Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ zu einer Gruppe G ist in der Tat ein (in der Regel nicht-kommutaiver) Ring.

c) Zeige: Ist M ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $e_1, ..., e_n$, dann wird M durch die Zuordnung $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, mit $\sigma \in S_n$, zu einem S_n-Modul.

Aufgabe 8.0$*$
i) Wiederholen Sie die Theorie der Körpererweiterungen

ii) Zeigen Sie, dass jeder endliche Körper eine Normalbasis besitzt.

iii) Bestimmen Sie die Galoisgruppe einer Körpererweiterung zu einem Polynom der Gestalt $x^n - a$.

Aufgabe 8.1 (4+2+2 Punkte)
Bestimmen Sie die Galoisgruppe von

i) $f(x) = x^4 - 17x^3 + 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, $p = 2, 3, 5$ und 13

ii) $f(x) = x^4 + 17x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

iii*) $f(x) = x^4 - 17x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für alle $i \in \mathbb{N}$ die Gruppenkohomologiegruppen

i) $H^i(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

ii) $H^i(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

ii) $H^i(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)
Es seien G eine endliche Gruppe und M ein G-Modul.

i) Zeigen Sie, dass die Menge der Kozykel $Z^2(G, M) \subset C^2(G, M)$ isomorph ist zu der Menge der Abbildungen

$$\{ f : G^2 \to M \mid xf(y,z) - f(xy,z) + f(x,yz) - f(x,y) = 0 \}.$$

ii) Bestimmen Sie die Menge der Koränder $B^2(G, M) \subset C^2(G, M)$ und damit $H^2(G, M)$.

Aufgabe 8.4 (8 Punkte)
Es sei $L = K[x]/(x^4 + 17x^2 + 1)$ und $\mathrm{Gal}(L|K) = \mathrm{Aut}_K(L)$ mit $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_3$. Bestimmen Sie für alle $i \in \mathbb{N}$

i) $H^i(\mathrm{Gal}(L|K), L^*)$.

ii) $H^i(\mathrm{Gal}(L|K), L)$.

Aufgabe 8.5*

a) Zeige: $\mathrm{Hom}_A(., M)$ und $M \otimes_A$ sind rechtsexakte Funktoren.

b) Zeige: $\mathrm{Hom}_A(M, .)$ ist ein linksexakter Funktor.