5. Übung zur Algebraischen Graphentheorie

Aufgaben zum 27.6.2008.

1. Zeigen Sie, daß für einen Graphen G der Wert $\vartheta(G)$ einer optimalen Orthonormaldarstellung beschränkt ist durch den größten Eigenwert einer beliebigen symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{V \times V}$ mit $M(x, y) = 1$ für jedes Paar (x, y) gleicher oder nicht benachbarter Ecken.

   Hinweis. Ist λ der größte Eigenwert von M, so ist $\lambda E - A$ positiv semidefinit und symmetrisch. Daher existiert eine Familie $(v_x)_{x \in V}$ von Elementen z. Bsp. des Vektorraums $\mathbb{R}^V$ mit $(\lambda E - A)(x, y) = v_x^\top v_y$. Man wähle die v_x in einem geeigneten Vektorraum nebst einem zu allen v_x orthogonalen Einheitsvektor c und studiere die durch $u_x := (c + v_x)/\sqrt{\lambda}$ gegebene Familie.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabe, daß die obere Schranke für $\alpha(G)$ in Theorem 10 auch eine obere Schranke für $\vartheta(G)$ ist, daß also

   $$\vartheta(G) \leq \frac{\lambda_{|G|}(G) \cdot |G|}{\lambda_{|G|}(G) - k}$$

   gilt. Schließen Sie daraus $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$.

   Hinweis. Die Matrix $M = A - \mu E - \frac{k-\mu}{|G|} J$, worin $\mu = \lambda_{|G|}(G)$ kleinster Eigenwert der Adjazenzmatrix A von G ist, hat sich im Beweis von Theorem 10 als positiv semidefinit erwiesen. Was bedeutet das für den größten Eigenwert von $J - \frac{|G|}{k-\mu} A$?

3. Bestimmen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabe die SHANNON-Kapazität eines Kreises gerader Länge.

MATTHIAS KRIESELL · 23ter Juni 2008