Algebraische Graphentheorie

MATTHIAS KRIESELL

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg

Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Was ist *Algebraische Graphentheorie*? Sie umfaßt jedenfalls die Behandlung von Problemen der strukturellen Graphentheorie mit Mitteln und Methoden der linearen Algebra oder Algebra (und umgekehrt), das Studium von Symmetrien in Graphen mit Anwendungen auf Codes und Designs, aber auch Enumerationsprobleme auf Graphen und verwandten Klassen. Eine besondere Rolle in der Theorie symmetrischer Graphen spielen CAYLEY-*Graphen*, die über einer (mathematischen) Gruppe konstruiert werden und deren Eigenschaften widerspiegeln können. Auch in der *Matroidtheorie*, wie sie von WHITNEY in den 1930ern entwickelt wurde, werden Graphen von einer algebraischen Warte aus behandelt. Diese Theorie kann nicht alle Aspekte eines Graphen einfangen — nichtisomorphe Bäume können darin nicht unterschieden werden, das Konzept einer Ecke fehlt u.v.m. — erlaubt aber andererseits eine vereinheitlichende Betrachtung kombinatorischer Eigenschaften von Objekten ganz anderer Art (etwa von Vektorräumen) und hat sich seither zu einer ganz eigenständigen Disziplin der diskreten Mathematik entwickelt. Infolge dieser völligen Verselbständigung ist sie hier ausgeklammert.

In diesem einführenden Kapitel wollen wir in losem Zusammenhang einige Facetten und die Grundbegriffe der Theorie vorstellen. Wir beginnen mit einem durch eine Arbeit von GESSEL und VIENNOT berühmt gewordenen Lemma von LINDSTRÖM, mit dem sich, unter anderem, zahlreiche Eigenschaften der Determinante auf die Bestimmung von Wegesystemen in geeigneten Digraphen zurückführen lassen. Als Beispiel liefern wir den Produktsatz von BINET und CAUCHY, den wir danach zum Beweis des Matrix-Baum-Satzes von KIRCHHOFF verwenden. Aus diesem Satz folgt ein anderer Klassiker — der Satz von CAYLEY über die Zahl der Bäume auf einer vorgegebenen Eckenmenge — doch seine ganze Schlagkraft entfaltet er erst in der Theorie elektrischer Netzwerke. Wir beleuchten hier eine ganz aparte Anwendung dieser "algebraischen Potentialtheorie" auf rechteckige Quadratpackungen. Daß neben der Determinante auch andere Matrixformen wie Permanente oder PFAFFsche Determinante zur Behandlung graphentheoretischer Probleme herangezogen werden können, illustrieren wir durch TUTTEs Beweis seines Faktorsatzes und einem Ergebnis über die Zahl der 1-Faktoren eines bipartiten Graphen, das erst durch Lösung der Permanentenvermutung von VAN DER WAERDEN durch FALIKMAN und EGORYČEV möglich wurde. Abschließend wenden wir uns einem einfachen Symmetriekonzept in Graphen zu, der sogenannten starken Regularität, und geben eine Anwendung in der extremalen Graphentheorie.

Hier eine kurze Zusammenfassung der Grundbegriffe.

Graphen. Ein *Ultragraph* auf V ist ein Quadrupel $G = (V, E, \text{init}, \text{ter})$, wobei V, E disjunkte Mengen seiner *Ecken* bzw. *Kanten* sind und die Abbildungen $\text{init}, \text{ter} : E \to \mathcal{P}(V)$ jeder Kante e die Mengen $\text{init}(e), \text{ter}(e)$ ihrer *Start-* bzw. *Zielecken* zuordnen. G ist *endlich*, falls V, E endlich sind.

Ist $x \in \text{init}(e)$ und $y \in \text{ter}(e)$ und gilt $\text{init}(e) = \text{ter}(e) = \{x\}$ falls $x = y$, so nennen wir e auch eine *Kante von x nach y*. Die Elemente aus $V_G(e) := \text{init}(e) \cup \text{ter}(e)$ sind die *mit e inzidierenden Ecken*. G heißt *ungerichtet*, falls $\text{init} = \text{ter}$ ist. Der Ultragraph $\underline{G} := (V, E, \text{init}', \text{ter}')$ mit $\text{init}'(e) = \text{ter}'(e) = \text{init}(e) \cup \text{ter}(e) =: V_G(e)$ für alle $e \in E$ wird der *G unterliegende ungerichtete Ultragraph* genannt. G heißt *einfach*, falls für alle $e, f \in E$ aus $\text{init}(e) = \text{init}(f)$ und $\text{ter}(e) = \text{ter}(f)$ stets $e = f$ folgt. Eine Kante heißt *Schlinge* von G bei x, falls $\text{init}(e) = \text{ter}(e) = \{x\}$ für ein $x \in V$ gilt. Bestehen $\text{init}(e) = \{x\}$ oder $\text{ter}(e)$ nur aus einem Element, so wird auch dieses mit $\text{init}(e)$ bzw. $\text{ter}(e)$ bezeichnet.

Alle hier vorkommenden Graphenmodelle sind Spezialisierungen: Ist $|\text{init}(e)| = |\text{ter}(e)| = 1$ und, so nennen wir G einen *Multidigraphen*. Ist G ungerichtet und $|\text{init}(e)| \in \{1, 2\}$ für alle $e \in E$, so ist ist G ein *Multigraph*. Einfache, schlingenlose Multidigraphen oder Multigraphen werden *Digraphen* bzw. *Graphen* genannt. Eine *Orientierung* eines Multigraphen G ist ein Multidigraph G' mit $\underline{G'} = G$. In Graphen oder Digraphen gibt es zu zwei Ecken x, y höchstens eine Kante von x nach y, die wir mit xy bezeichnen. In einem Graphen ist folglich $xy = yx$. Für gegebenes V bestimmt $E \subseteq V \times V$ einen einfachen Digraphen $G = (V, E, \text{init}, \text{ter})$ per $\text{init}((x, y) = \{x\}$ und $\text{ter}((x, y)) = \{y\}$. Ebenso bestimmt $E \subseteq \{\{x, y\} : |\{x, y\}| \in \{1, 2\}\}$ einen einfachen Graphen $G = (V, E, \text{init}, \text{ter})$ per $\text{init}(\{x, y\}) = \text{ter}(\{x, y\}) = \{x, y\}$. Diese Objekte werden jeweils mit $G = (V, E)$ bezeichnet.

Ein *Kantenzug von x nach y* der *Länge ℓ* in G oder schlicht ein *x, y-Kantenzug* ist eine Folge

$$W = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_\ell, x_\ell$$

von abwechselnd Ecken und Kanten von G mit $x_0 = x \in V(G)$ und $x_\ell = y$ so, daß e_i eine Kante von x_{i-1} nach x_i ist. Ist W durch die Teilfolge seiner Ecken bestimmt (zum Beispiel falls G ein einfacher Graph oder Digraph ist), so schreiben wir $W = x_0 x_1 \ldots x_\ell$; mit $x_i W x_j$ wird dann der Teilweg $x_i x_{i+1} \ldots x_j$

bezeichnet. Wir nennen W *geschlossen*, falls $\ell > 0$ und $x_0 = x_\ell$ ist, sonst *offen*. W ist *doppelpunktfrei*Kantenzug!doppelpunktfreier, falls $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ und $x_1, \ldots, x_\ell$ jeweils paarweise verschieden sind. Ein doppelpunktfreier offener Kantenzug ist ein *Weg*, ein doppelpunktfreier geschlossener Kantenzug ein *Kreis*. Ein Ultragraph ohne Kreise heißt *kreisfrei* oder *azyklisch*.

Durch

$$x \sim_G y \;:\leftrightarrow\; \text{es gibt einen } x,y\text{-Kantenzug in } G$$

wird eine binäre, reflexive, transitive Relation $\sim_G$ auf $V(G)$ erklärt. Ist G ungerichtet, so ist $\sim_G$ auch symmetrisch, also eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von $\sim_G$ sind die *schwachen Zusammenhangskomponenten* von G und werden mit $\mathcal{C}(G)$ bezeichnet. G heißt *zusammenhängend*, falls $|\mathcal{C}(G)| \leq 1$ gilt.

Der Ultragraph $G' = (V', E', \text{init}', \text{ter}')$ ist ein *Teilultragraph* von G oder auch Ultragraph *in* G, falls $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $\text{init}' = \text{init}|E'$ und $\text{ter}' = \text{ter}|E'$ gilt. Für $X, Y \subseteq V$ sei $E_G(X, Y)$ die Menge aller Kanten von einer Ecke aus X nach einer aus Y, und $E'_G(X, Y)$ sei die Menge aller Kanten e aus $E_G(X, Y)$ mit $V_G(e) \subseteq X \cup Y$. Zur Abkürzung verwenden wir $E^+_G(X) := E_G(X, V - X)$ und $E^-_G(X) := E_G(V - X, X)$ und $E_G(X) := E^+_G(X) \cup E^-_G(X)$ und entsprechend $E^+_G(x) := E^+_G(\{x\})$, $E^-_G(x) := E^-_G(\{x\})$, $E_G(x) := E_G(x)$ für $x \in V$. Für $F \subseteq E$ sei $G(F) := (V, F, \text{init}|F, \text{ter}|F)$ und $G - F := G(E - F)$, und für $X \subseteq V$ sei $G(X) := (X, F := E'_G(X, X), \text{init}|F, \text{ter}|F)$ und $G - X := G(V - X)$. Für $x \in V \cup E$ sei $G - x := G - \{x\}$.

Die Zahlen $d^+_G(x) := |E_G(\{x\}, V)|$, $d^-_G(x) := |E_G(V, \{x\})|$, $d_G(x) := |E_G(\{x\}, V) \cup E_G(V, \{x\})|$ heißen *Innengrad*, *Außengrad* bzw. *Grad* der Ecke x in G und stimmen für ungerichtetes G überein. G heißt k*-regulär*, falls $d_G(x) = k$ für jedes $x \in V(G)$ gilt.

Ein kreisfreier Graph heißt *Wald*, ein zusammenhängender kreisfreier Graph G heißt *Baum*, und eine Ecke des Grades 1 ist ein *Blatt*. Ein Graph G ist bekanntlich genau dann ein Baum, wenn es zu je zwei $x, y \in V(G)$ genau einen x,y-Weg in G gibt (der dann mit xGy bezeichnet wird). Die endlichen nichtleeren Bäume sind genau die zusammenhängenden Graphen G mit $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Ein maximaler Teilwald irgendeines Graphen G heißt *aufspannender Wald* oder *Gerüst* von G und im zusammenhängenden Fall auch *aufspannender Baum* oder *Spannbaum*.

Der *vollständige Graph* auf X ist definiert durch $K_X := (X, \{xy : x \neq y \text{ aus } X\})$, der *vollständig bipartite Graph* mit *Klassen* A, B durch $K_{A,B} := (A \cup B, \{xy : x \in A, y \in B\})$, wobei A, B disjunkt sind. Ein Graph G heißt *bipartit*, falls es zwei disjunkte Mengen A, B — die *Klassen* — mit $V(G) = A \cup B$ und $E(G) = E_G(A, B)$ gibt.

Permutationen und Matrizen. Seien X, Y Mengen. Mit $S_{X,Y}$ wird die Menge der Bijektionen aus Y^X bezeichnet; $S_X := S_{X,X}$ ist somit die Menge der

Permutationen von X. $(S_X, \circ)$ ist eine Gruppe, und wie üblich werden Elemente von S_X durch griechische Buchstaben bezeichnet. Daneben wird Zykelschreibweise verwendet: So bezeichnet $(a\,b)$ für $a \neq b$ aus X die Abbildung aus S^X, die a auf b, b auf a und alle jedes $c \in X - \{a, b\}$ auf sich selbst abbildet, eine sogenannte *Transposition*. Statt $S_{\{1,\ldots,k\}}$ schreiben wir S_k. $S_0 = S_\emptyset$ besteht aus der leeren Abbildung. Wir setzen Grundwissen über Permutationen voraus: Beispielsweise ist für endliches X jede Permutation σ das Produkt von ℓ Transpositionen aus S_X; die Parität von ℓ hängt nicht von der konkreten Produktdarstellung ab, und wir definieren $\text{sgn}(\sigma) := +1$ falls ℓ gerade ist und $\text{sgn}(\sigma) := -1$ sonst, wobei $+1, -1$ immer einem aus dem Kontext ersichtlichen Ring entstammen werden. Infolgedessen ist $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$.

$A \times B$-Matrizen über R sind Abbildungen aus $R^{A \times B}$, wobei R ein kommutativer Ring mit 1 ist und A, B endliche Indexmengen. Die *Determinante* einer $A \times A$-Matrix P ist bekanntlich erklärt durch

$$\text{det} P = \sum_{\sigma \in S_A} \text{sgn}(\sigma) \prod_{a \in A} P(a, \sigma(a)),$$

insbesondere ist $\text{det}\emptyset = 1$.

Es ist gelegentlich nützlich, auch über die Determinante einer $A \times B$-Matrix P mit $|A| = |B|$ reden zu können. Dazu halten wir zunächst eine Bijektion $f : B \to A$ fest; dieses f definiert die *Hauptdiagonale* $\{(f(b), b) : b \in B\} \subseteq A \times B$ von P. Für jedes σ aus der Menge $S_{A,B}$ der Bijektionen von A nach B ist dann $f \circ \sigma$ aus S_A, und wir definieren $\text{sgn}_f(\sigma) := \text{sgn}(f \circ \sigma)$ sowie

$$\text{det}_f P := \sum_{\sigma \in S_{A,B}} \text{sgn}_f(\sigma) \prod_{a \in A} P(a, \sigma(a)).$$

Wegen $\text{sgn}_f(\sigma) \cdot \text{sgn}_g(\sigma) = \text{sgn}(f \circ \sigma) \cdot \text{sgn}((g \circ \sigma)^{-1}) = \text{sgn}(f \circ g^{-1})$ ist $\text{det}_g P = \text{sgn}(f \circ g^{-1}) \cdot \text{det}_f P$, so daß sich det_f und det_g “höchstens durch ihr Vorzeichen” unterscheiden. f ist meist implizit durch Verwendung dieser Schreibweisen gegeben.

Etwas anschaulicher kann man sich die Koordinatenmengen mit einer linearen Ordnung $<_A$ bzw. $<_B$ versehen denken. *Die Folge der Elemente* einer solchen Menge, etwa A, ist dann die Folge $a = (a_1, \ldots, a_\ell)$ mit $\ell = |A|$ und $a_1 <_A \ldots <_A a_\ell$. $X \subseteq A$ wird mit der durch $<_A$ induzierten Ordnung versehen, so daß die Folgen der Elemente solcher Teilmengen den Teilfolgen von a entsprechen. Ist nun b die Folge der Elemente von B, so ist durch $b_i \mapsto a_i$ eine natürliche Bijektion f von B nach A definiert, und es ist $\text{det}_f P = \sum_{\sigma \in S_\ell} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{k} P(a_i, b_{\sigma(i)})$. Sind A, B Teilmengen von $\mathbb{Z}$, so seien $<_A, <_B$ immer die Einschränkungen der natürlichen Ordnung von $\mathbb{Z}$ auf A bzw. B.

Für $P \in R^{A \times B}$ mit $|A| = |B|$ sei $\text{Cof}(P)(a, b) := \text{det}_f Q_{ab}$, wobei $Q_{ab} \in R^{A \times B}$ durch $Q_{ab}(a, b) := +1$, $Q_{ab}(i, j) := P(i, j)$ für $i \neq a$ und $j \neq b$, und 0 an den $|A| + |B| - 1$ übrigen Stellen erklärt ist. Dadurch wird die *Cofaktormatrix* $\text{Cof}(P)$ von P erklärt.

1.1 Das Lemma von Gessel & Viennot / Lindström

Sei G ein endlicher azyklischer Multidigraph und $w : E(G) \to R$. Für einen Weg P in G sei $w(P) := \prod_{e \in E(P)} w(e)$. Seien A, B zwei Mengen von jeweils k Ecken von G. Die *Wegematrix* $M \in R^{A \times B}$ zu G, w, A, B ist definiert durch

$$M(a,b) := \sum_{P \text{ ein } a,b\text{-Weg}} w(P).$$

Eine A, B*-Verbindung* ist ein Paar $p = (\sigma, (P_a)_{a \in A})$, wobei $\sigma \in S_{A,B}$ und P_a ein $a, \sigma(a)$-Weg ist. Sie heißt *kreuzungsfrei*, wenn die P_a paarweise disjunkt sind, sonst *kreuzend*. Wir definieren $w(p) := \prod_{a \in A} w(P_a)$ und $\mathrm{sgn}_f(p) := \mathrm{sgn}_f(\sigma)$.

Ist speziell G der Digraph mit den Ecken $A \dot\cup B$ und allen Kanten von A nach B, so ist die Wegematrix erklärt durch $M(a,b) = w(ab)$, und zu $\sigma \in S_{A,B}$ gibt es genau eine (kreuzungsfreie) A, B-Verbindung $p = (\sigma, (P_a)_{a \in A})$, nämlich diejenige mit $P_a = a\sigma(a)$; für diese ist $w(p) = \prod_{a \in A} w(a\sigma(a)) = \prod_{a \in A} M(a, \sigma(a))$ und infolgedessen gilt für diese besondere Konfiguration

$$\det{}_f M = \sum_{p \text{ kreuzungsfreie } A,B\text{-Verbindung}} \mathrm{sgn}_f(p) \cdot w(p).$$

Das folgende Lemma verallgemeinert dies für *beliebiges* G. Es ist zuerst 1972 von LINDSTRÖM bewiesen worden, seine Bedeutung für die abzählende Kombinatorik wurde allerdings erst 1985 eindrucksvoll von GESSEL und VIENNOT belegt.

Lemma 1 (Lemma von Gessel & Viennot / Lindström) *Sei G ein endlicher azyklischer Multidigraph, $w : E(G) \to R$, A, B zwei Mengen von jeweils k Ecken aus G, und M die Wegematrix zu G, w, A, B. Dann ist*

$$\det{}_f M = \sum_{p \text{ kreuzungsfreie } A,B\text{-Verbindung}} \mathrm{sgn}_f(p) \cdot w(p).$$

Beweis. Ausmultiplizieren und Umordnen liefert

$$\begin{aligned}
\det{}_f M &= \sum_{\sigma \in S_{A,B}} \mathrm{sgn}_f(\sigma) \cdot \prod_{a \in A} M(a, \sigma(a)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{A,B}} \mathrm{sgn}_f(\sigma) \cdot \prod_{a \in A} \sum_{P \text{ ein } a,\sigma(a)\text{-Weg}} w(P) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{A,B}} \mathrm{sgn}_f(\sigma) \cdot \sum_{p = (\sigma, (P_a)_{a \in A}) \ A,B\text{-Verbindung}} w(p) \\
&= \sum_{p \ A,B\text{-Verbindung}} \mathrm{sgn}_f(p) \cdot w(p).
\end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, daß $S := \sum_{p\,\in\,X} \mathrm{sgn}_f(p)w(p) = 0$ ist, wobei X die Menge der *kreuzenden* A, B-Verbindungen ist. Sei dazu $(\sigma, (P_a)_{a\in A})$ aus X. Wir denken uns A linear geordnet. Dann gibt es ein kleinstes $c \in A$ so, daß P_c einen anderen Weg P_d, $d \in A-\{c\}$, schneidet. Sei x die erste Ecke von P_c, die in einem anderen Weg enthalten ist, und sei d der kleinste Index $> c$ mit $x \in V(P_d)$. Weil G azyklisch ist, sind auch $P'_c := cP_cxP_d\sigma(d)$ und $P'_d := dP_dxP_c\sigma(c)$ Wege, und $((c\,d) \circ \sigma, P'_1, \ldots, P'_k)) =: g(p)$ mit $P'_a := P_a$ für $a \in A - \{c, d\}$ ist aus X. Offensichtlich gilt $g(g(p)) = p$, und so ist $g : X \to X$ eine fixpunktfreie Involution mit $\mathrm{sgn}_f(g(p)) = -\mathrm{sgn}_f(p)$ und $w(g(p)) = w(p)$. Daher können wir eine Partition von X in zweielementige Mengen $\{p, g(p)\}$ konstruieren, deren Mitglieder sich jeweils in der Summe S auslöschen. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas können zahlreiche Eigenschaften der Determinante abgeleitet werden, zum Beispiel der folgende Produktsatz von BINET und CAUCHY, der uns im weiteren Verlauf immer wieder begegnen wird.

Theorem 1 (Produktsatz von Binet / Cauchy) *Seien $P \in R^{A\times X}$, $Q \in R^{X\times B}$ Matrizen mit $|A| = |B| \leq |X|$. Dann gilt*

$$det_f PQ = \sum_{Y\subseteq X,\,|Y|=|A|} (det_g P|A \times Y) \cdot (det_{g^{-1}\circ f} Q|Y \times B).^1$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß A, X, B disjunkt sind. Sei $k := |A|$. Sei G der Digraph auf $A\cup X\cup B$ mit Kanten $(A\times X)\cup(X\times B)$, und sei $w : E(G) \to R$ definiert durch $w|A \times X := P$ und $w|X \times B := Q$. Für die Wege-Matrix gilt offensichtlich $M(a, b) = \sum_{x\in X} P(a, x)Q(x, b)$. Ist dagegen Y eine k-elementige Teilmenge von X und g eine Bijektion von Y nach A, $h := g^{-1} \circ f$, so ist für jedes Paar (p, q) einer kreuzungsfreien A, Y-Verbindung $p = (\sigma, (P_a)_{a\in A})$ und einer kreuzungsfreien Y, B-Verbindung $q = (\tau, (Q_y)_{y\in Y})$ das Paar $r := (\tau \circ \sigma, (a\sigma(a)\tau(\sigma(a)))_{a\in A})$ eine kreuzungsfreie A, B-Verbindung, und *jede* kreuzungsfreie A, B-Verbindung kann auf diese Weise eindeutig dargestellt werden. Wegen $\mathrm{sgn}_f(r) = \mathrm{sgn}_g(p) \cdot \mathrm{sgn}_h(q)$ erhält man durch dreimalige Anwendung von Lemma 1:

$$\begin{aligned}
\det_f PQ &= \det_f M \\
&= \sum_r \mathrm{sgn}_f(r) \cdot w(r) \\
&= \sum_Y \sum_p \sum_q \mathrm{sgn}_g(p) \cdot \mathrm{sgn}_h(q) \cdot w(p) \cdot w(q) \\
&= \sum_Y \sum_p \mathrm{sgn}_g(p) \cdot w(p) \sum_q \mathrm{sgn}_h(q) \cdot w(q) \\
&= \sum_Y (\det_g P|A \times Y) \cdot (\det_h Q|Y \times B),
\end{aligned}$$

[1]Dabei wird g beliebig aus $S_{Y,A}$ gewählt, liefert aber stets den gleichen Summanden. Warum?

wobei r die kreuzungsfreien A, B-Verbindungen durchläuft, Y die k-elementigen Teilmengen von X, und p bzw. q die kreuzungsfreien A, Y- bzw. Y, B-Verbindungen. □

Eine der Anwendungen von GESSEL und VIENNOT stellt die Determinanten von quadratischen Matrizen im durch $P(a,b) = \binom{a}{b}$ gegebenen PASCAL*schen Dreieck* $P \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ in einen engen Zusammenhang mit gewissen A, B-Verbindungen im Gittergraphen: Sei $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \{(x,y)(x+1,y), (x,y)(x,y+1) : x, y \in \mathbb{Z}\})$ der nach Norden und Osten gerichteten *Gittergraph*. Für $a, b \geq 0$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{a}{b}$ gleich der Anzahl der $(0,-a), (b,-b)$-Wege in G, denn diese Wege entsprechen den Folgen mit genau $b - 0 = b$ Ostschritten und $-b - (-a) = a - b$ Nordschritten, und davon gibt es $\binom{b+(a-b)}{b}$ viele. Sind nun $a_1 < \ldots < a_k$ und $b_1 < \ldots < b_k$ und setzen wir $A := \{(0, -a_i) : i \in \{1, \ldots, k\}\}$ und $B := \{(b, -b_i) : i \in \{1, \ldots, k\}\}$, so erhalten wir als Wegematrix mit w konstant 1 gerade $M((0,-a_i),(b_i,-b_i)) = \binom{a_i}{b_i}$. Wählen wir $f(b_i) = a_i$, so ist nach Lemma 1 $\det M = \sum_{p \text{ kreuzungsfreie } A, B\text{-Verbindung}} \operatorname{sgn}_f(p) \cdot w(p)$. Da eine kreuzungsfreie A, B-Verbindung $p = (\sigma, (P_a)_{a \in A})$ nur mit $\sigma = f^{-1}$ bestehen kann und $\operatorname{sgn}_f(f^{-1}) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}_A) = +1$ gilt, ist $\det M$ tatsächlich die Anzahl kreuzungsfreier A, B-Verbindungen. Folglich sind die Determinanten von quadratischen Matrizen im PASCALschen Dreieck nichtnegativ.

1.2 Kirchhoffs Matrix-Baum-Satz

Die *Inzidenzmatrix* N über R eines Multigraphen oder Multidigraphen G ist die Matrix aus $R^{V(G) \times E(G)}$ mit $N(x,e) = 1$ falls x Endecke von e ist, $N(x,e) = -1$ falls x Anfangs- aber nicht Endecke von e ist, und 0 sonst. Die Inzidenzmatrix von G über $\mathbb{Z}$ wird mit $I(G)$ bezeichnet.

Theorem 2 (Matrix-Baum-Satz von Kirchhoff) *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender schlingenloser Multigraph, D eine beliebige Orientierung von G und $x \in V$. Dann besitzt G genau $\det(I(D)I(D)^\top)|(V - \{x\} \times V - \{x\})$ verschiedene Spannbäume.*

Beweis. Sei $V_0 := V - \{x\}$ und $P := I(D)|V_0 \times E$.

Wir zeigen die Behauptung zunächst für einen Baum G, indem wir induktiv $\det P = \pm 1$ beweisen: Für $|G| = 1$ ist P die leere Matrix und $\det P = 1$, für $|G| > 1$ besitzt G ein Blatt $v \neq x$, und v inzidiert mit genau einer Kante e von G. Da $P^- := P|(V_0 - \{v\}) \times (E - \{e\})$ die Einschränkung der Inzidenzmatrix der Orientierung $D - v$ des Baumes $G - v$ auf $V(G - v) - \{x\} \times E(G - v)$ ist, erhalten wir per Induktion $\det P^- = \pm 1$, und Entwicklung von P nach der v-ten Zeile liefert $\det P = P(v,e) \cdot \det P^- = (\pm 1) \cdot (\pm 1) = \pm 1$ wie behauptet.

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall. Mit dem Produktsatz von BINET und CAUCHY ist $\det(I(D)I(D)^\top)|V_0 \times V_0) = \det PP^\top = \sum_N \det N \cdot \det N^\top =$

$\sum_N (\text{det}N)^2$, wobei N alle Matrizen $P|V_0 \times E_0$ mit $E_0 \subseteq E$ und $|E_0| = |V_0|$ durchläuft. Falls der unterliegende Multigraph G_0 von (V, E_0) kein Baum ist, so ist er nicht zusammenhängend und besitzt daher eine Komponente C, die x nicht enthält. Die Zeilen von $N|V(C) \times E_0$ ergeben in summa 0 und sind daher linear abhängig, und somit ist det$N = 0$. Ist dagegen G_0 ein Baum, so ist nach der Eingangsüberlegung det$N = \pm 1$. Da die Spannbäume von G bijektiv den unterliegenden Multigraphen G_0 solcher (V, E_0) mit $E_0 \subseteq E$ und $|E_0| = |V_0|$, die selbst Bäume sind, entsprechen, folgt die Behauptung. $\square$

Ist $N := I(D)$ die Inzidenzmatrix über $\mathbb{Z}$ des schlingenlosen Multidigraphen $D = (V, E)$, so ist $NN^\top(x, y) \in \mathbb{Z}^{V \times V}$ gleich dem Grad von x falls $y = x$, -1 falls $V_G(e) = \{x, y\}$ für eine Kante e und $x \neq y$ gilt, und 0 sonst. Somit ist bereits die Matrix $NN^\top$ — und nicht nur ihre Determinante — durch $\underline{D}$ allein bestimmt. Durch Spezialisierung von Theorem 2 auf $G = K_n$ erhält man den folgenden Klassiker von CAYLEY.

Theorem 3 (Satz von Cayley) *Es gibt n^{n-2} Bäume auf $\{1, \ldots, n\}$ ($n \geq 1$).*

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 1$. Sei jetzt D eine Orientierung des vollständigen Graphen K_n, $n \geq 2$. $X := I(D)I(D)^\top|(V - \{n\} \times V - \{n\})$ ist auf der Hauptdiagonalen $n-1$ und sonst -1. Zur Berechnung von det$X$ ersetzen wir die erste Zeile durch die Summe aller Zeilen und addieren sie dann zu jeder anderen. Das Resultat trägt 1 in der ersten Zeile und sonst n in der Hauptdiagonalen und 0 außerhalb davon, und hat daher, wie auch X, Determinante n^{n-2}. Theorem 2 liefert die Behauptung. $\square$

Die Anzahl der maximalen Wälder eines Multigraphen G wird auch *Komplexität* von G genannt und hier mit $\tau(G)$ bezeichnet.

1.3 Schnitt- und Zyklenraum

Schnitte und Zyklen in der strukturellen Graphentheorie. Im Kontext der strukturellen Graphentheorie ist ein Schnitt S in einem endlichen Multigraphen G die Menge S aller Kanten zwischen den Klassen einer Partition von $V(G)$ in zwei Teile X, Y. $S = E_G(X, Y)$ ist also die Menge aller Kanten mit genau einer Endecke in X; tatsächlich können wir uns S als "von X erzeugt" denken, undzwar als symmetrische Differenz der Mengen $E_G(x)$ der jeweils mit $x \in X$ inzidierenden Kanten.[2] Die $E_G(x)$ sind ihrerseits wieder Schnitte, bilden also ein "Erzeugendensystem" für alle Schnitte, und jede symmetrische Differenz von irgendwelchen $E_G(x)$ ist ein Schnitt (welcher?) oder leer.

[2] Die symmetrische Differenz einer endlichen Familie $(E_i)_{i \in J}$ von Teilmengen einer Menge E besteht aus allen Elementen von E, die in ungeradzahlig vielen der E_i vorkommen; in unserem Fall tritt jede Kante von G in keinem oder genau einem oder genau zweien der $E_G(x)$ auf, so daß die symmetrische Differenz von $(E_G(x))_{x \in X}$ aus allen Kanten mit genau einer Ecke in X besteht, also gleich $E_G(X, Y)$ ist.

Indem wir Schnitte und, allgemeiner, Kantenmengen, mit ihren *charakteristischen Funktionen* im Vektorraum $GF(2)^{E(G)}$ identifizieren — also $S \subseteq E(G)$ mit $\chi_S : E(G) \to GF(2)$, $\chi_S(e) = 1$ für $e \in S$ und 0 sonst — können wir diesen Erzeugungsprozess auch direkt in der Sprache der linearen Algebra formulieren: $S \neq \emptyset$ ist genau dann ein Schnitt, wenn es (bzw. χ_S) Linearkombination gewisser $E_G(x)$ (bzw. $\chi_{E_G(x)}$) ist.

Damit bilden die Schnitte mit $\emptyset$ einen Untervektorraum B von $GF(2)^{E(G)}$, und mehr noch: Da uns die $E_G(x)$ (bzw. ihre charakteristischen Funktionen) schon als *Zeilen der Inzidenzmatrix* I von G über $GF(2)$ begegnet sind, ist unser B der von den Zeilen von I erzeugte Unterraum: Zu jedem Schnitt $S = E_G(X, Y)$ gibt es ein $\lambda \in GF(2)^{V(G)}$ mit $\chi_S = I^\top \lambda$ (nämlich $\lambda(x) = 1$ falls $x \in X$ und $= 0$ sonst), und für jedes $\lambda \in GF(2)^{V(G)}$ ist die Abbildung $I^\top \lambda$ aus $GF(2)^{E(G)}$ null oder ein Schnitt. Alternativ können wir B als Bild der durch $\lambda \mapsto I^\top \lambda$ definierten linearen Abbildung $I^\top : GF(2)^{V(G)} \to GF(2)^{E(G)}$ darstellen.

Auf dieselbe Weise erzeugen die Kantenmengen der Kreise eines Graphen G einen Unterraum von $GF(2)^{E(G)}$, seinen Zyklenraum. Auch hier besteht ein inniger Zusammenhang mit der Inzidenzmatrix von G über $GF(2)$: Da jede Ecke eines Kreises geraden Grad hat, folgt $\chi_{E_G(x)}^\top \chi_C = 0$ in $GF(2)$ für $x \in V(G)$ und die Kantenmenge C jedes Kreises und damit auch für ein beliebiges Element des Zyklenraums von G; also gilt $I\chi_C = 0$. Ist umgekehrt $I\chi_C = 0$ für ein $C \subseteq E(G)$, also $\chi_{E_G(x)}^\top \chi_C = 0$ für jedes $x \in V(G)$, so hat jede Ecke in (V, C) geraden Grad; per Induktion nach $|C|$ ist dann C disjunkte Vereinigung (insbesondere symmetrische Differenz) von Kantenmengen von Kreisen von G, also im Zyklenraum von G. Der Zyklenraum von G ist also der Kern der Inzidenzmatrix I von G über $GF(2)$ bzw. Kern der durch $x \mapsto Ix$ definierten linearen Abbildung $I : GF(2)^{E(G)} \to GF(2)^{V(G)}$ — und damit zugleich das orthogonale Komplement des Schnittraums.

Reellwertige Schnitte und Zyklen. Einer Verallgemeinerung dieser Konzepte von $GF(2)$ auf andere Körper oder Ringe steht formal natürlich nichts im Weg. Allerdings würden dabei Modelle entstehen, die nicht mehr kompatibel zum strukturellen Teil der Theorie sind: Ist beispielsweise G ein Dreieck K_3 und betrachten wir seine Inzidenzmatrix I über einem Körper R der Charakteristik $\neq 2$, so ist deren Kern $\{0\}$ und ihr Bild ganz $R^{E(K_3)}$, so daß wir gehalten wären, jede Abbildung aus $R^{E(K_3)}$ als Schnitt und keine außer 0 als Zyklus aufzufassen. Ebenfalls nicht vorteilhaft: Für einen beliebigen Graphen liegt *keine* charakteristische Funktion außer $\chi_\emptyset = 0$ im Kern der Inzidenzmatrix über $\mathbb{Z}$. Diese Probleme kann man beseitigen, indem man zu *gerichteten* Graphen übergeht: Dort entstehen tatsächlich schlagkräftige Theorien, wovon wir uns hier zunächst im reellen Fall überzeugen.[3]

[3]Um von dort aus zu ungerichteten Graphen G zurückzukommen, kann man entweder feste Orientierungen von G betrachten oder aber Abbildungen von den Richtungen des Graphen (siehe unten) anstelle von Abbildungen von seinen Kanten, was einer gleichzeitigen Betrachtung aller

Sei also D ein schlingenloser Multidigraph und $I(D)$ seine Inzidenzmatrix. Der von den Spalten von $I(D)^\top$ erzeugte Teilvektorraum von $\mathbb{R}^{E(D)}$ ist der *Schnittraum* von D, sein Orthogonalraum ist der *Zyklenraum* von D. Die Konzepte von Zyklen- und Schnittraum werden in der algebraischen Topologie verallgemeinert und sind dort von fundamentaler Bedeutung.

Die Dimension des Schnittraums ist gleich dem Rang von $I(D)$ und damit $|V(D)| - |\mathcal{C}(D)|$ (für $g \in \mathbb{R}^{V(D)}$ ist nämlich $g \in \mathrm{Kern} I(D)^\top$ genau dann, wenn $g(x) - g(y) = 0$ für jede Kante $xy \in E(D)$ gilt, wenn also g auf jeder Komponente von D konstant ist — daher ist $\dim \mathrm{Kern} I(D)^\top = |\mathcal{C}(D)|$). Die Dimension des Zyklenraums ist folglich $|E(D)| - |V(D)| + |\mathcal{C}(D)|$.

Dimension von Schnitt- und Zyklenraum hängen folglich nur von $\underline{D}$ ab, und ähnlich verhält es sich mit vielen weiteren in diesem Kontext entwickelten Begriffen.

Für $f \in \mathbb{R}^{E(D)}$ und $X \subseteq E(D)$ vereinbaren wir die Schreibweise $f(X) := \sum_{e \in X} f(e)$. Nach Definition ist damit ein $f \in \mathbb{R}^{E(D)}$ genau dann im Zyklenraum von D, wenn $f(E_D^+(x)) = f(E_D^-(x))$ für jedes $x \in V(D)$ gilt.

Auch die Elemente des Schnittraums lassen sich leicht charakterisieren: Ist $W = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, e_\ell, x_\ell$ ein Kantenzug in $\underline{D}$, so nennen wir $e_i \in E(D) = E(\underline{D})$ eine *Vorwärtskante* von W falls init$(D)(e_i) = x_{i-1}$ ist, sonst eine *Rückwärtskante* von W; mit dieser Sprechweise ist g genau dann im Schnittraum von D, wenn für jeden geschlossenen Kantenzug W von $\underline{D}$ die Summe der $g(e)$ aller Vorwärtskanten e gleich der Summe der $g(e)$ aller Rückwärtskanten e von W ist, gewichtet nach der Zahl der Vorkommnisse als Vorwärts- bzw. Rückwärtskanten (Übung).

Ist W ein geschlossener Kantenzug in $\underline{D}$ und definieren wir für $e \in E(D)$ $f_W(e)$ als Zahl der Vorkommnisse von e in W als Vorwärtskante vermindert um die Zahl der Vorkommnisse von e in W als Rückwärtskante, so ist $I(D)f_W = 0$, also f_W im Zyklenraum von D (falls W doppelpunktfrei ist, steht für jede Ecke x von W genau einmal $+1$ und genau einmal -1 und sonst 0 als Summand in $\sum_{e \in E(D)} I(D)(x,e) f_W(e)$, und folglich ist $I(D)f_W = 0$; andernfalls ist W nicht doppelpunktfrei: es gibt folglich kürzere geschlossene Kantenzüge W_1, W_2 mit $f_W = f_{W_1} + f_{W_2}$, und induktiv folgt $I(D)f_W = I(D)f_{W_1} + I(D)f_{W_2} = 0$). Ist also g im Orthogonalraum des Zyklenraums, so gilt $g^\top f = 0$ für alle Zyklen f, also insbesondere $g^\top f_W = 0$, und somit ist nach dem vorangegangenen Absatz g im Schnittraum. Da umgekehrt nach Definition jeder Schnitt im Orthogonalraum des Zyklenraums enthalten ist, ist der Schnittraum *gleich* dem Orthogonalraum des Zyklenraums.

Tatsächlich erzeugen die f_C zu den Kreisen C von $\underline{D}$ den Zyklenraum. Sei f ein Element des Zyklenraums und $\mathrm{supp} f := \{e \in E : f(e) \neq 0\}$. Wir zeigen induktiv über $|\mathrm{supp} f|$, daß f Linearkombination von f_C zu Kreisen C von $\underline{D}$

möglichen Orientierungen gleichkommt.

ist. Die Behauptung ist klar für $f = 0$. Wegen $I(D)f = 0$ inzidiert keine Ecke von D mit genau einer Kante aus supp$f$, und so gibt es für $f \neq 0$ eine Kreis W in $\underline{D}$ mit allen Kanten aus supp$f$, d.h. supp$f_W \subseteq$ supp$f$, und eine Kante e mit $f_W(e) = +1$. Weil $f' := f - f(e)f_W$ ein Element des Zyklenraums mit $|\text{supp} f'| < |\text{supp} f|$ ist, läßt sich nach Induktion f' und somit auch f als Linearkombination von f_C zu den Kreisen C aus $\underline{D}$ darstellen.

Wir fassen zusammen:

Lemma 2 *Für den Schnittraum B und den Zyklenraum Z von des schlingenlosen Dimultigraphen D gelten*

(i) $\mathbb{R}^{E(D)} = B \oplus Z$, $B^\perp = Z$ *und* $Z^\perp = B$,

(ii) der Schnittraum wird erzeugt von den Zeilen von $I(D)$ und enthält genau diejenigen $g \in \mathbb{R}^{E(D)}$, für die für jeden geschlossenen Kantenzug W von $\underline{D}$ die Summe der $g(e)$ aller Vorwärtskanten von W gleich der Summe der $g(e)$ aller Rückwärtskanten von W ist (gewichtet nach Zahl der jeweiligen Vorkommnisse in W),

(iii) der Zyklenraum wird erzeugt von den f_C zu Kreisen C von $\underline{D}$ und enthält genau diejenigen $f \in \mathbb{R}^{E(D)}$ mit $f(E_D^+(x)) = f(E_D^-(x))$ für alle $x \in V(D)$.

Schnitt- und Zyklenraum der Richtungen. Um reellwertige Schnitte und Zyklen auch in einem ungerichteten Graphen G betrachten zu können, kann man einfach zu einer fest gewählten Orientierung von G übergehen. Hier ist ein alternativer Weg:

Ist G ein ungerichteter schlingenloser Multigraph auf V, so sei $\vec{E} := \vec{E}(G) := \{(e, x, y) : e = xy\}$ die Menge der *Richtungen* seiner Kanten und entsprechend $\vec{E}_G(X, Y) := \{(e, x, y) \in \vec{E} : x \in X, y \in Y - \{x\}\}$ für $X, Y \subseteq V$ (siehe [6], Kapitel 5). Wir nennen $f \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ *zulässig*, falls $f((e, x, y)) = -f((e, y, x))$ für alle $(e, x, y) \in \vec{E}$ gilt. Ein zulässiges f liege im *Zyklenraum der Richtungen*, falls $\sum_{\vec{e} \in \vec{E}_G(\{x\}, V)} f(\vec{e}) = 0$ für alle $x \in V$ gilt. Ein zulässiges $g \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} g(\vec{e_i}) = 0$ für alle Folgen $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_\ell}$ von Richtungen mit $\ell \geq 1$ und $\vec{e_i} = (e_i, x_{i-1}, x_i)$ für gewisse x_i mit $x_0 = x_\ell$ liege im *Schnittraum der Richtungen*. Ist nun D irgendeine Orientierung von G, so können wir aus einem $f \in \mathbb{R}^{E(D)}$ ein zulässiges $B_D(f) \in \mathbb{R}^{\vec{E}}$ vermöge

$$(B_D(f))((e, x, y)) := \begin{cases} f(e) & \text{falls } x \in \text{init}(e), y \in \text{ter}(e) \\ -f(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

gewinnen. Man überzeuge sich davon, daß f genau dann im Zyklenraum von D liegt, wenn $B_D(f)$ im Zyklenraum der Richtungen von G liegt, und daß die entsprechende Aussage auch für die jeweiligen Schnitträume gilt (Übung).

Schnitte und Zyklen als Objekte in Kettenkomplexen. Wir stellen abschließend noch eine Sichtweise auf Schnitte und Zyklen vor, wie sie in der algebraischen Topologie herrscht. Ein *Kokettenkomplex* ist eine Sequenz

$$C^0 \xrightarrow{\delta^0} C^1 \xrightarrow{\delta^1} C^2 \cdots$$

von Objekten C^d einer abelschen Kategorie (z. Bsp. Vektorräume, Gruppen) und Homomorphismen $\delta^d : C^d \to C^{d+1}$ mit $\delta^d\delta^{d-1} = 0$. Die Elemente aus Kernδ^d heißen *d-Kozyklen*, die aus Bildδ^{d-1} sind die *d-Koränder*. Jeder d-Korand ist ein d-Kozyklus (d. h. Bild$\delta^{d-1} \subseteq$ Kernδ^d), und $H^d :=$ Kernδ^d/Bildδ^{d-1} ist das *d-te Kohomologieobjekt* des Komplexes. Wir spezialisieren auf unsere Situation eines Digraphen D mit Inzidenzmatrix $I(D)$ und definieren

$$\mathbb{R}^{V(D)} \xrightarrow{I(D)^\top} \mathbb{R}^{E(D)} \xrightarrow{0} \mathbb{R}^{\emptyset}$$

als den *reellen Kokettenkomplex von D*. Damit sind die 1-Koränder, also die Elemente aus $B :=$ Bildδ^0, genau die Schnitte von D, und das erste Kohomologieobjekt $H^1 =$ Kern$\delta^1/B = \mathbb{R}^{E(D)}/B$, und letzteres ist isomorph zum Zyklenraum Z von D wegen $\mathbb{R}^{E(G)} = Z \oplus B$.

Entsprechend ist ein *Kettenkomplex* eine Sequenz

$$C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \cdots$$

von Objekten C_d einer abelschen Kategorie und Homomorphismen $\partial_d : C_d \to C_{d-1}$ mit $\partial_d\partial_{d+1} = 0$. Die Elemente aus Kern$\partial_d$ heißen *d-Zyklen* und die aus Bild∂_{d+1} sind die *d-Ränder*. Jeder d-Rand ist ein d-Zyklus und analog ist $H_d :=$ Kern∂_d/Bild∂_{d+1} das *d-te Homologieobjekt* des Komplexes. Speziell für unser D definieren wir

$$\mathbb{R}^{V(D)} \xleftarrow{I(D)} \mathbb{R}^{E(D)} \xleftarrow{0} \mathbb{R}^{\emptyset}$$

als den *reellen Kettenkomplex von D*. Damit sind die 1-Zyklen, also die Elemente aus Kern∂^1, genau die Zyklen von D, und das erste Homologieobjekt $H_1 =$ Kern∂_1/Bild$\partial_2 = Z/\{0\}$ kanonisch isomorph zum Zyklenraum Z.

Dieser Begriffswelt kann man die Bezeichnungen *Korand-* und *Randoperator* von G für die Abbildungen $x \mapsto I(D)^\top x$ bzw. $x \mapsto I(D)x$ entlehnen.

1.4 Elektrische Netzwerke

Ein *elektrisches Netzwerk* $N = (D, r, s)$ besteht aus einem schlingenlosen Multidigraphen D und zwei Abbildungen $r, s \in \mathbb{R}^{E(D)}$, die jeder Kante e von D einen *Widerstand* $r(e) \geq 0$ und eine *Spannungsquelle* $s(e)$ zuordnen. In einem realen elektrischen Netzwerk ergeben sich hieraus Strom $f(e)$ und Spannung

$g(e)$ an jeder Kante $e = xy$. Durch das OHM*sche Gesetz* stehen sie mit r und s im Zusammenhang per

$$g(e) = f(e) \cdot r(e) - s(e) \text{ für jedes } e,$$

und die beiden KIRCHHOFF-*Regeln* besagen, daß f im Zyklenraum und g im Schnittraum von D liegen (*Knotenregel*: Die Summe der zufließenden Ströme in einem Knotenpunkt ist gleich der Summe der abfließenden Ströme; *Maschenregel*: Die Summe der Teilspannungen entlang eines Umlaufs ("Masche") ist Null).

Im Einklang mit diesen Interpretationen nennen wir $\lambda \in \mathbb{R}^{V(D)}$ ein *Potential* zu g, falls $g = I(D)^\top \lambda$ gilt. Jedes $\lambda \in \mathbb{R}^{V(D)}$ ist trivialerweise ein Potential zu einem gewissen Schnitt g, nämlich zu $g(ab) = \lambda(b) - \lambda(a)$. Umgekehrt läßt sich zu einem gegebenen Schnitt g ein Potential konstruieren. Dazu wählen wir irgendeinen maximalen, $\underline{D}$ aufspannenden Wald T und legen zunächst in jeder Komponente C von T das Potential $\lambda(x)$ bei einer Wurzel $x \in V(C)$ fest. Durch schrittweises Festlegen von λ entlang von Kanten aus $E(T)$ mit bereits festgelegtem Wert an genau einer Endecke ergibt sich daraus eindeutig ein $\lambda \in \mathbb{R}^{V(D)}$ mit $\lambda(ab) = \lambda(b) - \lambda(a)$ für jede Kante ab in D aus $E(T)$. Jede Kante xy von D ***außerhalb*** von $E(T)$ liegt auf einem Kreis C von $\underline{D}$ der ganz in $T + xy$ enthalten ist. Weil g ein Schnitt ist, ist die Summe der $g(e)$ der Vorwärtskanten e von C gleich der Summe der $g(e)$ der Rückwärtskanten e von C, so daß $g(xy) = \lambda(y) - \lambda(x)$ auch für diese Kante und damit für alle Kanten von D folgt; also gilt $I(D)^\top \lambda = g$.

Wie kann man sich von der Existenz resultierender Ströme und Spannungen in einem gegebenen Netzwerk überzeugen? Ein Weg dorthin führt über Fundamentalschnitte und Austauschmatrizen von Spannbäumen. Wie schon in der klassischen strukturellen Graphentheorie erzeugt $U \subseteq V(D)$ einen Schnitt g_U von D: Wir setzen $g_U(e) := -1$ falls $\text{init}(e) \in U$ und $\text{ter}(e) \notin U$, $g_U(e) := +1$ falls $\text{init}(e) \notin U$ und $\text{ter}(e) \in U$, und $g_U(e) := 0$ sonst. Für $x \in V(G)$ begegnete uns $g_{\{x\}}$ schon als $x$te Zeile in der Inzidenzmatrix, es ist ja $g_{\{u\}}(e) = I(D)(u, e)$. Somit sind die $g_{\{x\}}$ Schnitte, und damit auch g_U als Summe der $g_{\{x\}}$ mit $x \in U$.

Zu einem aufspannenden Baum T von $\underline{D}$ und $f \in E(T)$ sei $U(T, f)$ die Eckenmenge derjenigen Komponente von $T - f$, die $\text{ter}(f)$ enthält; der Schnitt $g_{U(T,f)}$ heißt *Fundamentalschnitt* von T, f. Weil für $e \in E(T)$ $g_{U(T,f)}(e)$ gleich 1 für $e = f$ und 0 sonst ist, sind die $|E(T)| = |V(T)| - |\mathcal{C}(D)|$ vielen Fundamentalschnitte zu festem T linear unabhängig und bilden folglich eine Basis.

Ist $e \in E_D(U(T, f))$, so ist offensichtlich $T - f + e$ ein Spannbaum mit $f \in E_D(U(T - f + e, e))$ und es gilt $g_{U(T,f)} = g_{U(T-f+e,e)}$. Für alle anderen e ist $T - e + f$ kein Spannbaum. Wir erklären dazu die *Austauschmatrix* N_T von T durch $N_T(e, f) = g_{U(T,f)}(e)$ für $f \in E(T)$ und $N_T(e, f) := 0$ sonst.

Für $e, f \in E(D)$ ist $N_T^2(e, f) = \sum_{g \in E(D)} N_T(e, g) N_T(g, f)$. Nun ist $N_T(e, g) \neq 0$ genau dann, wenn $g \in E(T)$ und $e \in E_D(U(T, g))$ gelten, und $N_T(g, f) \neq 0$ genau dann, wenn $f \in E(T)$ und $g \in E_D(U(T, f))$ gelten; da aber $g \in E(T)$

und $g \in E_D(U(T,f))$ schon $g = f$ impliziert, ist $N_T^2(e,f) = N_T(e,f)N_T(f,f) = N_T(e,f)$ — also $N_T^2 = N_T$. Daher gilt $N_T g = g$ für jede Spalte von N_T. Weil die von Null verschiedenen Spalten gerade die Fundamentalschnitte von T sind und diese den Schnittraum erzeugen, gilt

$$N_T g = g \text{ für jeden Schnitt } g.$$

Man sieht leicht, daß für feste e, f durch $T \mapsto T - f + e$ eine Bijektion zwischen den Spannbäumen T mit $e \in E_D(U(T,f))$ und den Spannbäumen T' mit $f \in E_D(U(T',e))$ erklärt ist. Hieraus ergibt sich, daß *die Summe der Austauschmatrizen zu den Spannbäumen von $\underline{D}$ $S := \sum_T N_T$ symmetrisch ist*: Für $e \neq f$ genügt es zur Bestimmung von $S(e,f)$, die Summation über die T mit $e \in E_D(U(T,f))$ zu erstrecken — nur dort ist $N_T(e,f) \neq 0$. Jedes derartige T trägt $g_{U(T,f)} = g_{U(T-f+e,e)}$ bei, so daß die Summe gleich der Summe aller $N_{T'}(f,e)$ über T' mit $f \in E_D(U(T',e))$ ist und darum gleich $S(f,e)$.

Da die Spalten von S im Schnittraum liegen, erhalten wir $Sf = S^\top f = 0$ für jeden Zyklus f, und weiterhin $Sg = \tau(\underline{D})g$ für jeden Schnitt g. Damit ist die Matrix $P = \frac{1}{\tau(\underline{D})} \cdot S$, also

$$P := \frac{1}{\tau(\underline{D})} \sum_T N_T$$

die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^{E(D)}$ auf B.

Eine kleine Verallgemeinerung ist im folgendem Lemma niedergelegt und erlaubt die Anwendung auf Netzwerke.

Lemma 3 *Sei D ein zusammenhängender schlingenloser Dimultigraph und sei $k \in \mathbb{R}^{E(D)}$. Sei $K \in \mathbb{R}^{E(D)\times E(D)}$ die Diagonalmatrix mit $K(e,e) = k(e)$, und*

$$P_K := \frac{1}{\tau_K} \sum_T k(T) N_T,$$

wobei sich die Summe über die Spannbäume T von $\underline{D}$ erstreckt und

$$k(T) := \prod_{e \in E(T)} k(e) \text{ und } \tau_K := \sum_T k(T)$$

definiert sei.

Dann ist KP_K symmetrisch und es gelten $P_K^\top f = 0$ für jeden Zyklus f und $P_K g = g$ für jeden Schnitt g.

Beweis. Sind T und $T' := T - e + f$ Spannbäume, so gilt $k(e)k(T) = k(f)k(T')$, und so ergibt sich für $e \neq f$

$$(KP_K)(e,f) \quad = \quad k(e)P_K(e,f) = \frac{1}{\tau_K} \cdot \sum_T k(e)k(T)N_T(e,f)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tau_K} \cdot \sum_{T'} k(f)k(T')N_{T'}(f,e) \\ &= P_K(f,e)k(f) = (P_K^\top K^\top)(e,f), \end{aligned}$$

wobei T über die Spannbäume mit $e \in E_D(T,f)$ und T' über die mit $f \in E_D(T',e)$ läuft. Also ist KP_K symmetrisch. Ist f ein Zyklus, so ist f orthogonal zu jeder Spalte von P_K, also gilt $P_K^\top = 0$, und ist g ein Schnitt, so gilt $N_T g = g$ und folglich $P_K g = \frac{1}{\tau_K} \sum_T k(T) g = g$. □

Wir können dieses Lemma nun benutzen, um uns davon zu überzeugen, daß es zu einem Netzwerk $N = (D, r, s)$ mit $r(e) \neq 0$ für alle $e \in E(D)$ stets eindeutig bestimmte f, g gibt, die den beiden KIRCHHOFF-Regeln und dem OHMSCHEN Gesetz genügen. Wir suchen also ein f im Zyklenraum, so daß $g = Rf - s$ im Schnittraum liegt, worin R die Diagonalmatrix mit $R(e,e) = r(e)$ für alle $e \in E(D)$ bezeichnet. Setzen wir $K := R^{-1}$, so ist nach Lemma 3 $P_K R = RKP_K R$ $= RP_K^\top KR = RP_K^\top$. Wenn nun f im Zyklenraum liegt und wenn zugleich $g = Rf - s$ im Schnittraum sein soll, so gilt

$$Rf - s = P_K(Rf - s) = RP_K^\top f - P_K s = -P_K s,$$

also $f = K(E - P_K)s$ und $g = -P_K s$.

*

Uns beschäftigt ab jetzt der Spezialfall "genau einer Spannungsquelle mit lauter Widerständen". Ist $N = (D, r, s)$ ein solches *spezielles Netzwerk* mit zusammenhängendem D und einer *speziellen Kante* e_0 von p nach q, also mit $r(e_0) = 0$ und $r(e) > 0, s(e) = 0$ für alle $e \in E(D) - \{e_0\}$, so läßt sich das Potentialgefälle zwischen zwei Ecken von D und damit auch g wie folgt durch Vorgabe von $f(e_0)$ bestimmen: Sei $R \in \mathbb{R}^{E(D)-\{e_0\} \times E(D)-\{e_0\}}$ definiert durch $R(e,e) = r(e)$ für alle $e \in E(D) - \{e_0\}$ und 0 überall sonst. Wir wählen $z \in V(D)$ und setzen $K = I(D-e_0) \times R^{-1} \times I(D-e_0)^\top | (V-\{z\} \times V-\{z\})$ sowie $\Delta_{x,y} := \mathrm{Cof}(K)(x,y)$ falls $x \neq z$ und $y \neq z$ und $\Delta_{x,y} := 0$ sonst. Das Potentialgefälle von $a \in V(D)$ nach $b \in V(D)$ ist dann gegeben durch

$$\frac{f(e_0)}{\det_\iota K} \cdot (-\Delta_{p,a} + \Delta_{p,b} + \Delta_{q,a} - \Delta_{q,b}) \,. \tag{1.1}$$

Eine hundert Jahre alte und leicht lesbare Herleitung findet man in [11] auf den Seiten 313 bis 316 (digital verfügbar). Da K und damit auch $\Delta_{x,y}$ nicht von e_0 abhängen, kann man, sobald man jene einmal ausgerechnet hat, die Potentialgefälle leicht für eine andere Anordnung der Spannungsquelle, also eine andere Wahl der speziellen Kante e_0, bestimmen.

Durch weitere Spezialisierung erhalten wir:

Theorem 4 *Sei $N = (D, r, s)$ ein spezielles Netzwerk mit spezieller Kante e_0 und $r(e) = 1$ für alle $e \in E(D) - \{e_0\}$. Ist $s(e_0)$ die Zahl der Spannbäume von* <u>D</u>

mit e_0, so sind alle resultierenden Ströme $f(e)$ ganzzahlig und $f(e_0)$ ist die Zahl der Spannbäume von $\underline{D}$ ohne e_0.

Beweis. Spezialisieren wir die obigen Betrachtungen auf $R = E$, $z = q$ und $(a, b) = (p, q)$, so erhalten wir $s(e_0) = -g(e_0) = f(e_0)/\tau(D - \{e_0\}) \cdot \Delta_{p,p}$ aus (1.1). Setzen wir $P := I(D)|(V(D) - \{p, q\}) \times (E(D) - \{e_0\})$, so ist nach Definition $\Delta_{p,p}$ die Determinante der Matrix $P \cdot P^\top$. Nach Theorem 1 ist dies gleich $\sum_N (\det N)^2$, wobei N alle Matrizen $P|(V(D) - \{p, q\}) \times E_0$ mit $E_0 \subseteq E(D) - \{e_0\}$ und $|E_0| = |V(D)| - 2$ durchläuft. Ähnlich wie im Beweis zu Theorem 2 ist die Determinante eines solchen N gleich ± 1, falls $E_0 \cup \{e_0\}$ Kantenmenge eines Spannbaums von $\underline{D}$ ist und 0 sonst (Übung). Also ist $\det\Delta_{p,p} = s(e_0) \geq 1$ und folglich $f(e_0)/\tau(D - \{e_0\}) = 1$. Damit ist $f(e_0) = \tau(D - \{e_0\})$, und weil mit K auch alle $\Delta_{x,y}$ in (1.1) ganzzahlig sind, sind es auch die $g(e)$ und damit die $f(e)$ für alle $e \in E(D)$. □

Ist folglich (D, r, s) ein spezielles Netzwerk mit spezieller Kante e_0 von p nach q und $r(e) = 1$ für alle $e \in E(D) - \{e_0\}$, so kann der "Gesamtwiderstand von $D - e_0$ zwischen p und q" ausgedrückt werden als Quotient der Anzahl Spannbäume von D mit e_0 und der Anzahl Spannbäume von D ohne e_0.

1.5 Quadraturen von Rechtecken

Elektrische Netzwerke sind gelegentlich Modelle für Objekte der diskreten Mathematik, die auf den ersten Blick völlig andersartig beschaffen sind. Als ein klassisches Beispiel dienen uns hier "quadrierte Rechtecke".

Eine Punktmenge der Form $[a, b) \times [c, d)$ im $\mathbb{R}^2$ mit $a < b$ und $c < d$ aus $\mathbb{R}$ heißt *Rechteck* der *Breite* $b - a$ und *Höhe* $d - c$ mit den *Horizontalsegmenten* $[a, b) \times \{c\}$ (*unten*) und $[a, b) \times \{d\}$ (*oben*). Rechtecke mit übereinstimmender Breite und Höhe heißen *Quadrate*. Eine Partition eines Rechtecks R in wenigstens zwei und nur endlich viele Quadrate heißt *Quadratur* von R; sie heißt *hübsch*, falls sie keine Quadraturen kleinerer Rechtecke enthält und die Breiten ihrer Elemente paarweise verschieden sind. Die *Horizontalsegmente* einer Quadratur von R sind die maximalen Punktmengen der Form $[a, b) \times \{c\}$, die sich als Vereinigungen von Horizontalsegmenten ihrer Quadrate darstellen lassen. Insbesondere sind die Horizontalsegmente von R selbst solche. DEHN warf 1903 die Frage auf, ob es hübsche Quadraturen von Quadraten gibt.

Aus einer Quadratur $\{Q_e : e \in E\}$ eines Rechtecks der Breite b und Höhe h läßt sich ein spezielles elektrisches Netzwerk $N = (D, r, s)$ mit spezieller Kante $e_0 \notin E$ und $E = E(D) - \{e_0\}$ gewinnen, worin $\underline{D}$ plättbar ist und $s(e_0) = h$ gilt.[4] Die Ecken von G sind dabei die Horizontalsegmente der Quadratur; die

[4] Anschaulich ist ein Multigraph plättbar, wenn er sich "überschneidungsfrei in die Ebene zeichnen läßt". Formal definiert wird dieser Begriff zum Beispiel in [6], Kapitel 3

Kante e richten wir von der Ecke, welche das obere Horizontalsegment von Q_e enthält, auf die Ecke, welche das untere enthält, die Kante e_0 richten wir vom unteren Horizontalsegment von R auf das obere. Wir behaupten, daß die resultierenden Ströme und Spannungen f, g durch f mit $f(e)$ ist Breite von Q_e für alle $e \in E$, $f(e_0) = b$ und g wie im OHMschen Gesetz beschrieben sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß f im Zyklenraum und g im Schnittraum von D liegen. Ersteres ist offensichtlich, für letzteres bezeichne $\lambda(x)$ den Abstand des Horizontalsegments x unserer Quadratur vom oberen Horizontalsegment von R; dann ist $g(e) = f(e) = \lambda(\text{ter}(e)) - \lambda(\text{init}(e))$ für alle $e \in E$ und $g(e_0) = -s(e_0) = -h = \lambda(\text{ter}(e_0)) - \lambda(\text{init}(e_0))$, so daß λ tatsächlich ein Potential für g ist und damit g im Schnittraum von D liegt.

Ist umgekehrt $h > 0$ und ein spezielles elektrisches Netzwerk $N = (D, r, s)$ mit spezieller Kante e_0, $E(D) = E \dot\cup \{e_0\}$ und mit plättbarem $\underline{G}$ und $s(e_0) = h > 0$ gegeben, so läßt sich daraus und aus den resultierenden Strömen und Spannungen f, g eine Quadratur $\{Q_e : e \in E,\ f(e) \neq 0\}$ eines Rechtecks der Höhe h und Breite $|f(e_0)|$ gewinnen, wobei Q_e die Breite $|f(e)|$ hat. Das geht so: Wir dürfen davon ausgehen, daß $f(e) > 0$ für alle $e \in E$ ist (dies läßt sich durch Löschen und Umorientieren von Kanten aus D erreichen) und betrachten eine konkrete Zeichnung von $\underline{D}$ in der Ebene. Für jedes x ordnen wir die Kanten aus $E_{\underline{D}}(x)$ linear so, daß sie im Uhrzeigersinn um x in der Zeichnung auftreten und die Kanten aus $E_D^+(x)$ einen unteren Abschnitt ("Anfangsstück") bilden (man überlege sich, daß das möglich ist). Eingangs seien alle Kanten aus E "unbehandelt" und e_0 "behandelt". Im weiteren Verlauf haben wir für die behandelten Kanten aus E bereits Quadrate Q_e gezeichnet. Ist nun x eine Ecke, so daß alle Kanten aus $E_D^-(x)$ aber keine aus $E_D^+(x)$ behandelt ist, so zeichnen wir ein Horizontalsegment $S(x)$ zu x und darunter Quadrate Q_e zu den Kanten aus E_D^-; $S(x)$ ist dabei die Vereinigung der unteren Horizontalsegmente der Quadrate zu den Kanten aus $E_D^-(x)$ falls $E_D^-(x) \neq \{e_0\}$ ist und $[0, f(e_0)] \times \{h\}$ sonst, und die Quadrate zu den Kanten aus $E_D^+(x)$ zeichnen wir hintereinander entsprechend der eingangs gewählten linearen Ordnung von $E_D^+(x)$ so, daß die Vereinigung ihrer oberen Horizontalsegmente gleich $S(x)$ ist. Alle Kanten aus $E_D^+(x)$ sind damit behandelt, und wir iterieren diesen Prozess solange noch ein geeignetes x existiert.

Um nun zu einem quadrierten *Quadrat* zu kommen, benötigen wir einen plättbaren Graphen, der eine Kante e_0 enthält, so daß die Zahl der Spannbäume mit e_0 gleich der Zahl der Spannbäume ohne e_0 ist. Solche Graphen sind allerdings sehr selten [15].

1.6 Die Adjazenzmatrix und Random Walks

Sei G ein schlingenloser Multidigraph. Für $x, y \in V$ sei $A(G)(x, y)$ die Anzahl der Kanten von x nach y in G. Dies definiert die *Adjazenzmatrix* $A(G) =: A \in$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{V\times V}$ von G. Sie besitzt die folgende *Fundamentaleigenschaft*: Ihre ℓ-te Potenz A^{ℓ} enthält an Stelle (x,y) die Anzahl der Kantenzüge von x nach y in G. Dies ist zunächst klar für $A^0 = I$, und ist $A^{\ell}(x,z)$ die Zahl der Kantenzüge von x nach z der Länge ℓ in G, so ist $A^{\ell+1}(x,y) = \sum_{z\in V} A^{\ell}(x,z)A(z,y)$ die Zahl der Kantenzüge von x nach y der Länge $\ell+1$ in G, denn jeder derartige Kantenzug läßt sich aus einem Kantenzug von x nach z in G auf genau $A(z,y)$ viele Weisen gewinnen, und solche sind für verschiedene z stets verschieden.

Von besonderer Bedeutung in der angewandten Informatik ist die folgende stochastische Spielart der Fundamentaleigenschaft. Konstruieren wir M aus A, indem wir die x-te Zeile durch $d_G^+(x)$ teilen falls $d_G^+(x) > 0$ ist und sie andernfalls durch eine Zeile aus $|V|$ Einträgen $1/|V|$ ersetzen, so ist M die Übergangsmatrix eines endlichen diskreten MARKOV-Prozesses 1ter Ordnung: Denken wir uns einen Läufer (oder Surfer), der sich von seinem Standpunkt X_t zum Zeitpunkt t zufällig entlang einer Kante nach X_{t+1} bewegt bzw. nach irgendeiner Ecke X_{t+1} springt, falls keine Kante von X_t ausgeht; dabei wird jede Zielecke mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt, also mit $1/d_G^+(x)$ bzw. $1/|V|$. Die X_t sind Zufallsvariablen, und bei einer durch $s(x) = P(X_0 = x)$, $x \in V$, gegebenen Verteilung von X_0 ist die Verteilung von X_t durch $P(X_t = x) = (M^t \cdot s)(x)$ bestimmt (Übung). Unter geeigneten Voraussetzungen konvergiert die Folge der X_t gegen die sogenannte *stationäre Verteilung* des Prozesses. Diese und ähnliche MARKOV-Prozesse werden zur Schätzung der Popularität[5] von Webseiten herangezogen.

1.7 Tuttes Beweis seines Faktorsatzes

Eine Matrix A aus $R^{n\times n}$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $A^{\top} = -A$ gilt. Die Determinante von A ist dann das Quadrat der PFAFF*schen Determinante* PfA von A, die durch

$$\mathrm{Pf}A := \sum_{\sigma\in X_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{\lfloor n/2\rfloor} A(\sigma(2i-1),\sigma(2i))$$

definiert ist, wobei X_n für ungerades n leer und für gerades n die Menge der $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$ für alle $i \in \{1,\ldots,n/2\}$ und $\sigma(1) < \sigma(3) < \sigma(5) < \ldots < \sigma(n-1)$ sei (Beweis z. Bsp. in [2]). X_n entspricht bijektiv der Menge Y_n der Partitionen von $\{1,\ldots,n\}$ in 2-elementige Teilmengen vermöge $f : X_n \to Y_n$, $f(\sigma) = \{\{\sigma(2i-1),\sigma(2i)\} : i \in \{1,\ldots,n/2\}\}$.

Sei jetzt $V := \{1,\ldots,n\}$. Für festes A und $j_1,\ldots,j_\ell \in V$ schreiben wir abkürzend $P_{j_1\cdots j_\ell} := \mathrm{Pf}A|((V-\{j_1,\ldots,j_\ell\})\times(V-\{j_1,\ldots,j_\ell\}))$. TUTTE stellt dem Beweis seines Faktorsatzes eine kleine Rechnung voran, die

$$P \cdot P_{ijk\ell} \quad = \quad \pm P_{ij}P_{k\ell} \pm P_{ik}P_{j\ell} \pm P_{i\ell}P_{jk} \tag{1.2}$$

[5]nicht: Bedeutsamkeit!

zeigt und auf JACOBIs Satz über die Determinante der Minoren der Cofaktormatrix beruht[6]; die konkreten Vorzeichen in (1.2) hängen von i, j, k, ℓ ab, sind aber in der späteren Anwendung bedeutungslos.

Sei jetzt speziell R der Polynomring $\mathbb{Q}[x_{ij} : i < j$ aus $V]$. Ist G irgendein Graph auf V, so sei A_G die schiefsymmetrische Matrix aus $R^{V\times V}$ mit $A_G(i,j) = x_{ij}$ falls $ij \in E(G)$ und 0 sonst für $i < j$ aus V, und wir setzen $P(G) := \mathrm{Pf}A_G$. Mit $A = A_G$ und diesen Bezeichnungen ist $P(G - \{j_1, \dots, j_\ell\}) = \pm P_{j_1\cdots j_\ell}$. Die entscheidende Beobachtung ist nun, daß G genau dann einen 1-Faktor hat, wenn $P \neq 0$ ist.

Theorem 5 (Faktorsatz von Tutte) *Ein Graph $G = (V, E)$ hat genau dann einen 1-Faktor, wenn für jedes $S \subseteq V$ $G - S$ höchstens $|S|$ Komponenten ungerader Mächtigkeit besitzt.*

Beweis. Nennen wir $S \subseteq V$ *schlecht*, falls $G - S$ mehr als $|S|$ Komponenten ungerader Mächtigkeit hat. Besitzt G einen 1-Faktor H und ist $S \subseteq V$, so gibt es zu jeder Komponente C von $G-S$ mit $|C|$ ungerade wenigstens eine Kante von C nach S in H, daher ist S nicht schlecht. Besitzt dagegen G keinen 1-Faktor, so dürfen wir annehmen, daß $V = \{1, \dots, n\}$ mit geradem n ist (andernfalls ist $\emptyset$ schlecht) und solange Kanten zu G hinzufügen, bis die Hinzunahme jeder weiteren Kante einen Graphen mit 1-Faktor liefern würde. Besitzt der so entstandene Graph G^+ ein schlechtes S, so ist S auch schlecht für G, denn durch Löschung von Kanten kann die Zahl der ungeraden Komponenten eines Graphen nicht sinken. Sei nun S die Menge aller $i \in V$, die zu allen anderen Ecken aus V benachbart sind. Wenn S nicht schlecht wäre, so könnte nicht jede Komponente von $G^+ - S$ vollständig sein (da sonst leicht ein 1-Faktor von G^+ zu konstruieren wäre). Daher gibt es einen Weg ijk in $G^+ - S$ zwischen zwei nichtbenachbarten Ecken i, k, sowie eine weitere zu j nichtbenachbarte Ecke ℓ. Da $G^+ - \{i, k\}$ und $G^+ - \{j, \ell\}$ jeweils 1-Faktoren haben, G^+ und $G^+ - \{i, j\}$ und $G^+ - \{j, k\}$ dagegen nicht, erhalten wir mit $A = A_{G^+}$ wie zu Beginn dieses Abschnitts: $P_{ik} \cdot P_{j\ell} \neq 0$ und $P = P_{ij} = P_{jk} = 0$, im Widerspruch zu (1.2). Also ist S schlecht. □

Da es auch einen einfachen direkten Beweis gibt, der die Existenz von Ecken i, j, k, ℓ wie im letzten Teil des Beweises von Theorem 5 zum Widerspruch bringt, ist TUTTEs ursprünglicher Ansatz nicht weiter propagiert worden.

[6] JACOBIs Satz (siehe [2], Seite 97) impliziert, daß für eine Matrix $A \in R^{V\times V}$ und $X \subseteq V$ gilt: $\mathrm{detCof}(A)|X \times X = (\det A)^{|X|-1}\det(A|(V - X \times V - X))$. Ist nun $|V| = n$ gerade und A schiefsymmetrisch mit den Cofaktoren $C_{ij} := \mathrm{Cof}(A)(i,j)$ und bezeichnen wir mit $\Delta_{j_1\cdots j_\ell}$ die Determinante der — ebenfalls schiefsymmetrischen — Matrix $A|((V - \{j_1, \dots, j_\ell\}) \times (V - \{j_1, \dots, j_\ell\}))$, so erhalten wir aus JACOBIs Satz zunächst $\Delta\Delta_{ij} = \mathrm{detCof}(A)|\{i,j\} \times \{i,j\} = \Delta_i\Delta_j - C_{ij}C_{ji} = C_{ij}^2$, also $PP_{ij} = \pm C_{ij}$, sowie $\Delta^3\Delta_{ijk\ell} = \mathrm{detCof}(A)|\{i,j,k,\ell\} \times \{i,j,k,\ell\} = (C_{ij}C_{k\ell} - C_{ik}C_{j\ell} + C_{i\ell}C_{jk})^2$, woraus (1.2) folgt.

1.8 Der Satz von Falikman und Egoryčev

Wann besitzt ein gegebener Graph G einen 1-Faktor? Der Satz von TUTTE löst dieses Problem, und man kann erschwerend nach der *Anzahl* der 1-Faktoren von G fragen. Gute untere Schranken für diese Zahl zu finden, ist im allgemeinen schwer. Wir wollen dieses Problem für den Spezialfall von bipartiten regulären Graphen behandeln.

Sei $M \in R^{A\times B}$. Die *Permanente* von M ist definiert durch

$$\mathrm{per} M = \sum_{\sigma\in S_{A,B}} \prod_{a\in A} M(a,\sigma(a)).$$

Ist nun G bipartit mit den Klassen A, B, so kann man ihm die $\{0,1\}$-Matrix $M_{A,B}(G) := M \in R^{A\times B}$ mit $M(a,b) = 1$ falls $ab \in E(G)$ und $M(a,b) = 0$ sonst zuordnen. (Dies liefert eine Bijektion zwischen den bipartiten Graphen mit Klassen A, B und den $\{0,1\}$-Matrizen aus $R^{A\times B}$.)

Natürlich kann G nur dann einen 1-Faktor haben, wenn $|A| = |B|$ gilt, wenn also M quadratisch ist. In diesem Fall ist die Zahl der 1-Faktoren gleich per$M$, denn die 1-Faktoren entsprechen bijektiv den $\sigma \in S_{A,B}$ mit $M(a,\sigma(a)) = 1$ für alle $a \in A$. Die Berechnung von per$M$ ist im allgemeinen ein schweres Problem. Für den Fall, daß G k-regulär ist, kann man eine untere Schranke angeben. Sie beruht auf der Lösung einer Frage von VAN DER WAERDEN von 1926 durch FALIKMAN und EGORYČEV, die sie Ende der 1970er unabhängig voneinander fanden[7]. Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ heißt *doppeltstochastisch*, falls alle Einträge nichtnegativ sind und die Summe der Einträge jeder Zeile oder Spalte gleich 1 ist. Bezeichne Ω_n die Menge all dieser Matrizen. Intuitiv ist die Permanente einer solchen Matrix dann besonders klein, wenn die Einträge möglichst gleichverteilt, also alle gleich $1/n$ sind; dann ist sie gleich $n!/n^n$, und VAN DER WAERDEN hat vermutet, daß dies tatsächlich eine untere Schranke für die Permanente der Matrizen aus Ω_n ist.

Theorem 6 (Satz von Falikman/Egoryčev) *Die Permanente einer doppeltstochastischen $n \times n$-Matrix ist wenigstens $n!/n^n$.*

Aus Theorem 6 ergibt sich sofort, daß ein k-regulärer bipartiter Graph G mit zwei n-elementigen Klassen A, B wenigstens $k^n n!/n^n$ viele 1-Faktoren hat: Die Matrix $\frac{1}{k}\cdot M_{A,B}(G)$ ist nämlich doppeltstochastisch, und so ist per$M_{A,B}(G) = k^n \cdot \mathrm{per}(\frac{1}{k}\cdot M_{A,B}(G)) \geq k^n \cdot n!/n^n$. Hieraus ergibt sich auch eine Schranke für die Anzahl $f_k(G)$ aller k-Kantenfärbungen eines solchen Graphen: Die erste Farbklasse einer Färbung können wir (als 1-Faktor von G) auf $k^n n!/n^n$ Weisen gewinnen, die zweite auf $(k-1)^n n!/n^n$ Weisen (als 1-Faktor des $k-1$ regulären Graphen G ohne die erste Farbklasse), die dritte auf $(k-2)^n n!/n^n$ Weisen undsofort. Wir erhalten $f_k(G) \geq (k!)^n (n!/n^n)^k$. Diese Schranke ist asymptotisch gleich der oberen Schranke $k!^n$ für $f_k(G)$ (Übung).

[7] und dafür 1982 den FULKERSON–Preis erhielten

1.9 Starke Regularität

Kommen wir zurück zur Adjazenzmatrix. Sei G immer ein Graph, A seine Adjazenzmatrix über R, und seien $J \in R^{V \times V}$, $j \in R^V$ konstant $+1$. Einige strukturelle Eigenschaften von G lassen sich elegant durch Matrixgleichungen, in denen die Adjazenzmatrix oder ihre Potenzen auftreten, beschreiben. So ist etwa G genau dann k-regulär, wenn $AJ = kJ$ gilt, G ist genau dann zusammenhängend, wenn $A^{|V|-1}$ nirgends Null ist, etc.

Ein einfacher v-eckiger Graph heißt *stark regulär* mit Parametern (v, k, λ, μ) oder ein (v, k, λ, μ)-*Graph*, falls er k-regulär ist, je zwei benachbarte Ecken genau λ viele gemeinsame Nachbarn und je zwei nicht benachbarte Ecken genau μ viele gemeinsame Nachbarn haben. Diese Eigenschaften lassen sich ebenfalls durch zwei Matrixgleichungen ausdrücken: Genau dann ist G ein (v, k, λ, μ)-Graph, wenn seine Adjazenzmatrix A

$$AJ = kJ \text{ und } A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)E = \mu J \tag{1.3}$$

erfüllt (Übung).

Aus derartigen Gleichungen lassen sich oft weitere Relationen zwischen den Parametern herleiten: Wegen $AJ = kJ$, $EJ = 1J$, und $JJ = vJ$ erhalten wir durch Multiplikation mit J aus der rechten Gleichung $AAJ + (\mu - \lambda)AJ + (\mu - k)J = kAJ + (\mu - \lambda)kJ + (\mu - k)J = k^2J + (\mu - \lambda)kJ + (\mu - k)J = \mu JJ = \mu vJ$, also

$$k(k - \lambda - 1) = \mu(v - k - 1).$$

Theorem 7 (Spektrum stark regulärer Graphen) *Sei A die Adjazenzmatrix eines zusammenhängenden unvollständigen (v, k, λ, μ)-Graphen G. Dann besitzt A genau drei Eigenvektoren, und zwar*

$$k \textit{ und } \alpha, \beta := \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda - \mu \ \pm \ \sqrt{((\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu))} \right),$$

jeweils mit den Vielfachheiten

$$1 \textit{ und } f, g := \frac{1}{2} \cdot \left(v - 1 \ \pm \ \frac{(v-1)(\mu - \lambda) - 2k}{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu)}} \right).$$

Beweis. Weil G zusammenhängend und k-regulär ist, ist k Eigenwert von A mit Vielfachheit 1 (Übung) und $\mathrm{Eig}_A(k) =< j >$. Ist nun $\alpha \neq k$ Eigenwert von A und $x \in \mathrm{Eig}_A(\alpha) - \{0\}$, so folgt $x^\top j = 0$, da A symmetrisch ist, und wir erhalten durch Multiplikation von (1.3) mit x die Gleichung $(\alpha^2 + (\mu - \lambda) \cdot \alpha + (\mu - k))x = \mu Jx = 0$, also $\alpha^2 + (\mu - \lambda) \cdot \alpha + (\mu - k) = 0$. Diese Gleichung hat die zwei Lösungen

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda - \mu \pm \sqrt{D := ((\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu))} \right),$$

weil $D > 0$ ist: Da nämlich G unvollständig ist, gilt $k \geq \mu$, und im Fall der Gleichheit folgt $\lambda \leq k-1 < \mu$, da der zusammenhängende unvollständige Graph G wenigstens eine Kante besitzt. — Seien f, g die Vielfachheiten der Eigenwerte α bzw. β von A; folglich ist $1+f+g=v$, und, nach der Spurgleichung,[8] $1 \cdot k + \alpha \cdot f + \beta \cdot g = \mathrm{Spur} A = 0$. Durch Einsetzen von $g = (v-1)-f$ erhält man aus der letzten Gleichung $(\alpha-\beta) \cdot f = -\beta \cdot (v-1) - k$, und infolge $\alpha - \beta = \sqrt{D}$ daraus $f = -(\beta(v-1))/\sqrt{D} - k/\sqrt{D} = \frac{1}{2} \cdot ((v-1) + ((\mu-\lambda)(v-1)-2k)/\sqrt{D})$. Hieraus ergibt sich auch $g = (v-1)-f$ wie behauptet. $\square$

Die Hauptanwendung dieses Satzes liegt im Nachweis der Nichtexistenz von (v, k, λ, μ)-Graphen für bestimmte Parameter, wobei man vor allem ausnutzt, *daß f und g ganze Zahlen sind*. Ist zum Beispiel $f \neq g$, so ist $\sqrt{D} = (v-1)(\mu - \lambda)/2(f-g)$ rational und und folglich D das Quadrat einer ganzen Zahl. Eine solche Bedingung kann vernichtend sein, wie das folgende Problem aus der extremalen Graphentheorie zeigt.

Der Abstand $d_G(a, b)$ zweier Ecken a, b im Graphen G ist die Länge eines kürzesten a, b-Weges in G und $+\infty$, falls kein a, b-Weg existiert. Der größte in einem Graphen auftretende Abstand ist sein *Durchmesser*. Mit $N_G^i(x)$ bezeichnen wir die Ecken des Abstands i von $x \in V(G)$ in G. Ist nun G k-regulär und $x \in V(G)$, so ist $|N_G^1(x)| = k$ und $|N_G^i(x)| \leq |N_G^{i-1}(x)| \cdot (k-1)$ für $i \geq 2$ mit Gleichheit nur dann wenn je zwei Ecken aus $N_G^{i-1}(x)$ weder benachbart sind noch einen gemeinsamen Nachbarn in in N_G^i haben. Für einen k-regulären Graph G des Durchmessers d gilt folglich

$$|V(G)| \leq 1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k-1)^i.$$

Im Fall der Gleichheit nennen wir G einen MOORE-*Graphen vom Typ* (k, d). Offensichtlich ist K_{k+1} der einzige MOORE-Graphen vom Typ $(k, 1)$. Für $d = 2$ ergibt sich eine Überaschung.

Theorem 8 *Existiere ein* MOORE-*Graph vom Typ* $(k, 2)$. *Dann ist* $k \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Beweis. Sei G ein MOORE-Graph vom Typ $(k, 2)$. Nach Definition gilt $|V(G)| = k^2 + 1$, und G hat Durchmesser 2, woraus $k \geq 2$ folgt. Da G keine Kreise der Länge 3 enthält, haben je zwei benachbarte Ecken keinen gemeinsamen Nachbarn, und weil G keine Kreise der Länge 4 enthält, aber den Durchmesser 2 hat, haben je zwei nichtbenachbarte Ecken genau einen gemeinsamen Nachbarn. Folglich ist G stark regulär mit den Parametern $(k^2+1, k, \lambda := 0, \mu := 1)$. Betrachten wir die zugehörigen $\alpha, \beta = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k-3})$ und $f, g = \frac{1}{2}(k^2 \pm (k^2 - 2k)/\sqrt{4k-3})$ aus Theorem 7. Im Fall $f = g$ erhalten wir $k^2 - 2k = 0$, also $k = 2$. Im Fall $f \neq g$ ist $4k - 3 = s^2$ für eine ganze Zahl s. Wir multiplizieren die Spurgleichung $1 \cdot k + f \cdot \alpha + g \cdot \beta$ mit 32 und setzen $g = k^2 - f$ und $\alpha, \beta = (-1 \pm s)/2$

[8] Die Summe über die Diagonalelemente einer komplexen Matrix ist gleich der Summe aller Eigenwerte gewichtet nach deren Vielfachheit.

ein; so entsteht $0 = 32k + 16f(s-1) + ((4k)^2 - 16f)(-s-1)$. Durch Einsetzen von $4k = s^2 + 3$ erhalten wir $8s^2 + 24 + 16fs + (s^2+3)^2(-s-1) + 16fs = 0$. Fassen wir die rechte Seite als Polynom 5ten Grades in s mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ auf, so stellen wir fest, daß der Koeffizient vor s^0 gleich $24 - 9 = 15$ ist. Also ist $0 = zs - 15$ für ein $z \in \mathbb{Z}$, daher ist s ein Teiler von 15 und darum aus $\{1, 3, 5, 15\}$. Für $k = (s^2+3)/4$ erhalten wir jeweils $k = 1$, $k = 3$, $k = 7$, $k = 57$. □

Für $k \in \{2, 3, 7\}$ existiert jeweils genau ein MOORE-Graph vom Typ $(k, 2)$: Der Kreis der Länge 5, der PETERSEN-Graph und der HOFFMAN-SINGLETON-Graph [4]. Es ist nicht bekannt, ob ein MOORE-Graph vom Typ $(57, 2)$ existiert; HIGMAN hat gezeigt, daß ein solcher Graph — im Gegensatz zu den drei genannten MOORE-Graphen — nicht eckentransitiv sein kann[9]. Dieses Problem gehört zu den wichtigsten ungelösten Fragen der Theorie.

1.10 Übungen

1. Kann im Lemma von GESSEL & VIENNOT / LINDSTRÖM auf die Voraussetzung, daß G azyklisch ist, verzichtet werden?

2. Seien G der nach Norden und Osten gerichtete Gittergraph, $x \in \mathbb{Z}$ und $A \subseteq \{0\} \times \mathbb{Z}$, $B \subseteq \{x\} \times \mathbb{Z}$ zwei gleichgroße endliche "vertikale" Teilmengen von $V(G)$. Wieviele kreuzungsfreie A, B-Verbindungen gibt es in G?

3. Wieviele Spannbäume besitzt ein vollständig bipartiter Graph?

4. Sei D ein schlingenloser Multidigraph. Zeigen Sie, daß $g \in \mathbb{R}^{E(D)}$ genau dann im Schnittraum von D liegt, wenn für jeden geschlossenen Kantenzug W von $\underline{D}$ die Summe der $g(e)$ aller Vorwärtskanten e gleich der Summe der $g(e)$ aller Rückwärtskanten e von W ist.

   Hinweis. Zur Rückrichtung wähle man einen maximalen Wald in $\underline{D}$ und konstruiere zunächst ein $\lambda \in \mathbb{R}^{V(D)}$ mit $\lambda(b) - \lambda(a) = g(ab)$ für alle $ab \in E(D)$ mit $ab \in E(T)$.

   Lösung. Ist g im Schnittraum, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^V$ mit $g = I(D)^\top \lambda$. In der Differenz der $g(e)$ an Vorwärtskanten und an Rückwärtskanten de Kantenzuges $W = x_0, e_1, x_1, \ldots, e_\ell, x_\ell$ trägt jede Kante e_i den Wert $\lambda(x_i) - \lambda(x_{i-1})$ bei, was in summa $\lambda(x_0) - \lambda(x_\ell)$ ergibt, also 0, falls W geschlossen ist. Ist nun andererseits D gegeben und T ein maximaler Wald von $\underline{D}$, so läßt sich induktiv zunächst ein $\lambda \in \mathbb{R}^{V(G)}$ konstruieren mit $\lambda(y) - \lambda(x) = g(e)$ falls $e \in E(T)$ ist und $e = xy$ in $E(D)$. Jede Kante ab in $E(D) - E(T)$ liegt auf einem Kreis W in $\underline{T + e}$, und wenn die Summe der $g(e)$ seiner Vorwärtskanten gleich der seiner Rückwärtskanten ist,

[9] Ein Graph heißt *eckentransitiv*, falls seine Automorphismengruppe transitiv auf seiner Eckenmenge operiert, d.h. zu je zwei seiner Ecken ein Automorphismus existiert, der die eine auf die andere abbildet.

dann ist $\lambda(b) - \lambda(a) = g(ab)$. Folglich ist $\lambda(b) - \lambda(a) = g(ab)$ für alle $ab \in E(D)$ und daher $I(D)^\top \lambda = g$.

5. Sei D eine Orientierung des schlingenlosen Multigraphen G. Zeigen Sie, daß die im Abschnitt 1.4 definierte Abbildung $B_G : \mathbb{R}^{E(D)} \to \mathbb{R}^{\vec{E}(G)}$ den Zyklenraum bzw. Schnittraum von D auf den Zyklenraum bzw. Schnittraum der Richtungen von G abbildet.

6. (+) Zeigen Sie, daß zu jedem ein Netzwerk $N = (D, r, s)$, in dem die Kanten mit $r(e) = 0$ keine Kreise in $\underline{D}$ bilden, genau ein Paar f, g von Strömen und Spannungen existiert, daß dem OHMschen Gesetz und den beiden KIRCHHOFF-Regeln genügt.

7. Sei D ein schlingenloser Multigraph, e_0 eine Kante von p nach q, und $P := I(D)|(V - \{p, q\}) \times (E - \{e_0\})$. Zeigen Sie für $E_0 \subseteq E(D) - \{e_0\}$ mit $|E_0| = |V(D)| - 2$, daß $\det P|(V - \{p, q\}) \times E_0$ gleich ± 1 ist wenn $E_0 \cup \{e_0\}$ Kantenmenge eines Spannbaums von $\underline{D}$ ist und 0 sonst.

8. Die WHEATSTONE-Brücke ist ein spezielles Netzwerk $N = (D, r, s)$, wobei $D = (\{a, b, c, d\}, \{ab, ac, bd, cd, da\})$ mit spezieller Kante $e_0 := da$ ist. Unter welchen Bedingungen verschwindet das Potentialgefälle von b nach c?

9. K_4^- bezeichne den vollständigen Graphen auf vier Ecken, vermindert um genau eine Kante. Bis auf Isomorphie gibt es genau drei Möglichkeiten, ihn durch Hinzufügen einer Kante e_0 mit zwei Endecken zu einem Multigraphen zu erweitern. Alle drei Resultate sind plättbar. Betrachten Sie jeweils eine beliebige Orientierung und das resultierende spezielle Netzwerk mit spezieller Kante e_0 und Widerstand 1 auf allen von fünf von e_0 verschiedenen Kanten und konstruieren Sie daraus quadrierte Rechtecke.

10. (+) Zeigen Sie, daß die am Ende des Abschnitts 1.5 angegebene Konstruktion ein quadriertes Rechteck liefert.

11. Beweisen Sie die Aussage über die Verteilung der Zufallsvariablen X_t des im Abschnitt 1.6 beschriebenen MARKOV-Prozesses.

12. Sei $k \geq 1$ und A die Adjazenzmatrix eines k-regulären Graphen mit wenigstens einer Ecke. Zeigen Sie, daß k Eigenwert von A mit Vielfachheit $|\mathcal{C}(G)|$ ist.

    Hinweis. Zeigen Sie die Behauptung zunächst für zusammenhängendes G, etwa mit Hilfe des Matrix-Baum-Satzes und des Kern-Bild-Satzes. Die Tatsache, daß die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer symmetrischen Matrix übereinstimmen, darf benutzt werden.

13. Die entscheidende Beobachtung im Beweis des TUTTEschen Faktorsatzes war es, daß G genau dann einen 1-Faktor hat, wenn $\mathrm{Pf}A_G$ nicht 0 ist. Gilt

das im allgemeinen auch dann, wenn man anstelle von A_G einfach die schiefsymmetrische Matrix in $\mathbb{Q}^{V \times V}$ mit $A_{ij} = 1$ falls $ij \in E(G)$ und 0 sonst für $i < j$ aus V betrachtet?

14. Zeigen Sie, daß ein bipartiter k-regulärer Graph mit $2n$ Ecken höchstens $k!^n$ viele k-Kantenfärbungen besitzt.

15. (-) Der *Komplementärgraph* eines Graphen G ist der Graph auf $V(G)$, in dem zwei verschiedene Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in G nicht sind. Zeigen Sie, daß der Komplementärgraph eines (v, k, λ, μ)-Graphen stark regulär ist und bestimmen Sie seine Parameter.

16. Zeigen Sie, daß ein einfacher v-eckiger Graph genau dann ein (v, k, λ, μ)-Graph ist, wenn seine Adjazenzmatrix den beiden Gleichungen aus (1.3) genügt.

17. Bestimmen Sie diejenigen Tripel (v, k, λ), für die ein (v, k, λ, λ)-Graph existiert.

Kapitel 2

Eigenwertmethoden

Das *Spektrum* eines Graphen sei die absteigende Folge $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \ldots \geq \lambda_{|G|}(G)$ der Eigenwerte seiner Adjazenzmatrix, wobei $|G| := |V(G)|$. In diesem Kapitel wollen wir den Zusammenhang zwischen dem Spektrum eines Graphen und seinen strukturellen Eigenschaften beleuchten.

Für unvollständige zusammenhängende stark reguläre Graphen können wir das Spektrum aus Theorem 7 gewinnen. So hat zum Beispiel der PETERSEN-Graph das Spektrum

$$3, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{\text{5-fach}}, \underbrace{-2, -2, -2, -2}_{\text{4-fach}}.$$

Es hat sich eingebürgert, die etwas kürzere *Wortschreibweise*, also

$$3^1\, 1^5\, (-2)^4,$$

zu verwenden. Der Kreis C_5 der Länge 5 hat in dieser Schreibweise folglich Spektrum $2^1\, (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2\, (\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^2$. Der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$ hat als $(2n, n, 0, n)$-Graph das Spektrum $n^1\, 0^{2n-2}\, (-n)^1$. Der vollständige Graph auf n Ecken hat das Spektrum $(n-1)^1\, (-1)^{n-1}$, denn das charakteristische Polynom seiner Adjazenzmatrix $A = J - E$ ist $\det(A - \lambda E) = ((n-1) - \lambda)(-1 - \lambda)^{n-1}$ (Übung), undsoweiter. Tabellen der Spektren aller Graphen mit höchstens fünf und aller Bäume mit höchstens 10 Ecken findet man in [5]; Graphen gleichen Spektrums heißen *iso-* oder *kospektral*, und man kann diesen Tabellen entnehmen, daß es nichtisomorphe isospektrale Graphen gibt: Der Stern $K_{1,4}$ und die disjunkte Vereinigung $K_1 \,\dot\cup\, C_4$ eines K_1 und eines Kreises C_4 der Länge 4 haben beide das Spektrum $(-2)^1\, 0^3\, 2^1$. Ein Graph, der zu jedem ihm isospektralen Graphen isomorph ist, heißt *spektral eindeutig*; der Nachweis spektraler Eindeutigkeit ist schwierig und gelang bislang nur für wenige unendliche Familien von (Isomorphieklassen von) Graphen sowie für einige spezielle Graphen, zum Beispiel für solche mit höchstens 4 Ecken.

2.1 Der Satz von Perron und Frobenius für symmetrische Matrizen

Wie kann man Aufschluß über das Spektrum eines Graphen gewinnen? Ein fundamentaler Satz über die Eigenwerte nichtnegativer reeller Matrizen — wie zum Beispiel der Adjazenzmatrix eines Graphen — besagt, daß eine reelle nichtnegative Matrix A einen reellen Eigenwert r besitzt, so daß alle Eigenwerte von A in der Kreisscheibe mit Radius r um 0 in $\mathbb{C}$ liegen. Wir beweisen diesen Klassiker von PERRON und FROBENIUS zusammen mit einigen zusätzlichen hier relevanten Fakten für den symmetrischen Fall.

Das *Spektrum* einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die absteigende Folge $\lambda(A) = \lambda_i(A), \dots, \lambda_n(A)$ ihrer (bekanntlich reellen) Eigenwerte. Stellen wir $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ in einer korrespondierenden Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ dar, so ist für $x \neq 0$ der sogenannte RAYLEIGH-*Quotient* gegeben durch

$$\frac{x^\top Ax}{x^\top x} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2},$$

so daß insbesondere $\lambda_1(A) \geq \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \geq \lambda_n(A)$ für jedes $x \neq 0$ gilt.

Da man die Adjazenzmatrix eines unzusammenhängenden Graphen durch simultanen Zeilen-/Spaltentausch auf Blockdiagonalgestalt bringen kann, wobei die Blöcke die Adjazenzmatrizen der Komponenten sind, und da diese Prozedur das Spektrum der Matrix nicht verändert, ergibt sich das Spektrum eines unzusammenhängenden Graphen unmittelbar aus den Spektren seiner Komponenten. Wir dürfen daher im folgenden immer annehmen, daß die betrachteten Graphen zusammenhängend sind bzw. die auftretenden Adjazenzmatrizen unzerlegbar: $A \in R^{V\times V}$ heißt *unzerlegbar*, falls keine Partition von V in zwei Mengen X, Y existiert mit $A|X \times Y = 0$. Damit können wir den Satz von PERRON und FROBENIUS für den Spezialfall symmetrischer unzerlegbarer Matrizen formulieren:

Theorem 9 (Satz von Perron und Frobenius) *Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq 0}$ symmetrisch und unzerlegbar und sei $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ die absteigende Folge ihrer Eigenwerte. Dann gilt für $n \geq 2$*

(i) $\lambda_1(A)$ ist positiv, hat die Vielfachheit 1, ist betragsmäßig maximaler Eigenwert und zugleich der einzige Eigenwert, der einen (überall) positiven Eigenvektor besitzt, und

(ii) $\lambda_n(A) = -\lambda_1(A)$ dann und nur dann, wenn A sich durch simultanes Zeilen-/Spaltentauschen in eine Matrix der Blockgestalt $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$ überführen läßt. In diesem Fall hat $\lambda_n(A)$ ebenfalls Vielfachheit 1.

Beweis. Sei $V := \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_i := \lambda_i(A)$ für alle $i \in V$. Zu $x \in \mathbb{R}^V$ sei $|x| \in \mathbb{R}^V$ definiert durch $|x|(i) := |x(i)|$ für alle $i \in V := \{1, \ldots, n\}$. Ist x ein beliebiger von Null verschiedener normierter Eigenvektor zu x, so gilt $\lambda_1 \geq |x|^\top A|x| \geq x^\top Ax = \lambda_1$. Daher ist auch $|x| \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Wäre $X := \{i \in V : |x|(i) > 0\}$ nicht gleich V, so wäre $X, Y := V - X$ eine Partition von V. Einschränken der Gleichung $A|x| = \lambda_1|x|$ auf die Zeilen aus Y liefert $(A|x|)\,|Y = (A|Y \times X) \cdot |x|\,|X + (A|Y \times Y) \cdot |x|\,|Y = (A|Y \times X) \cdot |x|\,|X = (\lambda_1|x|)\,|Y = 0$, also $A|Y \times X = 0$, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von A. Also ist $|x|$ überall positiv. Da x ein beliebiger normierter Eigenvektor zu λ_1 war, folgt zugleich, daß *jeder* von 0 verschiedene überall nichtnegative Eigenvektor zu λ_1 überall positiv sein muß.

Wegen $\sum_{i=1}^n \lambda_i = Spur A = 0$ ist $\lambda_1 \geq 0$, und $\lambda_1 = 0$ würde $A|x| = 0$ und somit $A = 0$ nach sich ziehen, im Widerspruch zur Unzerlegbarkeit von A. Also ist λ_1 positiv. Hätte λ_1 nicht die Vielfachheit 1, so gäbe es einen zu $|x|$ orthogonalen normierten Eigenvektor y zu λ_1. Wie eben ist $|y|$ Eigenvektor zu λ_1 und darum auch $y + |y|$. $y + |y|$ ist überall nichtnegativ, also nach dem ersten Absatz gleich 0 oder überall positiv. Ist $y + |y| = 0$ so ist y überall negativ; andernfalls ist mit $y + |y|$ auch y überall positiv. Also ist $|x|^\top y < 0$ oder $|x|^\top y > 0$, im Widerspruch zur Wahl von y. Für $i > 1$ und einen beliebigen Eigenvektor y zu λ_i gilt infolgedessen $|x|^\top y = 0$, so daß y nicht überall positiv ist. Ist y normiert, so erhalten wir außerdem $\lambda_1 \geq |y|^\top A|y| \geq |y^\top Ay| = |\lambda_i|$. Damit sind die Aussagen in (i) bewiesen.

Zum Nachweis des zweiten Teils gelte zunächst $\lambda_n = -\lambda_1$. Wir betrachten einen normierten Eigenvektor y zu λ_n und erhalten $\lambda_1 \geq |y|^\top A|y| \geq |y^\top Ay| = |\lambda_n| = \lambda_1$ (denn $\lambda_1 > 0$). Folglich ist $|y|$ Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 und, weil λ_1 die Vielfachheit 1 hat, *gleich* $|x|$. Sei $X := \{i \in V : y(i) = |x|(i)\}$ und $Y := V - X = \{i \in V : y(i) = -|x|(i)\}$. Die Einschränkung der Gleichung $\lambda_1|x| + \lambda_n y = \lambda_1(|x| - y) = A|x| + Ay = A \cdot (|x| + y)$ auf die Zeilen aus X liefert $0 = A|X \times X \cdot (|x| + y)|X + A|X \times Y \cdot (|x| + y)|Y = A|X \times X \cdot (|x| + y)|X$, so daß $A|X \times X = 0$ gilt. Die Einschränkung der Gleichung $\lambda_1|x| - \lambda_n y = \lambda_1(|x| + y) = A|x| - Ay = A \cdot (|x| - y)$ auf Y liefert entsprechend $0 = A|Y \times X \cdot (|x| - y)|X + A|Y \times Y \cdot (|x| - y)|Y = A|Y \times Y \cdot (|x| - y)|Y$, also $A|Y \times Y = 0$. Somit läßt sich A durch simultanes Zeilen-/Spaltentauschen in eine symmetrische Matrix der Blockgestalt $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ und damit der Blockgestalt $\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$ überführen. Gäbe es einen zu y orthogonalen normierten Eigenvektor z zu λ_n, so wäre auch $|z|$ gleich $|x|$ und damit gleich $|y|$. Also gilt $z(i) = -y(i)$ an mindestens einer Stelle $i \in V$, und folglich verschwindet der Eigenvektor $y + z$ zu λ_n und damit der Eigenvektor $|x+y|$ zu λ_1 an der Stelle i, im Widerspruch zu $\frac{1}{\|\,|x+y|\,\|}|x+y| = |x|$. Also hat auch λ_n die Vielfachheit 1.

Läßt sich umgekehrt A in die angegebene Blockgestalt überführen, so gibt es ein $X \subseteq V$ mit $A|X \times X = 0$ und $A|Y \times Y = 0$, wobei $Y := V - X$. Setzen wir $y(i) := |x|(i)$ falls $i \in X$ und $y(i) := -|x|(i)$ falls $i \in Y$, so erhalten wir $(Ay)|X = A|X \times X \cdot y|X + A|X \times Y \cdot y|Y = -A|x|\,|X = -\lambda_1|x|\,|X$ und

$(Ay)|X = A|Y \times X \cdot y|X + A|Y \times Y \cdot y|Y = A|x|\,|Y = \lambda_1|x|\,|Y$, also $Ay = -\lambda_1 y$. Damit ist $-\lambda_1$ Eigenwert von A, also gleich λ_i für ein $i \in V$. Aus (i) und der Spurgleichung folgt $\lambda_1 \geq |\lambda_n| = -\lambda_n$, also $-\lambda_1 = \lambda_i \geq \lambda_n \geq -\lambda_1$, also $\lambda_i = \lambda_n$. □

Aus (i) in Theorem 9 ergibt sich sofort, daß $\lambda_1(G) = k$ und $\lambda_2(G) < k$ für einen k-regulären zusammenhängenden Graphen G gelten. Mit (ii) in Theorem 9 folgt leicht, daß ein zusammenhängender Graph genau dann bipartit ist, wenn $\lambda_n(G) = -\lambda_1(G)$ ist.

2.2 Stabilitätszahl und Eigenwerte

Die *Stabilitätszahl* oder *Unabhängigkeitszahl* $\alpha(G)$ eines Graphen G die Mächtigkeit einer größten Menge paarweise nicht benachbarter Ecken in G.

Theorem 10 (Satz von Hoffman) *Für einen nichtleeren k-regulären Graphen gilt*

$$\alpha(G) \leq \frac{\lambda_{|G|}(G) \cdot |G|}{\lambda_{|G|}(G) - k}.$$

Beweis. Sei A die Adjazenzmatrix von G, $\mu = \lambda_{|G|}(G)$ ihr kleinster Eigenwert und $M := A - \mu E - \frac{k-\mu}{|G|} J$. Weil G k-regulär ist, ist j Eigenvektor zum Eigenwert k von A, und wegen $Jj = |G|$ folgt $Mj = Aj - \mu Ej - \frac{k-\mu}{|G|} Jj = 0$. Also ist j Eigenvektor auch von M zum Eigenwert 0. Ergänzen wir $b_1 := j$ zu einer Orthogonalbasis $b_1, \ldots, b_n$ aus Eigenvektoren von A und betrachten den Eigenvektor b_i für $i > 1$, etwa zum Eigenwert λ von A; wegen $j^\top b_i = 0$ folgt $Jb_i = 0$ und daraus $Mb_i = Ab_i - \mu E b_i = (\lambda - \mu) b_i$, so daß b_i Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda - \mu \geq 0$ ist. Somit ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis aus Eigenvektoren auch von M zu nichtnegativen Eigenwerten und daher M positiv semidefinit. Ist nun $x := \chi_Z \in \mathbb{R}^{V(G)}$ die charakteristische Abbildung einer Menge Z von $\alpha(G)$ vielen paarweise nichtbenachbarten in G (das heißt $\chi_Z(v) = 1$ falls $v \in Z$ und $\chi_Z(v) = 0$ sonst), so erhalten wir $x^\top A x = \sum_{v \in Z} \sum_{w \in Z} A(v, w) = 0$, $x^\top x = \alpha(G)$, $x^\top J x = (\alpha(G))^2$, und daraus

$$0 \leq x^\top M x = -\mu x^\top x - \frac{k-\mu}{|G|} x^\top J x = -\mu \alpha(G) - \frac{k-\mu}{|G|} (\alpha(G))^2,$$

woraus die Behauptung folgt. □

2.3 Informationsrate und Shannon-Kapazität

Sei V eine endliche Menge. Ein Element aus V^ℓ heißt *Wort* der *Länge* ℓ, eine Teilmenge von $V^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} V^i$ ein *Code* über V oder auch *Code über dem Alpha-*

bet V. Haben alle Wörter aus C die gleiche Länge n, so spricht man von einem n-*Code*. Die *Informationsrate* eines n-Codes ist die reelle Zahl $r(C) := \frac{\log_{|V|} |C|}{n}$ und kann wie folgt interpretiert werden: Eine *Codierung* durch C mag darin bestehen, beliebige Wörter über V einer festen (möglichst kurzen) Länge n' injektiv auf Wörter aus C abzubilden; die Zahl $\lfloor \log_{|V|} |C| \rfloor$ ist dann die kleinste obere Schranke für n'. Hat man demnach eine Klartextfolge der Länge ℓ wortweise zu codieren, so wird die codierte Textfolge etwa die Länge $\ell \cdot r(C)^{-1}$ haben; die Informationsrate gibt also in etwa das Verhältnis von Klartextlänge zu codierter Textlänge an. Je näher sie bei 1 liegt, desto effizienter ist der Code.

Bei der Übertragung von Wörtern über V mag nun unter gewissen Symbolpaaren aus $V \times V$ Verwechslungsgefahr bestehen: So sind unter Umständen die Symbole "1" (eins) und "l" (ell) leichter zu verwechse1n als "X" und "O". Man kann diesen Sachverhalt im sogenannten *Verwechslungsgraphen* G auf V modellieren: Zwischen Buchstaben großer Verwechslungsgefahr gibt's eine Kante, sonst nicht. Um Verwechslungen zu vermeiden, kann man einfach eine Menge von paarweise nicht zu verwechselnden Symbolen wählen. Die entsprechenden 1-Folgen bilden dann einen 1-Code $C(1)$ — mit Informationsrate $\log_{|V|} |C(1)|$. Es ist klar, daß auf diese Weise nur Codes mit Informationsrate höchstens $\log_{|G|} \alpha(G)$ entstehen können. Das läßt sich im allgemeinen stark verbessern, wenn man längere Codewörter verwendet: Zwei verschiedene Wörter $x_1 \ldots x_n$ und $y_1 \ldots y_n$ der Länge n könnten nur dann verwechselt werden, wenn für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Symbole x_i und y_i entweder gleich sind oder verwechselt werden können. Ein verwechslungsfreier n-Code würde demnach aus einer möglichst großen Menge $C(n)$ paarweise nichtbenachbarter Ecken im Graphen

$$G^k := (V^k, \{xy : \ x \neq y \text{ aus } V, \, x_i = y_i \vee x_i y_i \in E(G) \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\})$$

bestehen und damit die Informationsrate $\frac{\log_{|G|} \alpha(G^n)}{n}$, also $\log_{|G|} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$, haben — und wir werden gleich sehen, daß $\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n$ und damit $r(C(n)) \geq r(C(1))$ gilt. Die Bestimmung von

$$\Theta(G) := \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G)},$$

der sogenannten SHANNON-*Kapazität* von G, ist daher ein wichtiges Anliegen der Codierungstheorie. Selbst für sehr kleine Graphen ist sie schon problematisch: SHANNON hat die Aufgabe 1956 für jeden Graphen G gelöst, dessen Eckenmenge in höchstens $\alpha(G)$ Mengen paarweise benachbarter Ecken zerfällt[1]; doch für den den kleinste Graphen, der diese Eigenschaft nicht besitzt, nämlich für den Kreis C_5 der Länge 5, blieb sie über drei Jahrzehnte lang offen, bis LOVÁSZ 1979 eine geniale Methode zur Abschätzung von Θ veröffentlichte.

[1]Prominentes Beispiel sind perfekte Graphen, siehe [6]

2.4 Orthonormale Darstellungen

Eine *orthonormale Darstellung* eines Graphen G im Vektorraum $\mathbb{R}^s$ ist eine Familie $u = (u_x)_{x\in V(G)}$ von Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^s$ mit $u_x^\top u_y = 0$ für jedes Paar (x, y) verschiedener nichtbenachbarter Ecken von G. Der *Wert* von u sei gleich

$$\min_c \max_{x\in V} \frac{1}{(c^\top u_x)^2},$$

wobei c die Einheitvektoren mit $c^\top u_x \neq 0$ für alle $x \in V$ durchläuft. Ein c, das dieses Minimum darstellt, heißt *Griff* der Darstellung. Die Funktion, die jeder orthonormalen Darstellung von G ihren Wert zuordnet, nimmt ihr Minimum an; dieses Minimum bezeichnen wir mit $\vartheta(G)$, und eine orthonormale Darstellung von G, die es darstellt, heißt *optimal*.[2]

Sei jetzt c der Griff einer optimalen orthonomalen Darstellung u von G, und sei Z eine Menge von $\alpha(G)$ vielen paarweise in G nichtbenachbarten Ecken. Die u_x, $x \in Z$, sind paarweise orthogonal und lassen sich darum zu einer Orthogonalbasis $b_1, \dots, b_s$ von $\mathbb{R}^s$ erweitern. Stellt man c in dieser Basis dar, das heißt $c = \sum_{i=1}^s \lambda_i b_i$, so folgt aus $c^\top b_j = \sum_{i=1}^s \lambda_i b_i^\top b_j = \lambda_j$ gerade $c^\top c = \sum_{i=1}^s \lambda_i c^\top b_i = \sum_{i=1}^\top (c^\top b_i)^2 \geq \sum_{x\in Z} (c^\top u_x)^2$. Nach Wahl von c und u ist $\vartheta = \max 1/(c^\top u_x)^2$, also $\vartheta(G) \geq 1/(c^\top u_x)^2$ für alle $x \in Z$. Infolgedessen ist $1 = c^\top c \geq \sum_{x\in Z} (c^\top u_x)^2 \geq |Z|/\vartheta(G) = \alpha(G)/\vartheta(G)$, also

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G).$$

Das *Tensorprodukt* $G \otimes H$ zweier Graphen G und H ist der Graph auf $V(G) \times V(H)$, in dem zwei Ecken $(x, y) \neq (x', y')$ genau dann benachbart sind, wenn

[2]Die Existenz aller postulierten Minima beweist man wie folgt. Wir halten zunächst fest, daß (i) jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{|G|}$ eine orthonormale Darstellung von G liefert und das (ii) zu jeder orthonormalen Darstellung u von G in $\mathbb{R}^s$ ein $c \in \mathbb{R}^s$ existiert mit $c^\top u_x \neq \emptyset$ für alle $x \in V$. — Für festes s sei jetzt $S \subseteq \mathbb{R}^s$ die s-dimensionale Einheitssphäre, $H := \{((u_x)_{x\in V}, c) \in S^V \times S : c^\top u_x \neq 0 \text{ für alle } x \in V\}$ und $f : H \to \mathbb{R}$, $f(u, c) := \max_{x\in V} 1/(c^\top u_x)$. Man wähle $(u, c) \in H$ und setze $m := 2f(u, c) > 0$. Ist nun $(u, c) \in L := S^V \times S - H$, so ist $c^\top u_x = 0$ für ein $x \in V$; weil $(a, c) \mapsto c^\top a$ auf $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $(c'^\top u'_x)^2 < 1/m$ und damit $f(u', c') > m$ für jedes $(u', c') \in H$ aus der δ-Umgebung von (u, c). Also ist die auf H stetige Abbildung $g : H \to \mathbb{R}$, $g(u, c) := \min(f(u, c), m)$ stetig ergänzbar zu einer Abbildung g auf $L \cup H$ durch $g(u', c') := m$ für $(u', c') \in L$. $S^V \times S$ ist kompakt, und für jedes Paar x, y nichtbenachbarter Ecken in G ist die Menge aller $(u, c) \in S^V \times S$ mit $u_x^\top u_y = 0$ abgeschlossen. Bezeichnet X die Menge aller orthonormalen Darstellungen von G in $\mathbb{R}^s$, so ist folglich $X \times S$ kompakt, so daß $g|X \times S$ als stetige Abbildung einer kompakten Menge ein Minimum besitzt falls $X \neq \emptyset$; dieses liegt in H falls $D_s := H \cap (X \times S) \neq \emptyset$, und ist dann auch Minimum von $f_s := f|D_s$. Stellt (u, c) das Minimum von f_s dar, so muß c in der linearen Hülle W von u liegen, da sonst die Projektion p von u auf W immer noch nichtorthogonal zu allen u_x wäre, aber $f_s(u, p/||p||) < f_s(u, c)$. Insbesondere kann $f_s(u, c)$ nach geeigneter Koordinatentransformation auch als $f_{s'}(u', c')$ für $s' = \dim W \leq |G|$ dargestellt werden; wegen (i) ist die Vereinigung D aller D_s nichtleer, so daß damit auch das Minimum der Vereinigung f^* aller f_s existiert und gleich dem Minimum der Vereinigung von $f_1, \dots, f_{|G|}$ ist. Da für eine feste orthonormale Darstellung u auch $D_s \cap (\{u\} \times \mathbb{R}^s)$ kompakt und nach (ii) nichtleer ist, besitzt auch $f_s|D_s \cap (\{u\} \times \mathbb{R}^s)$ ein Minimum.

$(x = x' \vee xx' \in E(G))$ und $(y = y' \vee yy' \in E(H))$ gelten. Das n-fache Tensorprodukt von G mit sich selbst ist daher isomorph zu G^n. Da das Produkt $X \times Y$ für zwei Mengen X, Y jeweils in G bzw. H paarweise nichtbenachbarter Ecken aus $|X||Y|$ vielen in $G \otimes H$ paarweise nichtbenachbarten Ecken besteht, schließen wir $\alpha(G \otimes H) \geq \alpha(G) \cdot \alpha(H)$ und somit auch

$$\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n.$$

Auch $\vartheta(G \otimes H)$ läßt sich durch $\vartheta(G) \cdot \vartheta(H)$ abschätzen, allerdings nach oben. Um zu einer orthonormalen Darstellung von $G \otimes H$ zu gelangen, erklären wir zunächst das *Tensorprodukt* $u \otimes v$ von $u \in \mathbb{R}^s$ und $v \in \mathbb{R}^t$ durch $(u \otimes v)((i-1)s + j) := (uv^\top)(i, j)$ für $i \in \{1, \ldots, s\}$ und $j \in \{1, \ldots, t\}$ (das bedeutet: Die rs Einträge von $uv^\top \in \mathbb{R}^{s \times t}$ werden Zeile für Zeile aufgeführt, $uv^\top$ wird quasi "linearisiert"). Für $u, u' \in \mathbb{R}^s$ und $v, v' \in \mathbb{R}^t$ gilt

$$(u \otimes v)^\top (u' \otimes v') = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} u(i)v(j)u'(i)v'(j) = (u^\top u')(v^\top v'),$$

so daß für orthonomale Darstellungen $u = (u_x)_{x \in V(G)}$ von G in $\mathbb{R}^s$ und $v = (v_y)_{y \in V(H)}$ von H über $\mathbb{R}^t$ die Familie $(u_x \otimes v_y)_{(x,y) \in V(G) \times V(H)}$ eine orthonormale Darstellung von $G \otimes H$ in $\mathbb{R}^{st}$ ist: Sind nämlich $(x, y) \neq (x', y')$ nicht benachbart in $G \otimes H$, so ist $(u_x \otimes v_y)^\top (u_{x'} \otimes v_{y'}) = (u_x^\top u_{x'})(v_y^\top v_{y'}) = 0$. Sind nun u, v optimal und c, d die entsprechenden Griffe, so ist $(c \otimes d)^\top (c \otimes d) = (c^\top c)(d^\top d) = 1$ ein Einheitsvektor, der auf keinem $u_x \otimes v_y$ senkrecht steht (sonst wäre $(c \otimes d)^\top (u_x \otimes v_y) = (c^\top u_x)(d^\top u_y) = 0$, doch steht weder c auf u_x noch d auf v_y senkrecht). Daher ist

$$\begin{aligned}
\vartheta(G \otimes H) &\leq \max_{x \in V(G), y \in V(H)} \frac{1}{((c \otimes d)^\top (u_x \otimes v_y))^2} \\
&= \max_{x \in V(G)} \max_{y \in V(H)} \frac{1}{(c^\top u_x)^2} \cdot \frac{1}{(d^\top v_y)^2} \\
&= \vartheta(G)\vartheta(H).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\vartheta(G^n) \leq \vartheta(G)^n$, und wegen $\alpha(G^n) \leq \vartheta(G^n)$ folgt $\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \vartheta(G)$ für jedes $n \geq 1$ und damit $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$. In Worten:

Theorem 11 (Satz von Lovász) *Der Wert einer optimalen Orthonormaldarstellung eines Graphen ist eine obere Schranke für seine* SHANNON-*Kapazität.*

Kommen wir zurück auf das Problem der Bestimmung von $\Theta(C_5)$. Zunächst ist $\alpha(C_5) = 2$ und damit $\alpha(C_5^2) \geq 2^2 = 4$. Das läßt sich verbessern: sind $1, 2, 3, 4, 5$ die Ecken und $12, 23, 34, 45, 51$ die Kanten des C_5, so sind $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(5, 4)$ paarweise nicht benachbart in C_5^2 und damit $\alpha(C_5^2) \geq 5$. Damit ist auch $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$. LOVÁSZ hat nun eine orthonormale Darstellung von C_5 in $\mathbb{R}^3$ wie folgt beschrieben:

"Consider an umbrella whose handle and five ribs have unit length. Open the umbrella to the point where the maximum angle between the ribs is $\pi/2$. Let u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 be the ribs and c be the handle. Then $u_1, \ldots, u_5$ is an orthonormal representation of C_5."

Es ist klar, daß die $c^\top u_i$ alle gleich groß sind. Zu ihrer Berechnung kann man den 1ten spährischen Cosinussatz heranziehen, der besagt, daß für ein sphärisches Dreieck mit Seiten der Längen a, b, c für den Gegenwinkel δ von d die Gleichung $\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \delta$ besteht. Für das sphärische Dreieck mit den Seiten $\overline{cu_1}, \overline{cu_3}, \overline{u_1u_3}$ sind folglich $a = b$ mit $\cos a = c^\top u_1$ unbekannt, $d = \pi/2$, und $\delta = \frac{4}{5}\pi$, und unter Benutzung von $\cos \frac{4}{5}\pi = \frac{1}{1-\sqrt{5}}$ erhält man $\cos^2 a = 1/\sqrt{5}$. Damit hat u den Wert höchstens $\sqrt{5}$, und somit ist $\Theta(C_5) \leq \vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$. Wir fassen zusammen:

Theorem 12 (Regenschirmsatz) $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

2.5 Übungen

1. (-) Zeigen Sie, daß $K_{1,4}$ und $K_1 \dot\cup C_4$ isospektral sind.
2. Zeigen Sie, daß K_n spektral eindeutig ist und bestimmen Sie sein Spektrum.
3. Zeigen Sie, daß das Spektrum eines bipartiten, nicht notwendig zusammenhängenden Graphen symmetrisch um 0 liegt, das heißt mit λ ist auch $-\lambda$ Eigenwert.

   Hinweis. Studieren Sie den Beweis des Satzes von PERRON und FROBENIUS.
4. Zeigen Sie, daß zu jeder endlichen Familie $(u_x)_{x\in V}$ von Vektoren im $\mathbb{R}^s$ ein $c \in \mathbb{R}^s$ mit $c^\top u_x \neq 0$ für alle $x \in V$ existiert.
5. Zeigen Sie, daß für einen Graphen G der Wert $\vartheta(G)$ einer optimalen Orthonormaldarstellung beschränkt ist durch den größten Eigenwert einer beliebigen symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{V\times V}$ mit $M(x, y) = 1$ für jedes Paar (x, y) gleicher oder nicht benachbarter Ecken.

   Hinweis. Ist λ der größte Eigenwert von M, so ist $\lambda E - A$ positiv semidefinit und symmetrisch. Daher existiert eine Familie $(v_x)_{x\in V}$ von Elementen z. Bsp. des Vektorraums $\mathbb{R}^V$ mit $(\lambda E - A)(x, y) = v_x^\top v_y$. Man wähle die v_x in einem geeigneten Vektorraum nebst einem zu allen v_x orthogonalen Einheitsvektor c und studiere die durch $u_x := (c + v_x)/\sqrt{\lambda}$ gegebene Familie.
6. Zeigen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabe, daß die obere Schranke für $\alpha(G)$ in Theorem 10 auch eine obere Schranke für $\vartheta(G)$ ist,

daß also

$$\vartheta(G) \leq \frac{\lambda_{|G|}(G) \cdot |G|}{\lambda_{|G|}(G) - k}$$

gilt. Schließen Sie daraus $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$.

Hinweis. Die Matrix $M = A - \mu E - \frac{k-\mu}{|G|} J$, worin $\mu = \lambda_{|G|}(G)$ kleinster Eigenwert der Adjazenzmatrix A von G ist, hat sich im Beweis von Theorem 10 als positiv semidefinit erwiesen. Was bedeutet das für den größten Eigenwert von $J - \frac{|G|}{k-\mu} A$?

7. Bestimmen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabe die SHANNON-Kapazität eines Kreises gerader Länge.

Kapitel 3

Cayley-Graphen

Wie kann man die Symmetrie eines Graphen messen oder analysieren? Eine Möglichkeit besteht darin, die Gruppe seiner Automorphismen zu studieren: Operiert sie zum Beispiel transitiv auf der Eckenmenge, d. h. gibt es zu jedem Eckenpaar einen Automorphismus, der die eine auf die andere abbildet, so ist, bildlich gesprochen, der Ausblick in den Graphen von jeder Ecke aus derselbe. Es muß sich bei einem solchen *eckentransitiven* Graphen um ein recht "homogenes" bzw. "symmetrisches" oder auch "rundes" Objekt handeln, und man darf hoffen, daß es zum Beispiel mit "besseren" Färbungs- oder Zusammenhangs- oder auch Spektraleigenschaften aufwartet als seine etwas "unsymmetrischeren" Vettern, oder aber auch mit schönen algorithmischen Eigenschaften. Und so ist es tatsächlich: Graphen mit "hoher Symmetrie" spielen eine wichtige Rolle im Datenbank- und Netzwerkdesign. Das liegt allerdings in den meisten Fällen nicht an der Symmetrie selbst, sondern daran, daß die Konstruktion auf einer *Gruppe* beruht. Als Beispiel diene der *d-dimensionale* HAMMING-*Würfel* H_d: Seine Ecken sind die Bitfolgen der Länge d, also die Elemente aus $\mathbb{Z}_2^d$, und zwei Bitfolgen x, y sind darin benachbart, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden, wenn also $x(i) \neq y(i)$ für genau ein i aus $\{1, \ldots, d\}$ gilt. H_d ist eckentransitiv, denn für beliebige Ecken a, b ist $x \mapsto (b - a) + x$ (komponentenweise) ein Automorphismus, der a auf b abbildet. H_d ist bekanntlich d-fach-zusammenhängend (also so hoch, wie sein Grad es überhaupt nur zuläßt). H_d ist bipartit und d-regulär, und aus der Theorie weiß man, daß solche Graphen Kantenfärbungszahl d haben, also so klein, wie es der Grad noch zuläßt. Eine Kantenfärbung mit d Farben kann man aber auch direkt angeben: Jede Kante erhält als Farbe die Stelle aus $\{1, \ldots, d\}$, an der sich ihre Endecken unterscheiden. Spätestens wenn man sich klargemacht hat, wie einfach es — auch im technischen Sinn — ist, in H_d von einer Ecke entlang eines kürzesten Weg zu einer vorgegebenen Zielecke zu wandern (Stichwort: Bitkorrektur), wird einem auffallen, daß die Symmetrie hier nicht die Hauptrolle spielt, sondern die "Koordinatisierung" bzw. "Codierung" der Ecken und Kanten.

H_d kann man auch so beschreiben:

$$H_d = (G, \{\{x, x+s\} : x \in G, s \in S\}),$$

wobei G die Gruppe $\mathbb{Z}_2^d$ ist und S aus allen $s \in \mathbb{Z}_2^d$ mit einelementigem Träger besteht. CAYLEY-Graphen verallgemeinern diesen Ansatz auf beliebige Gruppen G und $S \subseteq G$. Da die Gruppen hierbei nicht mehr notwendig abelsch sind, werden sie multiplikativ geschrieben[1]; ist also G eine Gruppe und $S \subseteq G$, so ist der CAYLEY-*Digraph* von G, S erklärt durch

$$\Gamma = \vec{\mathrm{Cay}}(G, S) := (G, \{(x, xs) : x \in G,\ s \in S\}).$$

Γ enthält genau dann Schlingen, wenn $1 \in S$ ist (und in diesem Fall eine an jeder Ecke), und genau dann ist mit jeder Kante $(x, y) \in E(\Gamma)$ auch $(y, x) \in E(\Gamma)$, wenn S *symmetrisch*, das heißt gleich S^{-1} ist. Der symmetrische schlingenlose Fall, also $S = S^{-1} \subseteq G - \{1\}$, wird uns zumeist beschäftigen, und in diesem Fall identifiziert man (x, y) und (y, x) bzw. erklärt den CAYLEY-*Graphen* von G, S durch

$$\mathrm{Cay}(G, S) := (G, \{\{x, xs\} : x \in G,\ s \in S\}).$$

3.1 Symmetrie von Cayley-Graphen

Wir nennen eine Untergruppe G der *Automorphismengruppe* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ eines beliebigen Graphen Γ *eckentransitiv*, falls die Operation $(\alpha, x) \mapsto \alpha(x)$ von G auf $V(\Gamma)$ transitiv ist, das heißt zu jedem Paar (a, b) von Ecken ein $\alpha \in G$ mit $\alpha(a) = b$ existiert. Γ selbst heißt *eckentransitiv*, wenn $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ eckentransitiv ist. Ein CAYLEY-Graph $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$ ist demnach stets eckentransitiv, denn für $a, b \in V(\Gamma)$ ist $x \mapsto ba^{-1}x$ ein Automorphismus, der a auf b abbildet. — Entsprechend heißt $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *kantentransitiv*, falls die Operation $(\alpha, \{x, y\}) \mapsto \{\alpha(x), \alpha(y)\}$ von G auf $E(\Gamma)$ transitiv ist, also zu je zwei Kanten e, f ein $\alpha \in G$ mit $\alpha(V_\Gamma(e)) = V_\Gamma(f)$ existiert. Γ heißt *kantentransitiv*, falls $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ kantentransitiv ist. Wenn im folgenden von *Stabilisatoren*, *Orbits* oder anderen von einer Operation τ einer Gruppe auf eine Menge abgeleiteten Begriffen die Rede ist, so ist τ immer eine der zuletzt genannten kanonischen Operationen von $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ auf $V(\Gamma)$ bzw. auf $E(\Gamma)$, und aus dem Kontext wird ersichtlich sein, um welche der beiden es sich handelt.

Die vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$ mit $m \neq n$ zeigen, daß kantentransitive Graphen nicht regulär und insbesondere nicht eckentransitiv oder gar CAYLEY-Graphen sein müssen. (Allerdings muß ein kantentransitiver nichtregulärer Graph bipartit sein. Warum?) Umgekehrt gibt es eckentransitive Graphen, ja sogar CAYLEY-Graphen, die nicht kantentransitiv sind: Man betrachte die von $a, b : \mathbb{Z}_2^d \to \mathbb{Z}_2^d$ mit $a(x_1, x_2, \ldots, x_d) := (x_d, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$ und

[1] und weil in diesem Begegnungsfeld von Gruppen und Graphen die Gruppen die Älteren sind, wird ein Graph G sich fortan höflich Graph Γ nennen, um Gruppen keiner ungewollten Verwechslung auszusetzen

$b(x_1, x_2, \ldots, x_d) := (x_1 + 1, x_2, \ldots, x_d)$ in der Gruppe aller Abbildungen von $\mathbb{Z}_2^d$ nach $\mathbb{Z}_2^d$ erzeugte Untergruppe G der *Rotationen und Flippings von Bitfolgen der Länge d*. Der CAYLEY-Graph

$$CCC_d := (G, \{a, a^{-1}, b\})$$

ist zum Beispiel für $d = 3$ nicht kantentransitiv, denn die Kante $\{1, a\}$ liegen auf einem Dreieck (nämlich $1, a, a^2, a^3 = 1$), die Kante $\{1, b\}$ dagegen nicht, denn wäre g gemeinsamer Nachbar von $1, b$, so einerseits aus $\{a, a^{-1}\}$ als ein Nachbar von 1 ungleich b und andererseits aus $\{ba, ba^{-1}\}$ als ein Nachbar von b ungleich $1 = b^2$; das erzwingt $b \in \{a^0, a^{\pm 2}\}$, doch b hat Ordnung 2 in G, die Potenzen von a aber Ordnung 1 oder 3. — Fassen wir zusammen:

$$\Gamma \text{ eckentransitiv } \not\rightleftarrows \Gamma \text{ kantentransitiv } \not\rightleftarrows \Gamma \text{ CAYLEY-Graph.}$$

Wie hängen die Eigenschaften, eckentransitiv bzw. CAYLEY-Graph zu sein, zusammen? Wir haben schon gesehen, daß jeder CAYLEY-Graph eckentransitiv ist. Umgekehrt gibt es Beispiele von eckentransitiven Graphen, die keine CAYLEY-Graphen sind, zum Beispiel der PETERSEN-Graph Γ. Er ist eckentransitiv, da er isomorph zum Graphen auf den 2-elementigen Teilmengen einer 5-elementigen Menge W, in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie disjunkt sind und jede Permutation $\sigma \in S_W$ einen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ per $\alpha(\{x, y\}) := \{\sigma(x), \sigma(y)\}$ induziert. Nehmen wir an, Γ wäre ein CAYLEY-Graph $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, S)$. Dann ist notwendig $|G| = 10$ und $S = \{f, g, h\}$; wegen $S = S^{-1} \subseteq G - \{1\}$ gibt es wenigstens ein Element der Ordnung 2 in S, etwa f. Ein solches f definiert einen 1-Faktor $F = \{\{x, xf\} : x \in G\}$ von Γ. Da Γ bekanntlich nicht 3-kantenfärbbar ist, kann es keine Familie dreier kantendisjunkter 1-Faktoren in Γ geben, und somit haben g, h nicht beide Ordnung 2. Wir schließen $g = h^{-1}$ und $\mathrm{ord}(g) \in \{5, 10\}$. Es ist $fg \neq gf$, sonst würden die beiden offen-disjunkten $1, fg$-Wege $1, f, fg$ und $1, g, gf$ einen 4-Kreis in Γ bilden. Also ist G nicht abelsch, insbesondere nicht zyklisch, und enthält daher keine Elemente der Ordnung 10, so daß $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h) = 5$ folgt. Demnach ist $C := g^0, \ldots, g^5$ ein Kreis in Γ, der durch den Schnitt F von $V(\Gamma) - V(C)$ getrennt wird; da $C' = 1, g, gf, gfg, gfgf, \ldots, (gf)^{\mathrm{ord}(gf)}$ einen geschlossenen Kantenzug der Länge $2\mathrm{ord}(gf)$ mit genau $\mathrm{ord}(gf)$ vielen Kanten aus dem Schnitt F beschreibt, ist $\mathrm{ord}(gf)$ gerade, also gleich 2. Dann aber muß C' ein Kreis (!) der Länge 4 sein, ein Widerspruch. Also:

$$\Gamma \text{ CAYLEY-Graph } \rightleftarrows\!\!\!\!\!\!/\;\; \Gamma \text{ eckentransitiv.}$$

3.2 Sabidussis Darstellungssatz

In diesem Abschnitt zeigen wir SABIDUSSIs Darstellungssatz. Er impliziert, daß man jeden eckentransitiven Graphen als Quotientengraphen eines geeigneten CAYLEY-Graphen darstellen kann. Der *Quotientengraph* $\Gamma/\mathcal{P}$ eines Graphen Γ nach einer Partition $\mathcal{P}$ seiner Eckenmenge der Graph auf $\mathcal{P}$, in dem P, Q aus $\mathcal{P}$ genau dann benachbart sind, wenn es eine Kante von einer Ecke aus P nach einer aus Q gibt. Für einen *Cayley*-Graphen $\Gamma = Cay(G, S)$ und eine Untergruppe $H \leq G$ bilden die Linksnebenklassen aH, $a \in G$, von G bzgl. H eine solche Partition, und wir definieren

$$\mathrm{Cay}(G, S)/H := \mathrm{Cay}(G, S)/\{aH : a \in G\}.$$

Die Eckenmenge dieses Graphen besteht also aus den Linksnebenklassen, und verschiedene aH, bH sind dort genau dann benachbart, wenn es $x, y \in H$ und $s \in S$ mit $axs = by$ gibt, was gleichbedeutend mit $aHS \cap bH \neq \emptyset$ ist. — Das *lexikographische Produkt* zweier Graphen Γ, Λ ist erklärt durch

$$\Gamma[\Lambda] := (V(\Gamma) \times V(\Lambda), \{(x, y)(x', y') : xx' \in E(\Gamma) \vee (x = x' \wedge yy' \in E(\Lambda))\}).$$

Mit $\overline{K_H}$ wird der kantenlose Graph auf H bezeichnet.

Theorem 13 (Darstellungssatz von Sabidussi) *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $G \leq Aut(\Gamma)$ eckentransitiv. Dann gibt es ein G erzeugendes $S \subseteq G$ und ein $H \leq G$ mit $S \cap H = \emptyset$ und*

$$\Gamma \cong Cay(G, S)/H \text{ und } \Gamma[\overline{K_H}] \cong Cay(G, S).$$

Beweis. Sei $x_0 \in V$ beliebig. Für $d \geq 0$ sei $S_d := \{\alpha(G) : d_\Gamma(x_0, \alpha(x_0)) = d\}$ die Menge der Automorphismen aus G, die x_0 auf eine Ecke des Abstandes d von x_0 abbilden. Dann ist $S_d^{-1} = S_d$, denn für jedes $\alpha \in G$ ist $d_\Gamma(x_0, \alpha^{-1}(x_0)) = d_\Gamma(\alpha(x_0), x_0) = d_\Gamma(x_0, \alpha(x_0))$. Wir setzen

$$H := S_0 \text{ und } S := S_1.$$

Damit ist $H \leq G$ der Stabilisator G_{x_0} von x_0 in G, und $S \cap H = \emptyset$. Ferner ist $HSH = S$, denn für $\alpha \in H, \beta \in S, \gamma \in H$ gilt $d_\Gamma(x_0, \alpha\beta\gamma(x_0)) = d_\Gamma(\alpha^{-1}\gamma^{-1}(x_0), \beta(x_0)) = d_\Gamma(x_0, \beta(x_0))$.

Wir zeigen $S_d \subseteq S^d$ für $d \geq 1$ durch Induktion nach d. Für $d = 1$ ist das richtig; ist $\alpha \in S_{d+1}$, so betrachten wir die vorletzte Ecke y eines kürzesten $x_0, \alpha(x_0)$-Weges in Γ. Da G eckentransitiv ist, existiert ein β mit $\beta(x_0) = y$. Nach Induktion ist $\beta \in S_d \subseteq S^d$, und wegen $1 = d_\Gamma(y, \alpha(x_0)) = d_\Gamma(x_0, \beta^{-1}\alpha(x_0))$ ist $\beta^{-1}\alpha \in S$ und daher $\alpha = \beta\beta^{-1}\alpha \in S^d S = S^{d+1}$. Für $d = 0$ erhalten wir $S_0 \subseteq S^2$, denn für $\alpha \in S_0 = H$ und irgendein $\beta \in S$ gilt $\alpha\beta 1\beta^{-1} \in HSHS^{-1} = SS^{-1} = S^2$. Damit erzeugt S die Elemente aus jedem S_d; weil G zusammenhängend ist, gilt $G = \bigcup_{d \geq 0} S_d$, und so erzeugt S ganz G.

Wir konstruieren zunächst einen Isomorphismus f von $\mathrm{Cay}(G, S)/H$ nach Γ. Da $\beta^{-1}\alpha \in H$ hinreichend und notwendig für $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ ist, ist die Abbildung

$$f : \{\alpha H : \alpha \in G\} \to V, f(\alpha H) := \alpha(x_0)$$

wohldefiniert und injektiv. f ist surjektiv, weil G eckentransitiv ist. Damit ist f bijektiv. Sind $\alpha H \neq \beta H$ in Cay$(G, S)/H$ benachbart, so gilt $\alpha\varphi = \beta\psi\sigma$ für gewisse $\varphi, \psi \in H$, $\sigma \in S$, also $d_\Gamma(\alpha(x_0), \beta(x_0)) = d_\Gamma(x_0, \alpha^{-1}\alpha\underbrace{\varphi\sigma^{-1}\psi^{-1}}_{\in HSH=S}(x_0)) = 1$.

Also sind $f(\alpha), f(\beta)$ benachbart in Γ. Sind umgekehrt x, y benachbart in Γ und α, β mit $\alpha(x_0) = x, \beta(x_0) = y$ gegeben, so ist $1 = d_\Gamma(x, y) = d_\Gamma(x_0, \alpha^{-1}\beta(x_0))$, woraus $\alpha^{-1}\beta \in S$ und somit $\beta = \alpha 1 \alpha^{-1}\beta \in \alpha HS$ folgt. Also ist $\beta \in \beta H \cap \alpha HS$ und daher αH zu βH in Cay$(G, S)/H$ benachbart.

Abschließend konstruieren wir einen Isomorphismus von Cay$(G, S)/H[\overline{K_H}]$ nach Cay(G, S). Sei dazu $\rho : \mathcal{L} \to G$ eine Auswahlfunktion für die Menge $\mathcal{L}$ der Linksnebenklassen von H bzgl. G, also $\rho(\alpha H) \in \alpha H$ und damit $\rho(\alpha H)H = \alpha H$ für jedes $\alpha \in G$. Elementare Gruppentheorie zeigt, daß

$$f : \mathcal{L} \times H \to G, f(\alpha H, \xi) := \rho(\alpha H)\xi$$

eine Bijektion ist. Sind nun $(\alpha H, \xi), (\beta H, \zeta)$ verschiedene in Cay$(G, S)/H[\overline{K_H}]$ benachbarte Ecken, so müssen $\alpha H = \rho(\alpha H)H, \beta H = \rho(\beta H)H$ in Cay$(G, S)/H$ benachbart sein; also gibt es $\varphi, \psi \in H$ und $\sigma \in S$ mit $\rho(\alpha H)\varphi\sigma = \rho(\beta H)\psi$. Daraus folgt $\rho(\beta H)\zeta = \rho(\alpha H)\xi(\underbrace{\xi^{-1}\varphi\sigma\psi^{-1}\zeta}_{\in HSH=S})$, und somit sind $f(\alpha H, \xi) = \rho(\alpha H)\xi$ und $f(\beta H, \zeta) = \rho(\beta H)\zeta$ in Cay(G, S) benachbart. Sind umgekehrt $\rho(\alpha H)\xi$ und $\rho(\beta H)\zeta$ in Cay(G, S) benachbart, so gibt es ein $\sigma \in S$ mit $\rho(\alpha H)\xi\sigma = \rho(\beta H)\zeta$, und dieses Element liegt in $\alpha HS \cap \beta H$. Also sind $\alpha H, \beta H$ in Cay$(G, S)/H$ benachbart und darum $(\alpha H, \xi), \beta H, \zeta)$ in Cay$(G, S)/H[\overline{K_H}]$. □

3.3 Zusammenhang symmetrischer Graphen

Wie üblich bezeichnen $\delta(\Gamma), \kappa(\Gamma)$ Minimalgrad bzw. Zusammenhangszahl des Graphen Γ. Stets gilt $\delta(\Gamma) \geq \kappa(\Gamma)$. Der folgende Satz von MADER und WATKINS impliziert, daß im Fall eines endlichen zusammenhängenden eckentransitiven Graphen Γ umgekehrt $\delta(\Gamma)$ durch eine Funktion von $\kappa(\Gamma)$ beschränkt ist, nämlich durch $\frac{3}{2}\kappa(\Gamma) - 1$.

Theorem 14 (Satz von Mader/Watkins) *Für jeden endlichen, zusammenhängenden eckentransitiven Graphen gilt* $\delta(\Gamma) \leq \frac{3}{2}\kappa(\Gamma) - 1$

Beweis. Wir stellen dem Beweis eine einfache Beobachtung voran. Bezeichne $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\Gamma)$ die Vereinigung aller $\kappa(\Gamma)$-elementigen trennenden Eckenmengen von Γ. Ein *S-Fragment*, $S \in \mathcal{T}$ ist die Vereinigung wenigstens einer aber nicht aller Komponenten von $\Gamma - S$; ein *Fragment* von Γ ist ein S-Fragment für ein $S \in \mathcal{T}$. Mit A ist auch $\overline{A} := \Gamma - S - A$ ein S-Fragment. Ist A ein S-Fragment und F ein T-Fragment, so gilt $N_\Gamma(A \cap F) \subseteq L := (A \cap T) \cup (S \cap T) \cup (S \cap F)$.

Im Fall $A \cap F$ ist L eine trennende Eckenmenge, also $|L| \geq \kappa(\Gamma)$, und es folgt $|A \cap T| \geq \kappa(G) - |(S \cap T) \cup (S \cap F)| = |S| - |S - \overline{F}| = |\overline{F} \cap S|$; also gilt

$$|A \cap T| \geq |\overline{F} \cap S| \text{ für } A \cap F \neq \emptyset, \tag{3.1}$$

und im Fall der Gleichheit ist $A \cap F$ ein L-fragment.

Wir zeigen jetzt den Satz. Die Behauptung ist klar für vollständige Graphen, wir dürfen daher $\mathcal{T} \neq \emptyset$ annehmen. Weil Γ zusammenhängend ist, enthält jedes $S \in \mathcal{T}$ enthält wenigstens eine Ecke, und weil Γ eckentransitiv ist, ist somit *jede* Ecke in einem $S \in \mathcal{T}$ enthalten. Wir wählen $S \in \mathcal{T}$ zusammen mit einem S-Fragment A so, daß $|A|$ minimal ist. Es gibt dann ein $T \in \mathcal{T}$ mit $A \cap T \neq \emptyset$. Sei F ein T-Fragment.

Aus $A \cap F \neq \emptyset$ folgt mit (3.1) $|A \cap T| \geq |\overline{F} \cap S|$ und, weil $A \cap F$ als echte Teilmenge von A infolge der Wahl von A kein Fragment ist, sogar $|A \cap T| > |\overline{F} \cap S|$. Mit (3.1), angewendet auf $\overline{A}, \overline{F}$ statt A, F folgt $\overline{A} \cap \overline{F} = \emptyset$. Wäre $A \cap \overline{F} \neq \emptyset$, so analog $\overline{A} \cap F = \emptyset$ und, wieder mit (3.1), $|\overline{F} \cap S| \geq |\overline{A} \cap T| = |\overline{A}|$, so daß $|A| > |A \cap T| > |\overline{F} \cap S| \geq |\overline{A}|$ gilt — im Widerspruch zur Wahl von A. Gilt dagegen $A \cap \overline{F} = \emptyset$, so $|A| > |A \cap T| > |\overline{F} \cap S| = |\overline{F}|$, gleichfalls ein Widerspruch zur Wahl von A.

Also gilt $A \cap F = \emptyset$ und analog $A \cap \overline{F} = \emptyset$, so daß $A \subseteq T$ folgt. Im Fall $F \cap \overline{A} \neq \emptyset$ folgt $|F \cap S| \geq |A \cap T| = |A|$ mit (3.1), im Fall $F \cap \overline{A} = \emptyset$ folgt $|F \cap S| = |F| \geq |A|$ aus der Wahl von A. Also ist in jedem Fall $|F \cap S| \geq |A|$ und, analog, $|\overline{F} \cap S| \geq |A|$, woraus $2|A| \leq |F \cap S| + |\overline{F} \cap S| \leq |S| = \kappa(\Gamma)$ folgt. Also ist $|A| \leq \frac{1}{2}\kappa(\Gamma)$, und, weil jede Ecke in A höchstens $|A| - 1 + |S|$ Nachbarn hat, folgt die Behauptung. □

Der Satz impliziert, daß eckentransitive Graphen mit (Minimal-) Grad ≥ 3 bereits 3-zusammenhängend sind, und daß eckentransitive Graphen mit Grad ≥ 4 4-zusammenhängend sein müssen. Dagegen gibt es CAYLEY-Graphen mit Grad 5, die nicht 5-zusammenhängend sind.

Nennen wir ein kleinstes Fragment in einem Graphen ein *Atom*, so ergibt sich aus dem Beweis unseres Satzes $A \cap T = \emptyset$ oder $A \subseteq T$ für jedes $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$. Würden sich zwei verschiedene Atome A, F schneiden, so dürfen wir annehmen, daß es eine Ecke in $A - F$ gibt; da A zusammenhängend ist, gibt es auch einen Nachbarn von F in $A - F$; also schneidet $T := N_\Gamma(F) \in \mathcal{T}(\Gamma)$ das Atom A, woraus $A \subseteq T$ und damit $A \cap F = \emptyset$ folgt, ein Widerspruch. Also sind verschiedene Atome disjunkt. Für eckentransitives Γ folgt aus diesen Betrachtungen, daß $V(G)$ die disjunkte Vereinigung aller Atome ist und jedes $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$ disjunkte Vereinigung gewisser Atome ist.

Der Beweis funktioniert auch unter der erheblich schwächeren Bedingung, daß Γ ein endliches Fragment besitzt und jedes endliche Fragment von einem $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$ geschnitten wird.

3.4 Cayley–Hamilton?

Der PETERSEN-Graph Γ zeigt, daß es endliche 2-zusammenhängende eckentransitive Graphen gibt, die keinen aufspannenden Kreis, einen sogenannten HAMILTON-*Kreis*, besitzen. Auch der Graph $Y\Delta(\Gamma)$ mit Eckenmenge $\{(x, e) : x \in V(\Gamma), e \in E_\Gamma(x)\}$ und Kanten zwischen $(x, e) \neq (y, f)$ falls $x = y$ oder $e = f$ ist ein derartiger Graph. Darüberhinaus kennt man keine endlichen 2-zusammenhängenden eckentransitiven Graphen ohne HAMILTON-Kreis. Die von LOVÁSZ aufgeworfene Frage, ob zumindest jeder endliche CAYLEY-*Graph* einen HAMILTON-Kreis besitzt, wird kontrovers diskutiert. Wir stellen zwei einfache Sätze aus diesem Umfeld vor.

Theorem 15 (Satz von Rapaport)[2] *Sei G eine endliche, von drei Involutionen a, b, c mit $ab = bc$ erzeugte Gruppe. Dann besitzt Cay$(G, \{a, b, c\})$ einen* HAMILTON-*Kreis.*

Beweis. Für $X \subseteq G$ und $z \in G$ sei $\partial_z(X) := \{g \in G - X : g = xz$ für ein $x \in X\}$. Wir konstruieren induktiv eine Kette $X_1 \subset X_2 \subset \ldots X_\ell = G$ von Mengen X_i mit $\partial_b(X_i) = \partial_c(X_i) = \emptyset$ derart, daß ein Kreis auf X_i in Γ existiert Dazu sei $H := X_1$ die von b, c in G erzeugte Untergruppe. Jedes Element in X_1 besitzt eine eindeutige kürzeste Darstellung als Produkt alternierender Faktoren b, c, und man kann sich überlegen, daß X_1 Diedergruppe mit $2m$ Elementen ist, wobei $m :=$ ord(bc). Nach Definition gilt $\partial_b(X_1) = \partial_c(X_1) = \emptyset$, und $1, b, bc, bcb, bcbc, \ldots, (bc)^m$ ist der gewünschte Kreis. Sei jetzt X_i wie oben bereits konstruiert. Ist auch $\partial_a(X_i) = \emptyset$, so ist $X_i = G$, da G von a, b, c erzeugt wird, und wir sind fertig. Andernfalls gibt es ein $g \in \partial_a(X_i) \subseteq G - X_i$. Es ist $gH \cap X_i = \emptyset$, denn andernfalls wäre $gh = x$ für gewisse $h \in H, x \in X_i$, also $g = xh^{-1}$; da aber $zb, zc \in X_i$ für alle $z \in X_i$ gilt, folgt (z. Bsp. induktiv über die Länge der Darstellung von h^{-1} als Produkt alternierender b, c) $g \in X_i$ — ein Widerspruch. Wir setzen $X_{i+1} = X_i \cup gH$. Folglich ist $\partial_b(X_{i+1}) = \partial_c(X_{i+1}) = \emptyset$. Nach Induktion liegt $ga \in X_i$ in einem Kreis C auf X_i in Γ, und dieser Kreis enthält die beiden Kanten von ga nach gab und nach gac. Durch $g, gb, gbc, gbcb, gbcbc, \ldots, g(bc)^m$ wird ein Kreis C' von gH beschrieben, und durch Ersetzen der Kanten $\{ga, gab\}$ und $\{g, gb\}$ in $C \cup C'$ durch $\{g, ga\}$ und $\{gb, gba = gab\}$ entsteht ein Kreis auf X_{i+1}. □

Sei $\Gamma =$ Cay(G, S) ein endlicher CAYLEY-Graph. Falls S ein Element a der Ordnung $|\Gamma|$ enthält — etwa, falls $|\Gamma|$ Primzahl ist — so ist $1, a, a^2, \ldots, a^{|G|} = 1$ ein HAMILTON-Kreis. Der folgende Satz von TURNER besagt, daß jeder eckentransitive Graph Γ, für den $|V(\Gamma)|$ Primzahl ist, bereits isomorph zu einem CAYLEY-Graphen ist und insbesondere einen HAMILTON-Kreis besitzt (falls 2-zusammenhängend).

Theorem 16 *Sei Γ ein eckentransitiver Graph und $|V(\Gamma)|$ prim. Dann ist Γ zu einem*

[2] ELVIRA STRASSER RAPAPORT; manchmal als Satz von STRASSER-RAPAPORT zitiert.

CAYLEY-*Graphen isomorph.*

Beweis. Sei $p := |V(\Gamma)|$, $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $x_0 \in V(\Gamma)$ fest, und $H := G_{x_0} = \{\alpha \in G\colon \alpha(x_0) = x_0\}$ der Stabilisator von x_0 in G. Sei $\mathcal{L} := \{\alpha H : \alpha \in G\}$ die Menge der Linksnebenklassen von H in G, und sei $r : \mathcal{L} \to G$ eine Auswahlfunktion von $\mathcal{L}$. Jedes $\beta \in \alpha H$ bildet x_0 auf dieselbe Ecke ab, nämlich auf $r(\alpha H)(x_0)$. Da G eckentransitiv ist, folgt $|\mathcal{L}| = p$, das heißt der Index von H in G ist p. Nach dem Satz von LAGRANGE ist $|G| = |H|p$, und wegen $G \subseteq S_p$ ist $|G|$ Teiler von $p!$, so daß p mit Vielfachheit 1 in der Primfaktorzerlegung von $|G|$ auftritt. Nach dem 1. SYLOW-Satz existiert daher ein $Z \leq G$ mit $|Z| = p$. Z ist zyklisch, also isomorph zu $\mathbb{Z}_p$. *Wir können daher die Elemente aus $V(\Gamma)$ als Elemente aus $\mathbb{Z}_p$ auffassen so, daß $x \mapsto x + 1$ ein Automorphismus von Γ ist.* Setzen wir $S := \{x \in \mathbb{Z}_p : \{0, \pm x\} \in E(\Gamma)\}$, so folgt $\Gamma \cong \mathrm{Cay}(Z, S)$. □

3.5 Übungen

1. Sei Γ der PETERSEN-Graph.

   (i) Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

   (ii) Bestimmen Sie ein n so, daß $\Gamma[\overline{K_n}]$ ein CAYLEY-Graph ist.

   Hinweis. Eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ wurde in Abschnitt 3.1 vorgestellt. Für den zweiten Teil studiere man den Beweis des Satzes von SABIDUSSI.

2. Sei Γ ein Graph und $|V(\Gamma)|$ oder $\kappa(\Gamma)$ Primzahl. Zeigen Sie $\delta(\Gamma) = \kappa(\Gamma)$.

3. (+) Sei Γ ein zusammenhängender eckentransitiver Graph. Zeigen Sie, daß die Kantenzusammenhangszahl $\lambda(\Gamma) := \min\{|S|\colon S \subseteq E(\Gamma),\ S \text{ trennt } \Gamma\}$ gleich dem Minimalgrad $\delta(\Gamma)$ von Γ ist.

   Hinweis. Für zwei Mengen $X, Y \subseteq V(\Gamma)$ mit $|E_\Gamma(X)| = |E_\Gamma(Y)| = \lambda(\Gamma)$ und $X \cap Y \neq \emptyset$, $X \cup Y \neq V(\Gamma)$ gilt $|E_\Gamma(X \cap Y)| = \lambda(\Gamma)$ (bekanntlich; sonst nachrechnen). Betrachten Sie ein kleinstes $X \subseteq V(G)$ mit $|E_\Gamma(X)| = \lambda(\Gamma)$ und zeigen Sie, daß der Stabilisator $(\mathrm{Aut}(\Gamma))_X = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\Gamma) : \alpha(X) = X\}$ von X in $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ transitiv auf X operiert. Was folgt daraus für $|E_\Gamma(X)|$?

Literaturverzeichnis

[1] M. AIGNER, G. M. ZIEGLER, “Das BUCH der Beweise”, Springer 2002.

[2] A. C. AITKEN, “Determinanten und Matrizen”, BI Hochschultaschenbücher-Verlag 1969.

[3] N. BIGGS, “Algebraic potential theory on graphs”, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 641–682.

[4] N. BIGGS, “Algebraic Graph Theory”, Cambridge University Press 1996.

[5] D. M. CVETKOVIĆ, M. DOOB, H. SACHS, “Spectra of Graphs”, 3rd edition, J. A. Barth Verlag 1995.

[6] R. DIESTEL, “Graphentheorie”, Springer 2006.

[7] R. DIESTEL, “Graph Theory”, Springer 2005.

[8] C. GODSIL, G. ROYLE, “Algebraic Graph Theory”, Springer 2001.

[9] A. HATCHER, “Algebraic Topology”, Cambridge University Press 2002 (online).

[10] M.-C. HEYDEMANN, B. DUCOURTHIAL, “Cayley graphs and interconnection networks”, in: “Graph symmetry: Algebraic Methods and Applications”, NATO Ser. C 497 (1997), 167–224.

[11] J. H. JEANS, “The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism”, Cambridge University Press 1908 (online).

[12] L. LOVÁSZ, “On the Shannon Capacity of a Graph”, IEEE Trans. Inf. Theory IT-25 (1979), 1–7.

[13] G. SABIDUSSI, “Vertex-transitive graphs”, Monatsh. Math. 68 (1964), 426–438.

[14] W. T. TUTTE, “The factorization of linear graphs”, J. Lond. Math. Soc. 22 (1947), 107–111.

[15] J. H. VAN LINT, R. M. WILSON, “A course in Combinatorics”, Cambridge University Press 1996.

Index