Kapitel 1

Einführung

Einer der faszinierendsten Aspekte der Matroidtheorie ist, daß sie die Betrachtung ganz verschiedenartiger und auf den ersten Blick nicht nahverwandter Objekte der Mathematik von einer gemeinsamen, algebraisch–kombinatorischen Warte aus gestattet. Welche Eigenschaften teilen die Gerüste eines Graphen mit den Basen eines Vektorraums oder den Repräsentantensystemen einer Mengenfamilie?

In diesem einführenden Kapitel werden wir Matroide auf verschiedenartige Weise *beschreiben.* Wir definieren Matroide mit Hilfe eines abstrakten Begriffs von *Unabhängigkeit.* Dieser Zugang erscheint vor allem deshalb besonders geeignet, weil sich sehr klare Analogien zur elementaren linearen Algebra herstellen lassen; beispielsweise lassen sich Begriffe wie *Basis*, *Dimension* oder *Unterraum* ohne weiteres im Kontext der Matroide verallgemeinern.

Im weiteren Verlauf werden wir Matroide auch duch ihre sogenannten *Kreise* charakterisieren können — ein Zugang, der sicherlich Kennern der Graphentheorie sehr entgegenkommt.

Es gibt darüberhinaus noch eine Fülle weiterer Charakterisierungen von Matroiden; ihre vollständige Auflistung — ganz zu schweigen von einer Behandlung mit der gleichen Ausführlichkeit — ist allerdings dem einführenden Charakter dieses Kapitels nicht angemessen, und wir werden nur einige kurz anreißen.

Dagegen werden wir *submodulare Mengenfunktionen* ausführlich darstellen und zeigen, wie sich aus ihnen Matroide gewinnen lassen. Es folgt ein kurzer Ausflug in die *Transversaltheorie*, der uns eine weitere generische Klasse von Matroiden schenkt.

Abschließend werden wir zu den Konzepten von *Minor* und *Dualität* gelangen.

1.1 Unabhängigkeit

Für eine Menge E bezeichne $\mathcal{P}(E)$ die Menge ihrer Teilmengen. Ein Paar $M = (E, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ heißt *Matroid* auf E, falls gilt:

(F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$,

(F2) aus $F' \subseteq F \in \mathcal{F}$ folgt $F' \in \mathcal{F}$,

(F3) zu $F', F \in \mathcal{F}$ mit $|F'| < |F| < \infty$ gibt es ein $x \in F - F'$ mit $F' \cup \{x\} \in \mathcal{F}$,

(F4) $F \subseteq E$ ist genau dann in $\mathcal{F}$, wenn jede endliche Teilmenge von F es ist.

Die Mengen aus $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}$ heißen die *unabhängigen Mengen* von M, die Mengen aus $\mathcal{P}(E) - \mathcal{F}$ sind die *abhängigen* Mengen von M.

Die Eigenschaft (F3) grenzt die Matroide unter den *abstrakten Simplizialkomplexen* auf E ((F1),(F2)) *endlichen Charakters* ((F4)) ab; sie besagt, daß jede endliche unabhängige Menge durch Hinzufügen eines geeigneten Elementes einer beliebigen größeren unabhängigen Menge erweitert werden kann.

Für $X \subseteq E$ und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ seien $\mathcal{D}|X := \mathcal{D} \cap \mathcal{P}(X)$ und $(E, \mathcal{D})|X := (X, \mathcal{D}|X)$. Ein Matroid $M = (E, \mathcal{F})$ induziert damit auf natürliche Weise neue Matroide; für $X \subseteq E$ ist nämlich

$$M|X = (X, \mathcal{F}|X),$$

ein Matroid, die *Einschränkung von M auf X* (Übung). Mit dieser Schreibweise ergibt sich auch eine Alternative zu (F3); denn aus (F3) folgt unmittelbar:

(F3') Ist $X \subseteq E$ endlich und F, F' maximal in $\mathcal{F}|X$, so ist $|F| = |F'|$,

und erfüllt umgekehrt $\mathcal{F}$ (F3') und sind $|F'| < |F| < \infty$ vorgelegt, so kann F' nicht maximal in $\mathcal{F}|(F \cup F')$ sein, woraus (F3) folgt.

1.2 Matroide aus Vektorräumen

Wir beginnen mit einem fundamentalen Beispiel. Sei dazu V ein Vektorraum über dem Körper K. Sei $(a_i)_{i \in E}$ irgendeine Familie von Elementen aus V. Dann besitzt

$$\mathcal{F} := \{ J \subseteq E : (a_i)_{i \in J} \text{ linear unabhängig } \}$$

offensichtlich die Eigenschaften (F1),(F2),(F4).

Zum Nachweis von (F3) seien J', J aus $\mathcal{F}$ mit $|J'| < |J| < \infty$; wir wählen L unter den Teilmengen von $J' \cup J$ aus $\mathcal{F}$ größter Mächtigkeit so, daß $|J' - L|$ möglichst klein wird; wir zeigen $J' \subseteq L$, womit (F3) vermöge $|L| \geq |J|$ folgt. Gäbe es (reductio ad absurdum) ein $j \in J' - L$, so wäre $a_j = \sum_{k \in L} \lambda_k a_k$ für gewisse λ_k nach Wahl von L, wobei $\lambda_i \neq 0$ für wenigstens ein $i \in L - J'$ wegen $J' \in \mathcal{F}$ gilt. Während $L - \{i\}$ aus $\mathcal{F}$ ist, kann es $(L - \{i\}) \cup \{j\}$ nach Wahl von L nicht sein. Daher ist $a_j = \sum_{k \in L} \mu_k a_k$ für gewisse μ_k mit $\mu_i = 0$, so daß $0 = a_j - a_j = \sum_{k \in L} (\lambda_k - \mu_k) \cdot a_k$ eine nichttriviale Linearkombination der Null ist, Widerspruch.

$M := M((a_i)_{i \in E}) := (E, \mathcal{F})$ ist also ein Matroid.

Ist speziell $(a_i)_{i \in E}$ die Familie *aller* Elemente aus V, so identifizieren wir E und V und schreiben

$$M(V) := (V, \{X \subseteq E : X \text{ linear unabhängig}\}).$$

Ein anderer wichtiger Spezialfall begründet zugleich den Namen "Matroid". Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten einer $m \times n$-Matrix A über dem Körper K. Wir fassen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ als Familie von Vektoren des Vektorraums K^m auf, und so bestimmt auch A ein Matroid

$$M(A) := (\mathbb{N}_n, \{J \subseteq \mathbb{N}_n : (a_i)_{i \in J} \text{ linear unabhängig}\}).$$

Achtung: Wie in der linearen Algebra üblich, wird der Grundkörper K, über dem sich alles abspielt, nicht explizit in den Notationen aufgeführt; so kann beispielsweise eine $\{0,1\}$-Matrix durchaus unterschiedliche Matroide induzieren, je nach Charakteristik des Grundkörpers. —

In diesem Kontext spielen die *invertierbaren* $n \times n$-Matrizen eine völlig untergeordnete Rolle, da sie alle dasselbe Matroid induzieren, nämlich $(\mathbb{N}_n, \mathcal{P}(\mathbb{N}_n))$. Je verwickelter die Abhängigkeiten der Spalten untereinander sind, desto interessanter wird aber das Matroid!

Auch andere Unabhängigkeitsbegriffe der Linearen Algebra und Algebra führen auf Matroide (Übungen).

1.3 Koordinatisierbarkeit

Zwei Matroide $M = (E, \mathcal{F})$ und $M' = (E', \mathcal{F}')$ nennen wir *isomorph*, in Zeichen $M \cong M'$, falls es eine Bijektion $\beta : E \to E'$ gibt, so daß für alle $X \subseteq E$ genau dann X unabhängig in M ist, wenn $\beta(X)$ unabhängig in M' ist.

Man kann sich bereits an dieser Stelle fragen, ob man zu *jedem* Matroid M auf E einen Körper K, einen Vektorraum V über K und eine Familie $(a_i)_{i \in E}$ von Vektoren aus V findet, so daß M isomorph zu $M((a_i)_{i \in E})$ ist — dann wäre die Matroidtheorie zunächst eine "Kombinatorik in Vektorräumen" .

Bei vorgelegtem M und festem V und K suchen wir also nach einer Abbildung

$$\varphi : E \to V,$$

mit der Eigenschaft, daß $X \subseteq E$ genau dann unabhängig in M ist, wenn $(\varphi(x))_{x\in X}$ linear unabhängig in V ist. Ein solches φ heißt *Darstellung* oder auch *Koordinatisierung* von M in V über K.

Wir werden später ein Matroid angeben, das *keine Darstellung* besitzt, egal wie geschickt wir V und K wählen. Daß wir bereits bei der Wahl von K vorsichtig sein müssen, zeigt das folgende Beispiel.

Für eine Menge E und eine Zahl $r \geq 0$ bezeichne $\mathcal{P}_{\leq r}(E)$ die Menge der Teilmengen von E mit höchstens r Elementen. Offensichtlich ist

$$U_{r,E} := (E, \mathcal{P}_{\leq r}(E))$$

ein Matroid, das bis auf Isomorphie durch r und $|E|$ bestimmt ist. $U_{r,n} := U_{r,\mathbb{N}_n}$ heißt das *r-uniforme Matroid* auf n Elementen. Versuchen wir, eine Koordinatisierung φ von $U_{2,4}$ im Vektorraum V über $\mathbb{Z}_2$ zu konstruieren: Die $\varphi(i)$ sind paarweise linear unabhängig und daher paarweise verschieden und nicht 0. Für $i \in \{3,4\}$ sind $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(i)$ linear abhängig, also läßt sich $\varphi(i)$ auf eindeutige Weise als Linearkombination von $\varphi(1), \varphi(2)$ schreiben; als Koeffizienten können wir nur 0 und 1 wählen, also gilt $\varphi(i) = \varphi(1) + \varphi(2)$, und folglich $\varphi(3) = \varphi(4)$, Widerspruch.

Matroide, die eine Darstellung in einem Vektorraum über K besitzen, nennt man auch *K-linear* oder *darstellbar* über K, $\mathbb{Z}_2$-lineare Matroide heißen *binär*. Matroide, die über *jedem* Körper darstellbar sind, heißen *regulär*. Somit besagt der vorangegangene Absatz, daß $U_{2,4}$ nicht binär ist, und damit auch nicht regulär. Wir werden später zeigen, daß $U_{2,4}$ tatsächlich in *jedem* endlichen nicht–binären Matroid in einer noch zu präzisierenden Weise "auftritt".

1.4 Basen

Ist $M = (E, \mathcal{F})$ ein Matroid, so nennen wir ein maximales Element aus $\mathcal{F}$ eine *Basis* von M, deren Gesamtheit bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(M)$. Die Basen des Matroids $M(V)$ zum Vektorraum V sind beispielsweise gerade die Basen von V, und die Basen von $M|X$ sind die maximalen unter den unabhängigen Teilmengen von X.

Man darf darum erwarten, daß sich einige Eigenschaften (welche?) von Vektorraumbasen auf die Basen von M übertragen. In der Tat:

Mit (F4) erfüllt die Menge aller unabhängigen Obermengen einer unabhängigen Menge F, geordnet durch $\subseteq$, die Voraussetzungen des ZORNschen Lemmas (jede Kette darin besitzt eine obere Schranke, nämlich die Vereinigung ihrer Mitglieder). Somit ist jede unabhängige Menge von M in einer Basis von M enthalten — eine Verallgemeinerung des *Basisergänzungssatzes.*[1] Mittels (F1) folgt daraus unter anderem, daß M überhaupt eine Basis *besitzt*, und mit (F2) können

[1] Tatsächlich haben wir geschlossen, daß jede Mengenfamilie endlichen Charakters (d.h. mit

wir schließen, daß für verschiedene Matroide auf der gleichen Menge auch die Mengen ihrer Basen verschieden sind.

Der Satz von der Gleichmächtigkeit zweier Basen eines Vektorraums bleibt im allgemeineren Kontext der Matroide ebenfalls gültig. Für endliche Matroide folgt dies unmittelbar aus (F3'). Dem Beweis der allgemeinen Aussage stellen wir ein weiteres Konzept voran.

1.5 Fundamentalkreise

Ist B eine Basis von M und $x \in E-B$, so ist $B \cup \{x\}$ abhängig. Es enthält daher eine minimal abhängige Menge, einen sogenannten *Fundamentalkreis* zu B und x. Die Wahl dieser Bezeichnung wird erst im nächsten Abschnitt, a posteriori, durchsichtig.

Ein solcher Fundamentalkreis muß stets x enthalten und nach (F4) endlich sein; er ist sogar eindeutig bestimmt durch B und x (und wird künftig mit $C_M(B,x)$ bezeichnet): Sind nämlich C, D verschiedene Fundamentalkreise zu B und x, dann sind sie unvergleichbar, da beide minimal sind. Daher ist $C \cap D$ eine echte Teilmenge von C, also unabhängig, und wir können sie zu einer Basis F' von $M|(C \cup D)$ erweitern. Da F' weder C noch D enthält, meidet F' ein Element aus $C-D$ und eins aus $D-C$, hat somit weniger Elemente als $F := (C \cup D) - \{x\} \subseteq B \cap (C \cup D) \in \mathcal{F}(M|C \cup D)$, und kann daher wegen (F3) in $M|(C \cup D)$ vergrößert werden, Widerspruch.

Fundamentalkreise sind somit die "kombinatorische Spur", die der Satz aus der linearen Algebra von der eindeutigen Darstellbarkeit eines Vektors durch die Elemente der Basis eines Vektorraums im Kontext der Matroide hinterläßt: Ist $x = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ die (eindeutige) Linearkombination von $x \in V - B$ durch Elemente der Basis B im Vektorraum V, so bilden die $b \in B$ mit $\lambda_b \neq 0$ zusammen mit x den Fundamentalkreis von x zu B in $M(V)$.

Tatsächlich kann *jede minimal abhängige Menge* C als Fundamentalkreis aufgefaßt werden, mehr noch: Ist $x \in C$, so können wir $C - \{x\}$ zu einer Basis B *ergänzen*, d.h. eine Basis B wählen, die $C - \{x\}$ enthält, und C ist Fundamentalkreis zu B und dem vorgegebenen x!

Die minimal abhängigen Mengen eines Matroids wollen wir daher einfach seine *Kreise* nennen und mit $\mathcal{C}(M)$ bezeichnen. Kreise sind, wie wir schon gesehen haben, endlich und nichtleer, und ist x ein gemeinsames Element zweier verschiedener Kreise C, C', so enthält auch $C \cup C' - \{x\}$ einen Kreis, da wir andernfalls $C \cup C' - \{x\}$ zu einer Basis B von M ergänzen könnten und zwei verschiedene Fundamentalkreise zu B, x in Händen hielten. Wir fassen diese Eigenschaften von $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ zusammen:

(F4)) ein maximales Element hat; diese Aussage ist auch als Lemma von Tukey bekannt und "äquivalent" zum Auswahlaxiom.

(C1) $0 < |C| < \infty$ für jedes $C \in \mathcal{C}$,

(C2) $C \not\subseteq C'$ für $C \neq C'$ aus $\mathcal{C}$, und

(C3) zu $C \neq C'$ aus $\mathcal{C}$ und $x \in C \cap C'$ gibt es ein $D \in \mathcal{C}$ mit $D \subseteq (C \cup C') - \{x\}$.

Tatsächlich implizieren (C1),(C2),(C3) die folgende, stärkere Aussage

(C3') zu $C, C' \in \mathcal{C}$, $x \in C \cap C'$ und $y \in C - C'$ gibt es ein $D \in \mathcal{C}$ mit $y \in D \subseteq (C \cup C') - \{x\}$.

Denn wäre (C3') falsch für gewisse C, C', x, y, so könnten wir dabei C, C' mit minimalem $|C \cup C'|$ wählen und es gäbe ein $D \in \mathcal{C}$ mit $D \subset C \cup C' - \{x\}$ wegen (C3) und $y \notin D$ nach Annahme. Mit (C2) folgt $D \not\subseteq C$, also gibt es ein $z \in D \cap (C' - C)$. Man betrachte C', D, $z \in C' \cap D$, $x \in C' - D$. Wegen $y \notin C' \cup D$ und (C1) ist $|C' \cup D| < |C \cup C'|$, also gibt es nach Wahl von C, C' ein $D' \in \mathcal{C}$ mit $x \in D' \subseteq C' \cup D - \{z\}$. Man betrachte jetzt C, D', $x \in C \cap D'$, $y \in C - D'$. Wegen $z \notin C \cup D'$ und (C1) ist $|C \cup D'| < |C \cup C'|$, also gibt es nach Wahl von C, C' ein $D'' \in \mathcal{C}$ mit $y \in D'' \subseteq C \cup D' - \{x\} \subseteq C \cup C' - \{x\}$, im Widerspruch zur Annahme.

1.6 Gleichmächtigkeit von Basen, Rang

Wir sind jetzt für den Beweis des folgenden Satzes ausgerüstet.

Theorem 1 *Je zwei Basen eines Matroids haben die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Sind B', B Basen des Matroids M mit $|B'| \leq |B|$ und ist B' endlich, so kann es wegen (F3) keine endliche unabhängige Menge mit mehr als $|B'|$ Elementen geben. Wegen (F4) muß dann B endlich sein und damit $|B| \leq |B'|$.

Wir dürfen daher annehmen, daß B, B' beide unendlich sind. Sind $B - B'$ und $B' - B$ beide endlich, so ist $|B| = |B \cap B'| = |B'|$. Aus Symmetriegründen dürfen wir daher annehmen, $B' - B$ sei unendlich. Für $x \in B - B'$ sei C_x der Fundamentalkreis zu B', x, und $Z := \bigcup_{x \in B - B'} C_x$ sei die Vereinigung all dieser Kreise.

Angenommen, es gäbe $y \in B' - B - Z$. Es gibt einen Kreis C in $B' \cup B$ mit $y \in C$, zum Beispiel den Fundamentalkreis zu y und B, und wir wählen C mit $y \in C$ so, daß $|C \cap (B - B')|$ möglichst klein ist. Wegen $C \not\subseteq B'$ gibt es ein $x \in C \cap (B - B')$. Nun ist $x \in C \cap C_x$ und $y \in C - C_x$, also gibt es vermöge (C3') einen Kreis D mit $y \in D \subseteq (C \cup C_x) - \{x\}$, aber $|D \cap (B - B')| < |C \cap (B - B')|$, Widerspruch.

Also ist $B' - B \subseteq Z$. Wegen der Endlichkeit der C_x ist sind somit auch Z und $B - B'$ unendlich und es gilt $|B' - B| \leq |\bigcup_{x \in B-B'} C_x| \leq |B - B'|$ und, analog, $|B - B'| \leq |B' - B|$. Hieraus folgt leicht $|B| = |B'|$. $\square$

Besitzt $M = (E, \mathcal{F})$ eine endliche Basis B, so setzen wir $r(M) := |B|$, andernfalls $r(M) := \infty$. $r(M)$ heißt der *Rang* von M, und für $X \subseteq E$ bezeichnet

$$r_M(X) := r(M|X)$$

den *Rang von X in M*. Die Basen von $M|X$, also die maximalen in M unabhängigen Teilmengen von X, werden auch als *Basen von X in M* bezeichnet, $r_M(X)$ ist also die Mächtigkeit einer Basis von X in M, falls diese endlich ist, und ∞ sonst. Hierdurch wird eine Abbildung

$$r_M : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

definiert, die *Rangfunktion* von M.

$r = r_M$ besitzt folgende Eigenschaften:

(R1) $r(X) \leq r(Y)$ für alle $X \subseteq Y$ aus $\mathcal{P}(E)$,

(R2) $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \leq r(X) + r(Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{P}(E)$,

(R3) $r(X) \leq |X|$ für alle $X \in \mathcal{P}(E)$.

Ist M *von endlichem Rang* , d.h. $r(M) < \infty$, so gilt zusätzlich:

(R4) Zu $Y \subseteq E$ existiert ein endliches $X \subseteq Y$ mit $r(Y) = r(X)$.

Die Eigenschaften (R1),(R3),(R4) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. Zum Nachweis von (R2) sei o.B.d.A. $r(X)$ endlich. Man ergänze eine Basis B von $X \cap Y$ zu einer Basis D von $X \cup Y$ in M. $D \cap X$ ist unabhängig in $M|X$, $D \cap Y$ ist unabhängig in $M|Y$, $D \cap X \cap Y$ ist gleich B, daher gilt $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) = |B| + |D| = |B| + |D \cap X| + |D \cap Y| - |D \cap X \cap Y| = |D \cap X| + |D \cap Y| \leq r(X) + r(Y)$.

Für ein Matroid endlichen Ranges auf E gilt offensichtlich

$$\mathcal{F}(M) = \{X \subseteq E : r_M(X) = |X|\},$$

daher kann es keine zwei verschiedenen Matroide endlichen Ranges auf E mit derselben Rangfunktion geben.

1.7 Kanonische Darstellungen

Wir können jetzt zeigen, daß ein Matroid M endlichen Ranges $r < \infty$ genau dann eine Darstellung in irgendeinem Vektorraum über K besitzt, wenn es eine Darstellung in dem kanonischen Vektorraum K^r über K besitzt.

Sei nämlich $\varphi : E \to V$ eine Darstellung von M in einem Vektorraum V über K und B eine Basis von M. Dann ist $\varphi(B)$ eine r-elementige, linear unabhängige Teilmenge von V. Sie erzeugt einen r-dimensionalen Untervektorraum U von V. Für $x \in E - B$ ist $\varphi(B \cup \{x\}) = \varphi(B) \cup \{\varphi(x)\}$, linear abhängig, daher liegt $\varphi(x)$ in U, und somit ist $\varphi(E) \subseteq U$. Also ist $\varphi : E \to U$ eine Darstellung von M in U über K. Es gibt bekanntlich einen Vektorraumisomorphismus $\psi : U \to K^r$, und damit ist $\psi \circ \varphi$ eine Darstellung von M in K^r.

Diese Beobachtung hat eine weitere Konsequenz. Genau dann ist ein Matroid M auf einer endlichen Menge E K-linear, wenn es eine $(r(M) \times |E|)$-Matrix A über K gibt für die M isomorph zu $M(A)$ ist. Dies liefert einen weiteren Nachweis dafür, daß $U_{2,4}$ nicht binär ist: andernfalls würden wir nämlich eine 2×4-Matrix über $\mathbb{Z}_2$ angeben können, deren Spalten paarweise verschieden und von Null verschieden sind, und das geht natürlich nicht. $\mathbb{Z}_2^2$ ist quasi "zu klein", um zur Koordinatisierung von $U_{2,4}$ zu taugen.

Natürlich ist ψ festgelegt durch die Angabe der Werte auf der Basis $\varphi(B)$ von U; daher können wir für ein endliches Matroid M stets eine Matrix der Form $A = (E_{r(M)}\, B)$ finden, für die $M(A) \cong M$ ist, wobei $E_{r(M)}$ die $r(M) \times r(M)$-Einheitsmatrix sei.

1.8 Matroide aus submodularen Funktionen

Eine Abbildung $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die (R1),(R2) und (R4) mit $r = f$ erfüllt, heißt *Polymatroid* auf der Menge E oder auch *ganzzahlige*, *finite* (R4), *aufsteigende* (R1), *submodulare* (R2) *Mengenfunktion*, oder schlicht *submodulare Funktion* auf E. Die Rangfunktion eines Matroids endlichen Ranges ist also submodular und erfüllt (R3). In der Kombinatorik treten darüberhinaus eine ganze Reihe weiterer submodularer Funktionen auf. Wir werden jetzt zeigen, daß sich aus *jeder* solchen submodularen Funktion ein Matroid endlichen Ranges gewinnen läßt, und zwar zusammen mit einer besonders einfachen Darstellung seiner Rangfunktion als ein gewisses Minimum.

Hieraus wird sich unmittelbar anschließend ergeben, daß es zu jeder submodularen Funktion r auf E, die (R3) erfüllt, genau ein Matroid endlichen Ranges auf E mit $r_M = r$ gibt. Die Eigenschaft (R3) grenzt damit die Rangfunktionen von Matroiden endlichen Ranges unter den submodularen Funktionen ab. Zu Beginn des zweiten Kapitels werden wir, mit dem jetzt folgenden Satz, die Rangformel für endliche komplexe Vereinigungen von Matroiden endlichen Ranges herleiten.

Theorem 2 *Sei $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine submodulare Funktion auf E und*

$$\mathcal{F}(f) := \{F \subseteq E : f(X) \geq |X| \text{ für alle } X \subseteq F\}.$$

Dann ist $M(f) := (E, \mathcal{F}(f))$ ein Matroid endlichen Ranges auf E und seine