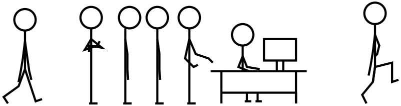
Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt

Doktorandentreffen Stochastik 2013

Ruslan Krenzler

Universität Hamburg

31. Juli 2013



Warteschlange als Modell

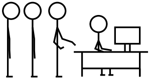
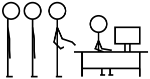


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell



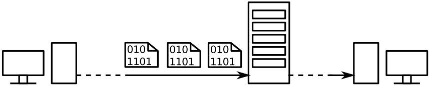


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell

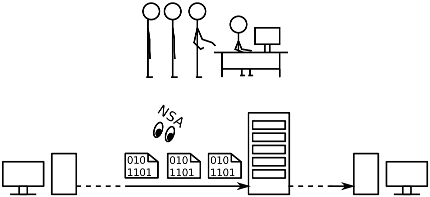


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell

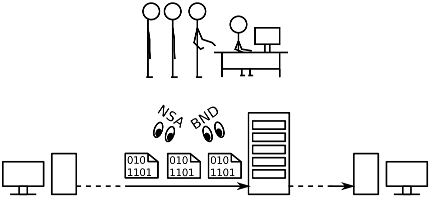


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell

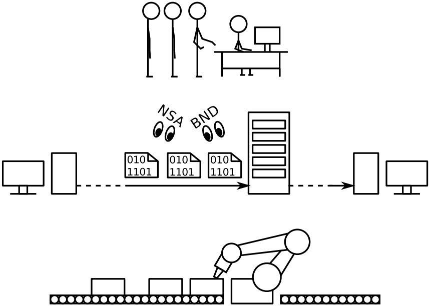


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell

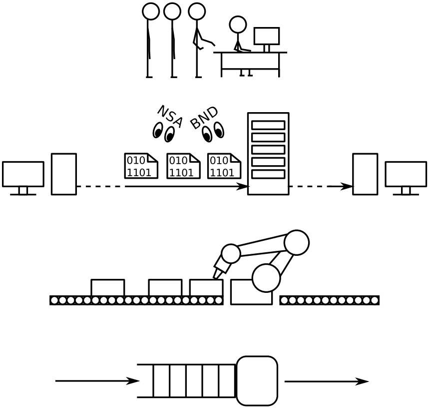
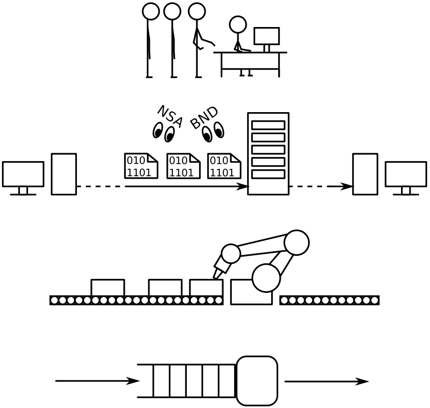


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell



Anwesenheit vom Sachbearbeiter
macht Pause / anwesend

Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell

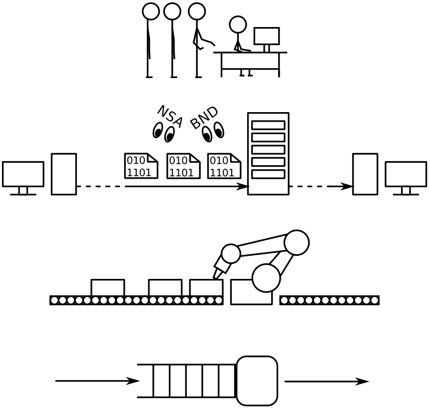
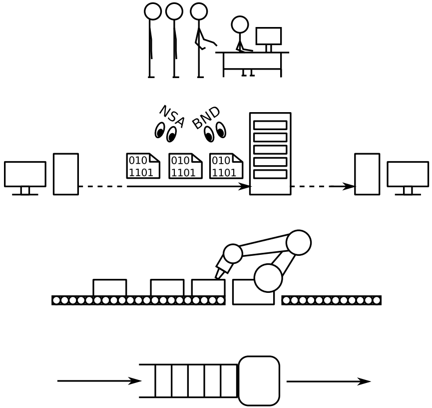


Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Anwesenheit vom Sachbearbeiter
macht Pause / anwesend

endlicher Buffer
Bufferlänge

Warteschlange als Modell



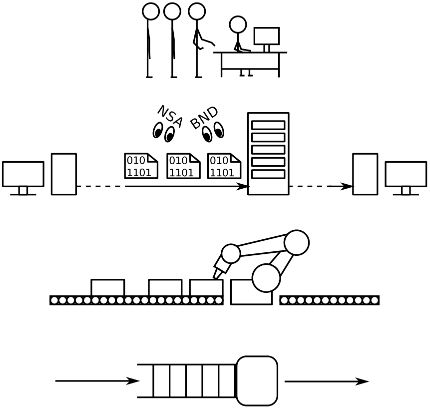
Anwesenheit vom Sachbearbeiter
macht Pause / anwesend

endlicher Buffer
Bufferlänge

Wartungzustand
gewartet / einsatzbereit

Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Warteschlange als Modell



Anwesenheit vom Sachbearbeiter
macht Pause / anwesend

endlicher Buffer
Bufferlänge

Wartungzustand
gewartet / einsatzbereit

abstrakter Prozess
abzählbar viele Zuständen

Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

Systembeschreibung

Systembeschreibung

- Gegeben:

Systembeschreibung

- Gegeben:
  - Zustände, abzählbar viele

Systembeschreibung

- Gegeben:
  - Zustände, abzählbar viele
  - Übergangsraten $\in \mathbb{R}_0^+$

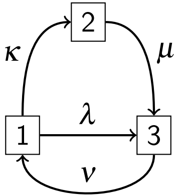
Systembeschreibung

- Gegeben:
  - Zustände, abzählbar viele
  - Übergangsraten $\in \mathbb{R}_0^+$
- Gesucht:

Systembeschreibung

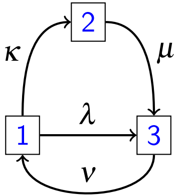
- Gegeben:
  - Zustände, abzählbar viele
  - Übergangsraten $\in \mathbb{R}_0^+$
- Gesucht:
  - Wahrscheinlichkeit eines Zustandes (langfristiges Verhalten)

Mathematisches Modell vom drei Zustände System.



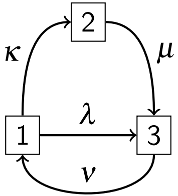
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$



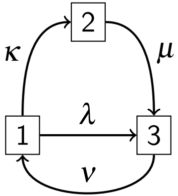
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$
- Zeitraum $t \in [0, \infty]$



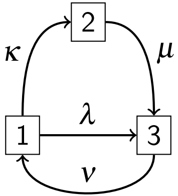
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1,2,3\}$
- Zeitraum $t \in [0,\infty]$
- Stochastischer Prozess $X(t) \in \mathscr{E}$



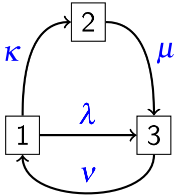
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$
- Zeitraum $t \in [0, \infty]$
- Stochastischer Prozess $X(t) \in \mathscr{E}$
- Exponentielle Verweilzeiten



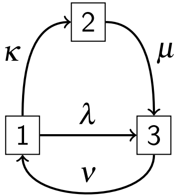
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$
- Zeitraum $t \in [0, \infty]$
- Stochastischer Prozess $X(t) \in \mathscr{E}$
- Exponentielle Verweilzeiten
- Übergangsraten: κ, λ, μ,ν



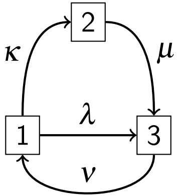
Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1,2,3\}$
- Zeitraum $t \in [0,\infty]$
- Stochastischer Prozess $X(t) \in \mathscr{E}$
- Exponentielle Verweilzeiten
- Übergangsraten: κ, λ, μ,ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi(k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = k)$, $k \in \{1,2,3\}$



Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum $\mathscr{E} = \{1, 2, 3\}$
- Zeitraum $t \in [0, \infty]$
- Stochastischer Prozess $X(t) \in \mathscr{E}$
- Exponentielle Verweilzeiten
- Übergangsraten: κ, λ, μ,ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi(k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ für »spezielle« Generatormatrix Q

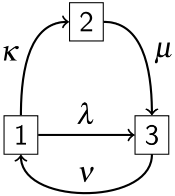


Generatormatrix

Generatormatrix
- Werte außerhalb der Diagonale nicht negativ.
- Zeilensumme ist 0.

Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

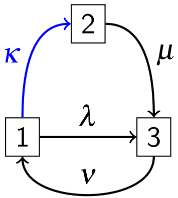


$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\right)$$

Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

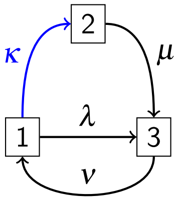
$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\right)$$



Generatormatrix

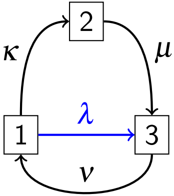
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \right)$$



Generatormatrix

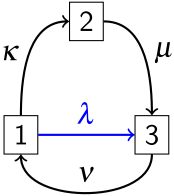
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.



$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\right)$$

Generatormatrix

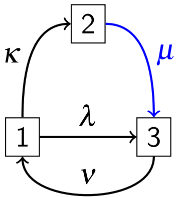
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.



$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array} \right)$$

Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

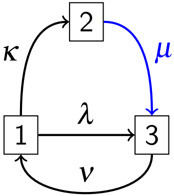


$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}\right)$$

Generatormatrix

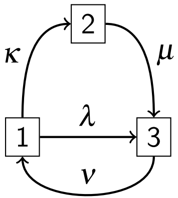
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & & & \color{blue}{\mu} \\ 3 & & & \end{array}\right)$$



Generatormatrix

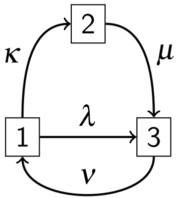
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.



$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & & & \mu \\ 3 & & & \end{array}\right)$$

Generatormatrix

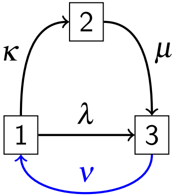
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.



$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & {\color{blue}0} & & \mu \\ 3 & & & \end{array}\right)$$

Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

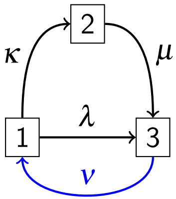


$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & & \mu \\ 3 & & & \end{array} \right)$$

Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

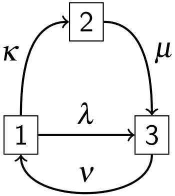
$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & & \mu \\ 3 & \nu & & \end{array} \right)$$



Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

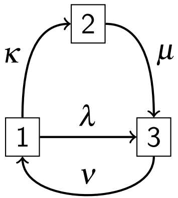
$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & \kappa & \lambda \\ 0 & & \mu \\ \nu & & \end{pmatrix} \end{array}$$



Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

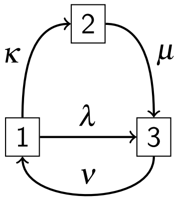
$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & & \mu \\ 3 & \nu & \color{blue}{0} & \end{array} \right)$$



Generatormatrix

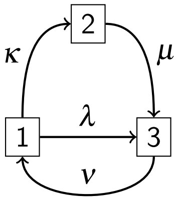
- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.

$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & & \mu \\ 3 & \nu & 0 & \end{array}$$



Generatormatrix

- Gegeben: κ, λ, μ, ν
- Gesucht: Grenzverteilung $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse $\pi Q = 0$ mit Generatormatrix.



$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -(\lambda+\kappa) & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & -\mu & \mu \\ 3 & \nu & 0 & -\nu \end{array}$$

Zusammenfassung:

- Gegeben: Zustände, Übergangsraten und damit eine Matrix Q

Zusammenfassung:

- Gegeben: Zustände, Übergangsraten und damit eine Matrix Q
- Gesucht: Grenzverteilung π

Zusammenfassung:

- Gegeben: Zustände, Übergangsraten und damit eine Matrix Q
- Gesucht: Grenzverteilung π
- Löse: $\pi Q = 0$, π normiert

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.
  - Für eine Warteschlange[1] mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum $\{0, \ldots, 99\}$ beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange) $Q \in \mathbb{R}^{100 x 100}$.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.
  - Für eine Warteschlange[1] mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum $\{0, ..., 99\}$ beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange) $Q \in \mathbb{R}^{100x100}$.
  - Für eine Warteschlange mit 99 Plätzen und 7 Umweltzuständen (Zustandsraum $\{0, ..., 99\} \times \{1, ..., 7\}$) $Q \in \mathbb{R}^{700x700}$.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.
  - Für eine Warteschlange[1] mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum $\{0, \dots, 99\}$ beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange) $Q \in \mathbb{R}^{100x100}$.
  - Für eine Warteschlange mit 99 Plätzen und 7 Umweltzuständen (Zustandsraum $\{0, \dots, 99\} \times \{1, \dots, 7\}$) $Q \in \mathbb{R}^{700x700}$.
  - Für eine Warteschlange mit ∞ Plätzen $Q \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.
  - Für eine Warteschlange[1] mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum $\{0, ..., 99\}$ beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange) $Q \in \mathbb{R}^{100x100}$.
  - Für eine Warteschlange mit 99 Plätzen und 7 Umweltzuständen (Zustandsraum $\{0, ..., 99\} \times \{1, ..., 7\}$) $Q \in \mathbb{R}^{700x700}$.
  - Für eine Warteschlange mit ∞ Plätzen $Q \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$. Das Problem kann aber dadurch einfacher werden!

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Herausforderung:

Löse: $\pi Q = 0$, π normiert.

- Problem: die Matrix Q ist groß.
  - Für eine Warteschlange[1] mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum $\{0,...,99\}$ beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange) $Q \in \mathbb{R}^{100x100}$.
  - Für eine Warteschlange mit 99 Plätzen und 7 Umweltzuständen (Zustandsraum $\{0,...,99\} \times \{1,...,7\}$) $Q \in \mathbb{R}^{700x700}$.
  - Für eine Warteschlange mit ∞ Plätzen $Q \in \mathbb{R}^{\infty\times\infty}$. Das Problem kann aber dadurch einfacher werden!
- Uns hilft: spezielle Struktur von Q.

[1] In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ $M/M/1/\cdot$ gemeint.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.
- Kundenverhalten während der Auffüllung (!):

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.
- Kundenverhalten während der Auffüllung (!):
    - Kunden die bereits in der Warteschlange stehen, warten bis die Auffüllung beendet ist.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.
- Kundenverhalten während der Auffüllung (!):
  - Kunden die bereits in der Warteschlange stehen, warten bis die Auffüllung beendet ist.
  - Neue Kunden gehen anderswo hin $\hat{=}$ gehen verloren.

Problemstellung

Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.
- Kundenverhalten während der Auffüllung (!):
  - Kunden die bereits in der Warteschlange stehen, warten bis die Auffüllung beendet ist.
  - Neue Kunden gehen anderswo hin$\widehat{=}$gehen verloren.

Gesucht:

Grenzverteilung von Kunden und Dosen im Automaten.

Mathematisches Modell

Mathematisches Modell

- Zustände (n, k): bedeutet n Menschen in der Warteschlange, k Dosen im Automaten. Also $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1, 2\}$

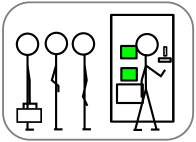


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen)$=(n, k) = (4, 2)$

Mathematisches Modell

- Zustände (n,k): bedeutet n Menschen in der Warteschlange, k Dosen im Automaten. Also $(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,1,2\}$

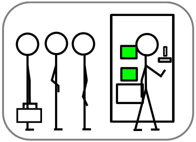


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen)$=(n,k) = (4,2)$

- Prozess $Z(t) = (X(t), Y(t) : t \in [0,\infty))$, wobei $X(t)$ die Warteschlangenlänge und $Y(t)$ die Umwelt ist.

Mathematisches Modell

- Zustände (n,k): bedeutet n Menschen in der Warteschlange, k Dosen im Automaten. Also $(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,1,2\}$

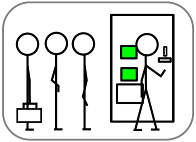


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen)$=(n,k) = (4,2)$

- Prozess $Z(t) = (X(t), Y(t) : t \in [0,\infty))$, wobei $X(t)$ die Warteschlangenlänge und $Y(t)$ die Umwelt ist.
- Kundenankünfte sind Poisson-verteilt mit Rate λ.

Mathematisches Modell

- Zustände (n,k): bedeutet n Menschen in der Warteschlange, k Dosen im Automaten. Also $(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,1,2\}$

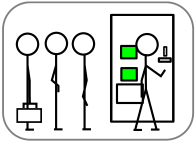


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen)$=(n,k)=(4,2)$

- Prozess $Z(t) = (X(t), Y(t) : t \in [0,\infty))$, wobei $X(t)$ die Warteschlangenlänge und $Y(t)$ die Umwelt ist.
- Kundenankünfte sind Poisson-verteilt mit Rate λ.
- Bedienung ist exponentialverteilt mit Rate μ.

Mathematisches Modell

- Zustände (n, k): bedeutet n Menschen in der Warteschlange, k Dosen im Automaten. Also $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1, 2\}$

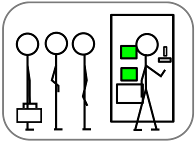


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen)$=(n, k) = (4, 2)$

- Prozess $Z(t) = (X(t), Y(t) : t \in [0, \infty))$, wobei $X(t)$ die Warteschlangenlänge und $Y(t)$ die Umwelt ist.
- Kundenankünfte sind Poisson-verteilt mit Rate λ.
- Bedienung ist exponentialverteilt mit Rate μ.
- Auffüllung ist exponentialverteilt mit Rate ν.

Erstellung von Q

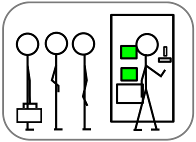


Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen)$= (X(t), Y(t)) = (4,2)$

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)											
(4,1)											
(4,2)											
⋮											

Erstellung von Q

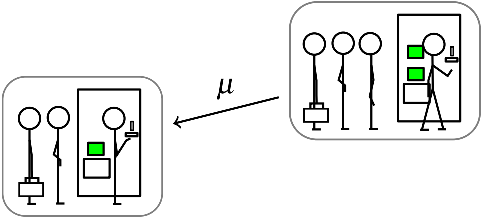


Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen)$= (X(t), Y(t)) = (4,2)$

$$
\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \dots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \dots \\
\hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & & & & & & & \\
(4,1) & & & & & & & & & & & \\
(4,2) & & & & & & & & & & & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

Erstellung von Q

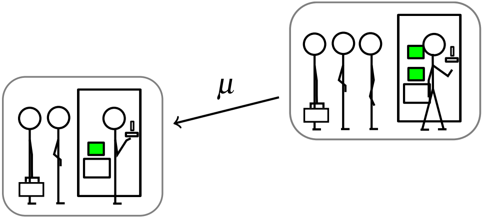


Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen)$= (X(t), Y(t)) = (4,2)$

	$\dots$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(5,0)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$\dots$
$\vdots$											
$(4,0)$											
$(4,1)$											
$(4,2)$			μ								
$\vdots$											

Erstellung von Q

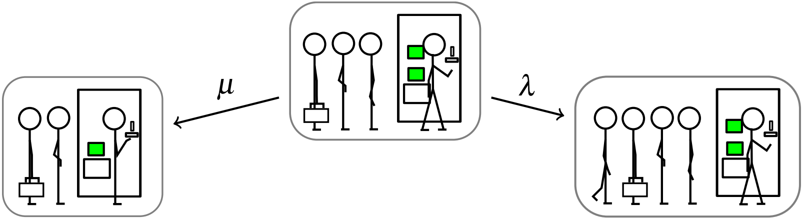


Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen)$= (X(t), Y(t)) = (4,2)$

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)											
(4,1)											
(4,2)			μ								
⋮											

Erstellung von Q

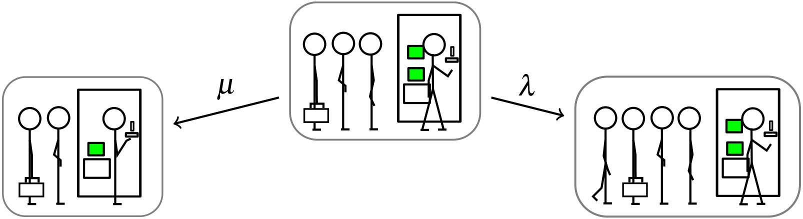


Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen)$= (X(t), Y(t)) = (4,2)$

$$
\left(
\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \dots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \dots \\
\hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & & & & & & & \\
(4,1) & & & & & & & & & & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
\right)
$$

Erstellung von Q

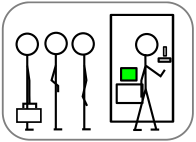


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,1)$

$$\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \cdots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \cdots \\ \hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\ \hline
(4,0) & & & & & & & & & & & \\
\color{blue}{(4,1)} & & & & & & & & & & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\ \hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\end{array}\right)$$

Erstellung von Q

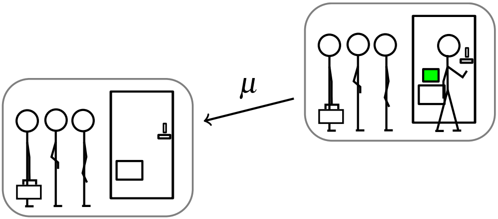


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,1)$

	…	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(5,0)$	$(5,1)$	$(5,2)$	…
$\vdots$											
$(4,0)$											
$(4,1)$											
$(4,2)$			μ							λ	
$\vdots$											

Erstellung von Q

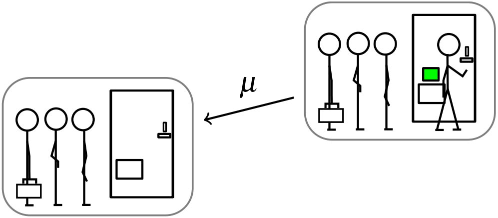


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,1)$

$$
\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \dots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \dots \\
\hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & & & & & & & \\
(4,1) & & \color{blue}{\mu} & & & & & & & & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\end{array}\right)
$$

Erstellung von Q

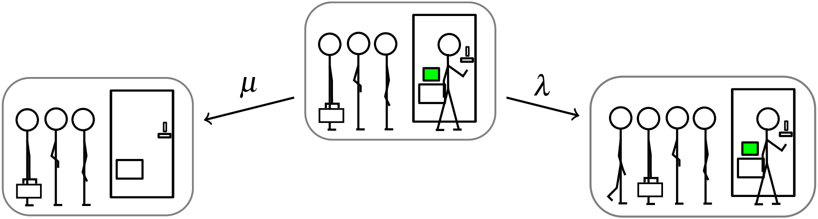


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4, 1)$

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)											
(4,1)		μ									
(4,2)			μ							λ	
⋮											

Erstellung von Q

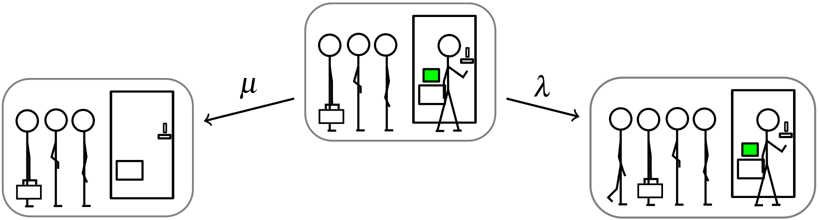


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,1)$

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)											
(4,1)		μ							λ		
(4,2)			μ							λ	
⋮											

Erstellung von Q

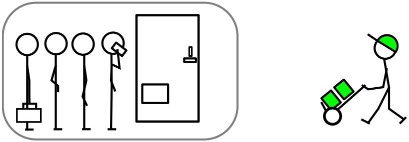


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,0)$

	$\ldots$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(5,0)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$\ldots$
$\vdots$											
$(4,0)$											
$(4,1)$		μ							λ		
$(4,2)$			μ							λ	
$\vdots$											

Erstellung von Q

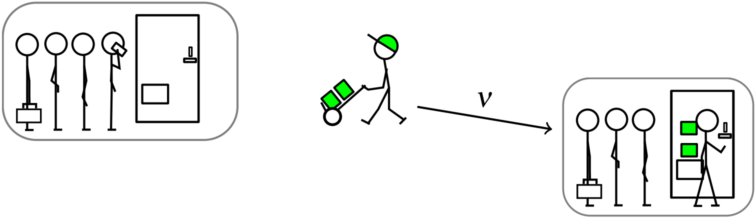


Abbildung: Änderung von $(X(t), Y(t)) = (4,0)$

	...	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	...
$\vdots$											
(4,0)											
(4,1)		μ							λ		
(4,2)			μ							λ	
$\vdots$											

Erstellung von Q

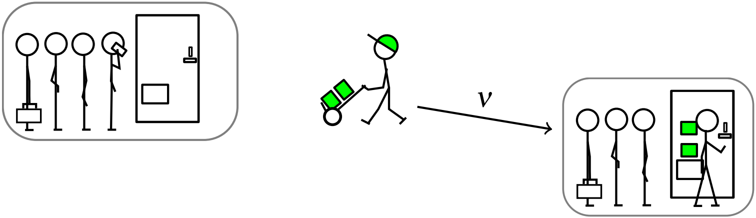


Abbildung: Änderung von $(X(t),Y(t)) = (4,0)$

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)							ν				
(4,1)		μ							λ		
(4,2)			μ							λ	
⋮											

Diagonale von Q

$$\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \cdots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \cdots \\ \hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\ \hline
(4,0) & & & & & & & \nu & & & & \\
(4,1) & & \mu & & & & & & & \lambda & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\ \hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)$$

Diagonale von Q

$$
\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \dots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \dots \\
\hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & {\color{blue}-\nu} & & \nu & & & & \\
(4,1) & & \mu & & & & & & & \lambda & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

Diagonale von Q

$$
\left(
\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \cdots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \cdots \\
\hline
\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & -\nu & & \nu & & & & \\
(4,1) & & \mu & & & & {\color{blue}-(\mu+\lambda)} & & & \lambda & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & & & & \lambda & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
\right)
$$

Diagonale von Q

$$\left(\begin{array}{c||c|ccc|ccc|ccc|c}
 & \cdots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \cdots \\
\hline\hline
\vdots & & & & & & & & & & & \\
\hline
(4,0) & & & & & -\nu & & \nu & & & & \\
(4,1) & & \mu & & & & -(\mu+\lambda) & & & \lambda & & \\
(4,2) & & & \mu & & & & -(\mu+\lambda) & & & \lambda & \\
\hline
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}\right)$$

Diagonale von Q

	…	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	…
⋮											
(4,0)					$-\nu$		ν				
(4,1)		μ				$-(\mu+\lambda)$			λ		
(4,2)			μ				$-(\mu+\lambda)$			λ	
⋮											

Q-Struktur

Struktur von Q Matrizen für $M/M/1/\infty$ -Warteschlangen und Umweltzustände K.

$$Q = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & & A_{-1} & A_0 & A_1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

$$B_i, A_i \in \mathbb{R}^{K \times K}$$

Lösung

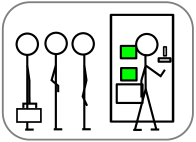


Abbildung: $(n, k) = (4, 2)$

λ-Ankunftsrate
μ-Bedienrate
ν-Auffüllungsrate

Für Grenzverteilung $\pi(n, k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Lösung

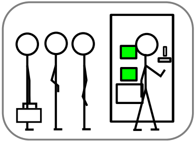


Abbildung: $(n,k) = (4,2)$

λ-Ankunftsrate
μ-Bedienrate
ν-Auffüllungsrate

Für Grenzverteilung $\pi(n,k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Produktform!

$$\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$$

Lösung

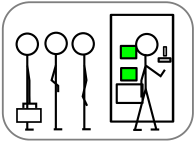


Abbildung: $(n,k) = (4,2)$

λ-Ankunftsrate
μ-Bedienrate
ν-Auffüllungsrate

Für Grenzverteilung $\pi(n,k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Produktform!

$$\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$$

mit $\xi(n) = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ und $\theta(k) = \begin{cases} \frac{1}{2+\frac{\lambda}{\nu}}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) & , \quad k=0 \\ \frac{1}{2+\frac{\lambda}{\nu}} & , \quad k\in\{1,2\} \end{cases}$

Lösungseigenschaften

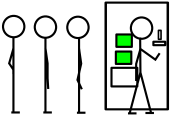


Abbildung: $(n, k) = (4, 2)$

Für *Grenzverteilung* $\pi(n, k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Hübsche Eigenschaften von π

Lösungseigenschaften

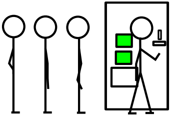


Abbildung: $(n, k) = (4, 2)$

Für *Grenzverteilung* $\pi(n,k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Hübsche Eigenschaften von π

- Produktform $\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$

Lösungseigenschaften

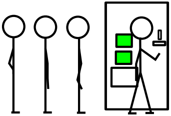


Abbildung: $(n, k) = (4, 2)$

Für *Grenzverteilung* $\pi(n,k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Hübsche Eigenschaften von π

- Produktform $\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$
- $\xi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ Warteschlangenlänge ist stochastisch unabhängig von der Umwelt und den Umweltparametern.

Lösungseigenschaften

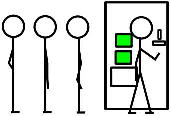


Abbildung: $(n, k) = (4, 2)$

Für *Grenzverteilung* $\pi(n,k) := \lim_{n\to\infty} P(X(t), Y(t))$ gilt

Hübsche Eigenschaften von π

- Produktform $\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$
- $\xi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ Warteschlangenlänge ist stochastisch unabhängig von der Umwelt und den Umweltparametern.
- $\theta(k)$ Umwelt ist stochastisch unabhängig von der Bedienrate μ.

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0,1,2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n,k) \to (n-1, k-1) = \mu$, $k \neq 0$	

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0,1,2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n,k) \to (n-1,k-1) = \mu$, $k \neq 0$	$(n,k) \to (n-1,m)$ $= R_{km}\mu$, beliebige stochastische Matrix R

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n, k) \to (n-1, k-1)=$ μ, $k \neq 0$	$(n, k) \to (n-1, m)$ $= R_{km}\mu$, beliebige stochastische Matrix R

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n, k) \to (n-1, k-1) = \mu$, $k \neq 0$	$(n, k) \to (n-1, m) = R_{km}\mu$, beliebige stochastische Matrix R
Warteschlange unabhängige Umweltänderungen		

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n,k) \to (n-1, k-1) = \mu$, $k \neq 0$	$(n,k) \to (n-1, m) = R_{km}\mu$, beliebige stochastische Matrix R
Warteschlange unabhängige Umweltänderungen	$(n,0) \to (n,2) = \nu$ (Auffüllen)	

Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$-Verlustsystem
Ankünfte	Poisson(λ)	Poisson(λ)
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n))$, $X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	K -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n, k) \to (n-1, k-1) = \mu$, $k \neq 0$	$(n, k) \to (n-1, m) = R_{km}\mu$, beliebige stochastische Matrix R
Warteschlange unabhängige Umweltänderungen	$(n, 0) \to (n, 2) = \nu$ (Auffüllen)	$(n, k) \to (n, m) = V_{km}$, beliebige Generatormatrix V

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

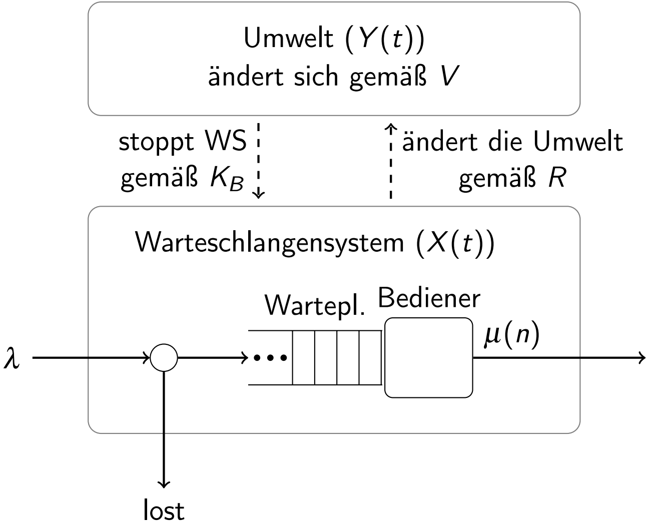


Figure: Verlustssystem mit Parametern $\lambda, \mu(n), K_B, R, V$

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.
- *Markov*-Bedienung, d.h. exponentielle Bedienzeit.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.
- *Markov*-Bedienung, d.h. exponentielle Bedienzeit.
- *Eine* Bedieneinheit.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.
- *Markov*-Bedienung, d.h. exponentielle Bedienzeit.
- *Eine* Bedieneinheit.
- *Unendlich* viele Warteplätze.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.
- *Markov*-Bedienung, d.h. exponentielle Bedienzeit.
- *Eine* Bedieneinheit.
- *Unendlich* viele Warteplätze.
- Bei blockierenden Umweltzuständen (aus K_B) gehen Kunden *verloren*.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Beschreibung

Ein $M/M/1/\infty$-Verlustsystem mit Umweltzuständen K ist ein zweidimensionaler Prozess $(X(t), Y(t))$.

- $X(t) \in \mathbb{N}_0$ beschreibt die Warteschlangenlänge (Anzahl der Kunden) zum Zeitpunkt t.
- $Y(t) \in K$ beschreibt den Umweltzustand zum Zeitpunkt t.

Das System wird über λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V Parameter vollständig definiert.

Gesucht: Grenzverteilung

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n, Y(t) = k)$$

Zusammenhang zwischen I_W und K_B

Die Matrix $I_W \in \{0,1\}^{K \times K}$ ist eine spezielle Möglichkeit blockierende Zustände K_B zu beschreiben.

$$(I_W)_{km} := \delta_{km} 1_{[k \notin K_B]}$$

Beispiel $K = \{0,1,2\}$, $K_B = \{0\}$

$$I_W = \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Lösung

Sei $(X(t), Y(t))$ ein ergodisches $M/M/1/\infty$-Verlustystem mit Umweltzuständen K und Systemparametern:
λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V.

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Lösung

Sei $(X(t), Y(t))$ ein ergodisches $M/M/1/\infty$-Verlustystem mit Umweltzuständen K und Systemparametern:
λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V.
Dann gilt für die Grenzverteilung

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t)=n, Y(t)=k)$$

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Lösung

Sei $(X(t), Y(t))$ ein ergodisches $M/M/1/\infty$-Verlustystem mit Umweltzuständen K und Systemparametern:
λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V.
Dann gilt für die Grenzverteilung

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n, Y(t) = k)$$

$$\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$$

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Lösung

Sei $(X(t), Y(t))$ ein ergodisches $M/M/1/\infty$-Verlustystem mit Umweltzuständen K und Systemparametern:
λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V.
Dann gilt für die Grenzverteilung

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t)=n, Y(t)=k)$$

$$\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$$

mit

$$\xi(n) = C^{-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu(i)}\right), \qquad C := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu(i)}\right)\right)$$

$M/M/1/\infty$-Verlustsystem: Lösung

Sei $(X(t), Y(t))$ ein ergodisches $M/M/1/\infty$-Verlustystem mit Umweltzuständen K und Systemparametern:
λ, $\mu(n)$, K_B (bzw. I_W), R, V.
Dann gilt für die Grenzverteilung

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n, Y(t) = k)$$

$$\pi(n,k) = \xi(n)\theta(k)$$

mit

$$\xi(n) = C^{-1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu(i)}\right), \qquad C := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\mu(i)}\right)\right)$$

und θ al stochastische Lösung von

$$\theta\lambda(I_W(R-I)+V) = 0 \qquad \text{(einfacher zu Lösen als } \pi Q = 0)$$

Aktuelle Forschung

- Andere Lösungsmethoden für Verlustsysteme

Aktuelle Forschung

- Andere Lösungsmethoden für Verlustsysteme
- Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt, aber ohne Kundenverlust

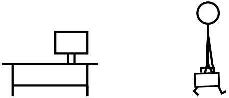
Aktuelle Forschung

- Andere Lösungsmethoden für Verlustsysteme
- Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt, aber ohne Kundenverlust
- Warteschlangennetze in einer Umwelt

Aktuelle Forschung

- Andere Lösungsmethoden für Verlustsysteme
- Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt, aber ohne Kundenverlust
- Warteschlangennetze in einer Umwelt
- Modellierung mit Hilfe von Warteschlangensystemen

Ende



Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Nicht-Exponentiell?

Was tun, wenn die Verweilzeit nicht exponentiell ist?

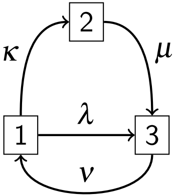
Nicht-Exponentiell?

Was tun, wenn die Verweilzeit nicht exponentiell ist?

Approximation mit »Phasen«.

Phasenverteilung

Aufgabe: Eine spezielle Verteilung näherungsweise konstruieren.
Lösung: Füge L zusätzliche »Zwischenzustände« - die Phasen - ein.

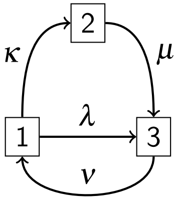


(a) $Exp(\mu)$

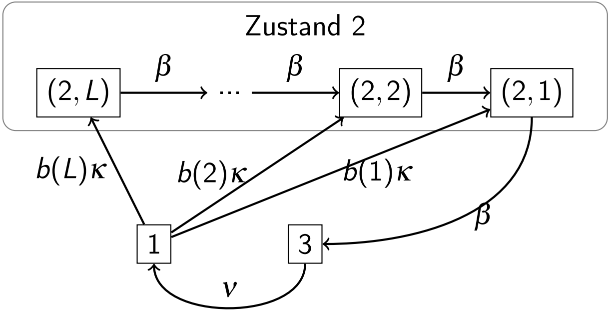
Abbildung: Verweilzeit im Zustand 2, Phasenapproximation

Phasenverteilung

Aufgabe: Eine spezielle Verteilung näherungsweise konstruieren.
Lösung: Füge L zusätzliche »Zwischenzustände« - die Phasen - ein.



(a) $Exp(\mu)$



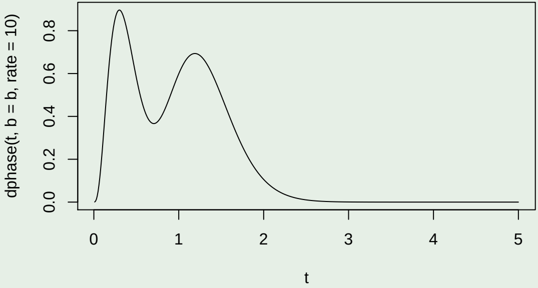
(b) Phasenverteilt mit L Phasen

Abbildung: Verweilzeit im Zustand 2, Phasenapproximation

Phasendichte, Beispiel

Beispiel: Dichte einer Phasenverteilung

mit Parametern $L = 13$, $\beta = 10$, $b(4) = \frac{2}{5}$, $b(13) = \frac{3}{5}$



Phaseverteilung Formal

Definition

Für $k \in \mathbb{N}$ und $\beta > 0$ sei

$$\Gamma_{\beta,k}(s) = 1 - e^{-\beta s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\beta s)^i}{i!}, \quad s \geq 0,$$

Für $\beta \in (0, \infty)$, $L \in \mathbb{N}$, und Wahrscheinlickeiten $b(1), \dots, b(L)$ mit $b(L) > 0$ so bezeichne die Verteilungsfunktion

$$B(s) = \sum_{\ell=1}^{L} b(\ell) \Gamma_{\beta,\ell}(s), \quad s \geq 0, \tag{1}$$

eine Phasenverteilung.

Durch Änderung von β, L, und b können wir eine beliebige Verteilung auf $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$ approximieren.

Getränkeautomat: θ-Lösung

$$\lambda,\ \mu,\ I_W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},\ R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},\ V = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -\nu 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\theta(\lambda I_W(R-I)+V)=0$$

$$\iff (\theta(0),\theta(1),\theta(2)) \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -\nu & 0 & \nu \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \end{array} = 0$$

$$\Longrightarrow \theta(0)\nu = \theta(1)\lambda \Longrightarrow \theta(0) = \frac{\lambda}{\nu}\theta(1)$$
$$\Longrightarrow \theta(1)\lambda = \theta(2)\lambda \Longrightarrow \theta(1) = \theta(1)$$

Normierungsbedienung:

$$1 = \sum_{k=0}^{2} \theta(k) = \left(\frac{\lambda}{\nu}+2\right)\theta(1) \Longrightarrow \theta(1) = \frac{1}{\frac{\lambda}{\nu}+2}$$

Eingebettete Markov Ketten.

Verlustsysteme nur zu Zeitpunkten betrachten, wenn ein Kunde das System verlässt. Anstatt eines Prozesses $(X(t), Y(t) : t \in [0, \infty])$ betrachtet man eine Markov-Kette $(\hat{X}(i), \hat{Y}(i) : i \in \mathbb{N}_0)$
Es ist bekannt, dass für die Grenzverteilungen

$$\xi(n) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n), \qquad \hat{\xi}(n) = \lim_{i\to\infty} P(\hat{X}(i) = n)$$

eines $M/M/1/\infty$-Systems (ohne Umwelt) gilt

$$\xi = \hat{\xi}$$

Wir konnten aber zeigen, dass für Verlustsysteme Fälle auftreten können mit

$$\pi(n,k) := \lim_{t\to\infty} P(X(t) = n, Y(t) = k), \hat{\pi}(n,k) = \lim_{i\to\infty} P(\hat{X}(i) = n, \hat{Y}(i) = k)$$

$$\pi \neq \hat{\pi}$$

Literatur

M.F. Neuts.
Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models - An Algorithmic Approach.
John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981.

L. Kleinrock.
Queueing Theory, volume I.
John Wiley and Sons, New York, 1975.

Preprints

- Ruslan Krenzler und Hans Daduna.
  Loss systems in a random environment - steady state analysis.
  November 2012.
  http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/prst/prst2012-04.pdf

- Ruslan Krenzler und Hans Daduna.
  Ruslan Krenzler and Hans Daduna. Loss systems in a random environment - embedded markov chains analysis.
  May 2013.
  http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/prst/prst2013-02.pdf