

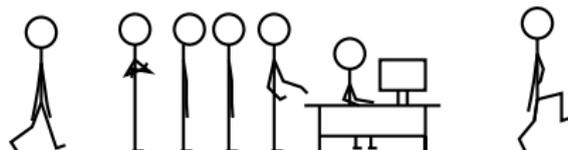
# Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt

Doktorandentreffen Stochastik 2013

Ruslan Krenzler

Universität Hamburg

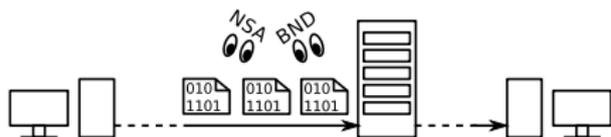
31. Juli 2013



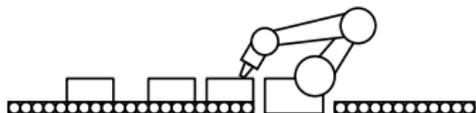
# Warteschlange als Modell



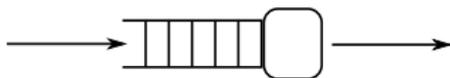
Anwesenheit vom Sachbearbeiter  
macht Pause / anwesend



endlicher Buffer  
Bufferlänge



Wartungszustand  
gewartet / einsatzbereit



abstrakter Prozess  
abzählbar viele Zuständen

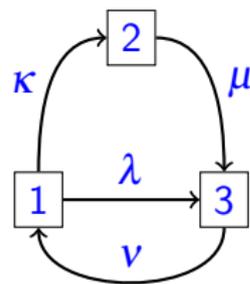
Abbildung: Beispiele für Warteschlangen.

# Systembeschreibung

- Gegeben:
  - Zustände, abzählbar viele
  - Übergangsraten  $\in \mathbb{R}_0^+$
- Gesucht:
  - Wahrscheinlichkeit eines Zustandes (langfristiges Verhalten)

## Mathematisches Modell vom drei Zustände System.

- Zustandsraum  $\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$
- Zeitraum  $t \in [0, \infty]$
- Stochastischer Prozess  $X(t) \in \mathcal{E}$
- Exponentielle Verweilzeiten
- Übergangsraten:  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$
- Gesucht: Grenzverteilung  
 $\pi(k) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = k)$ ,  
 $k \in \{1, 2, 3\}$
- Ansatz: Löse  $\pi Q = 0$  für  
 »spezielle« Generatormatrix  $Q$



# Generatormatrix

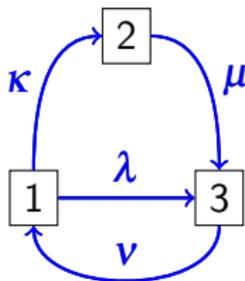
## Generatormatrix

- Werte außerhalb der Diagonale nicht negativ.
- Zeilensumme ist 0.

# Generatormatrix

- Gegeben:  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$
- Gesucht: Grenzverteilung  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3))$
- Ansatz: Löse  $\pi Q = 0$  mit Generatormatrix.

$$Q = \left( \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -(\lambda + \kappa) & \kappa & \lambda \\ 2 & 0 & -\mu & \mu \\ 3 & \nu & 0 & -\nu \end{array} \right)$$



# Zusammenfassung:

- **Gegeben:** Zustände, Übergangsraten und damit eine Matrix  $Q$
- **Gesucht:** Grenzverteilung  $\pi$
- **Löse:**  $\pi Q = 0$ ,  $\pi$  normiert

## Herausforderung:

Löse:  $\pi Q = 0$ ,  $\pi$  normiert.

- Problem: die Matrix  $Q$  ist groß.
  - Für eine Warteschlange<sup>1</sup> mit 99 Warteplätzen (Zustandsraum  $\{0, \dots, 99\}$  beschreibt. Kundenanzahl in der Warteschlange)  $Q \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ .
  - Für eine Warteschlange mit 99 Plätzen und 7 Umweltzuständen (Zustandsraum  $\{0, \dots, 99\} \times \{1, \dots, 7\}$ )  $Q \in \mathbb{R}^{700 \times 700}$ .
  - Für eine Warteschlange mit  $\infty$  Plätzen  $Q \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$ . Das Problem kann aber dadurch einfacher werden!
- Uns hilft: spezielle Struktur von  $Q$ .

<sup>1</sup>In diesem Beispiel sind Warteschlangen vom Typ  $M/M/1/\cdot$  gemeint.

# Problemstellung

## Warteschlange an einem Getränkeautomaten

- Bedienzeit ist zufällig. Umfasst Geld einwerfen, Dose abholen usw.
- Die Bedienung erfolgt nach FCFS-Prinzip.
- Getränkekapazität begrenzt. (maximal zwei Dosen).
- Sobald der Automat leer ist, wird eine Auffüllung angeordnet.
- Kundenverhalten während der Auffüllung (!):
  - Kunden die bereits in der Warteschlange stehen, warten bis die Auffüllung beendet ist.
  - Neue Kunden gehen anderswo hin  $\hat{=}$  gehen verloren.

## Gesucht:

Grenzverteilung von Kunden und Dosen im Automaten.

# Mathematisches Modell

- Zustände  $(n, k)$ : bedeutet  $n$  Menschen in der Warteschlange,  $k$  Dosen im Automaten. Also  $(n, k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1, 2\}$

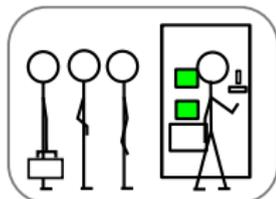


Abbildung: Zustand (Menschen, Dosen) =  $(n, k) = (4, 2)$

- Prozess  $Z(t) = (X(t), Y(t) : t \in [0, \infty))$ , wobei  $X(t)$  die Warteschlangenlänge und  $Y(t)$  die Umwelt ist.
- Kundenankünfte sind Poisson-verteilt mit Rate  $\lambda$ .
- Bedienung ist exponentialverteilt mit Rate  $\mu$ .
- Auffüllung ist exponentialverteilt mit Rate  $\nu$ .

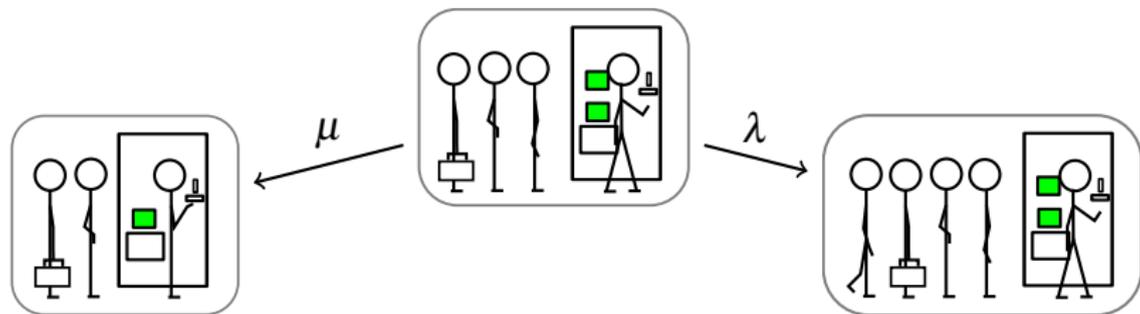
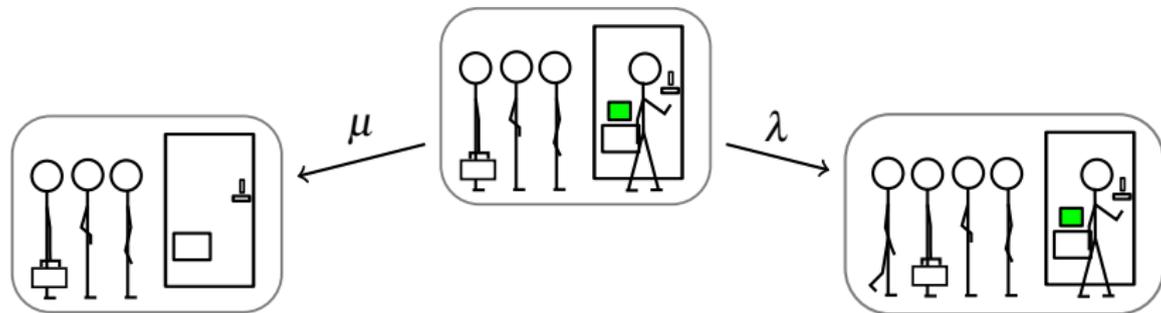
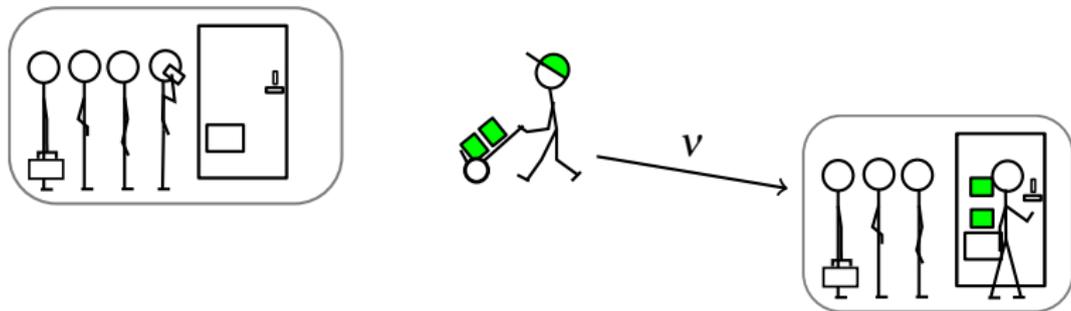
Erstellung von  $Q$ 

Abbildung: Mögliche Änderung von (Menschen, Dosen) =  $(X(t), Y(t)) = (4, 2)$

	...	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	...
⋮											
(4,0)											
(4,1)											
(4,2)			$\mu$							$\lambda$	
⋮											

Erstellung von  $Q$ Abbildung: Änderung von  $(X(t), Y(t)) = (4, 1)$ 

	...	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	...
⋮											
(4,0)											
(4,1)		$\mu$							$\lambda$		
(4,2)			$\mu$							$\lambda$	
⋮											

Erstellung von  $Q$ Abbildung: Änderung von  $(X(t), Y(t)) = (4, 0)$ 

	...	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	...
⋮											
(4,0)							$\nu$				
(4,1)		$\mu$							$\lambda$		
(4,2)			$\mu$							$\lambda$	
⋮											

## Diagonale von Q

$$\begin{pmatrix}
 & \dots & (3,0) & (3,1) & (3,2) & (4,0) & (4,1) & (4,2) & (5,0) & (5,1) & (5,2) & \dots \\
 \vdots & & & & & & & & & & & \\
 (4,0) & & & & & -v & & v & & & & \\
 (4,1) & & \mu & & & & -(\mu+\lambda) & & & \lambda & & \\
 (4,2) & & & \mu & & & & -(\mu+\lambda) & & & \lambda & \\
 \vdots & & & & & & & & & & & 
 \end{pmatrix}$$

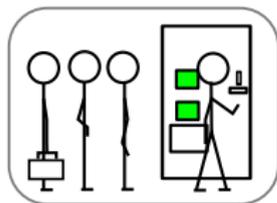
## Q-Struktur

Struktur von  $Q$  Matrizen für  $M/M/1/\infty$ -Warteschlangen und Umweltzustände  $K$ .

$$Q = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & & & & & \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & & & & \\ & A_{-1} & A_0 & A_1 & & & \\ & & A_{-1} & A_0 & A_1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$B_i, A_i \in \mathbb{R}^{K \times K}$$

## Lösung



$\lambda$ -Ankunftsrate  
 $\mu$ -Bedienrate  
 $\nu$ -Auffüllungsrate

Abbildung:  $(n, k) = (4, 2)$

Für Grenzverteilung  $\pi(n, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} P(X(t), Y(t))$  gilt

Produktform!

$$\pi(n, k) = \xi(n)\theta(k)$$

$$\text{mit } \xi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ und } \theta(k) = \begin{cases} \frac{1}{2 + \frac{\lambda}{\nu}} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right) & , \quad k = 0 \\ \frac{1}{2 + \frac{\lambda}{\nu}} & , \quad k \in \{1, 2\} \end{cases}$$

# Lösungseigenschaften

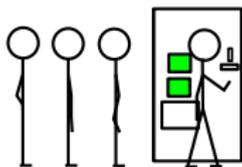


Abbildung:  $(n, k) = (4, 2)$

Für Grenzverteilung  $\pi(n, k) := \lim_{n \rightarrow \infty} P(X(t), Y(t))$  gilt

## Hübsche Eigenschaften von $\pi$

- Produktform  $\pi(n, k) = \xi(n)\theta(k)$
- $\xi(n) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$  Warteschlangenlänge ist stochastisch unabhängig von der Umwelt und den Umweltparametern.
- $\theta(k)$  Umwelt ist stochastisch unabhängig von der Bedienrate  $\mu$ .

## Verallgemeinerung

	Getränkeautomat	$M/M/1/\infty$ - Verlustsystem
Ankünfte	Poisson( $\lambda$ )	Poisson( $\lambda$ )
Bedienung, FCFS	$Exp(\mu)$	$Exp(\mu(n)), X(t) = n$
Umweltzustände	$K = \{0, 1, 2\}$	$K$ -abzählbar
Umweltzustände ohne Bedienung	$\{0\}$ (leerer Automat)	$K_B \subset K$
Umweltänderung nach einer Bedienung $n > 1$	$(n, k) \rightarrow (n-1, k-1) = \mu, k \neq 0$	$(n, k) \rightarrow (n-1, m) = R_{km}\mu$ , beliebige stochastische Matrix $R$
Warteschlange unabhängige Umweltänderungen	$(n, 0) \rightarrow (n, 2) = \nu$ (Auffüllen)	$(n, k) \rightarrow (n, m) = V_{km}$ , beliebige Generatormatrix $V$

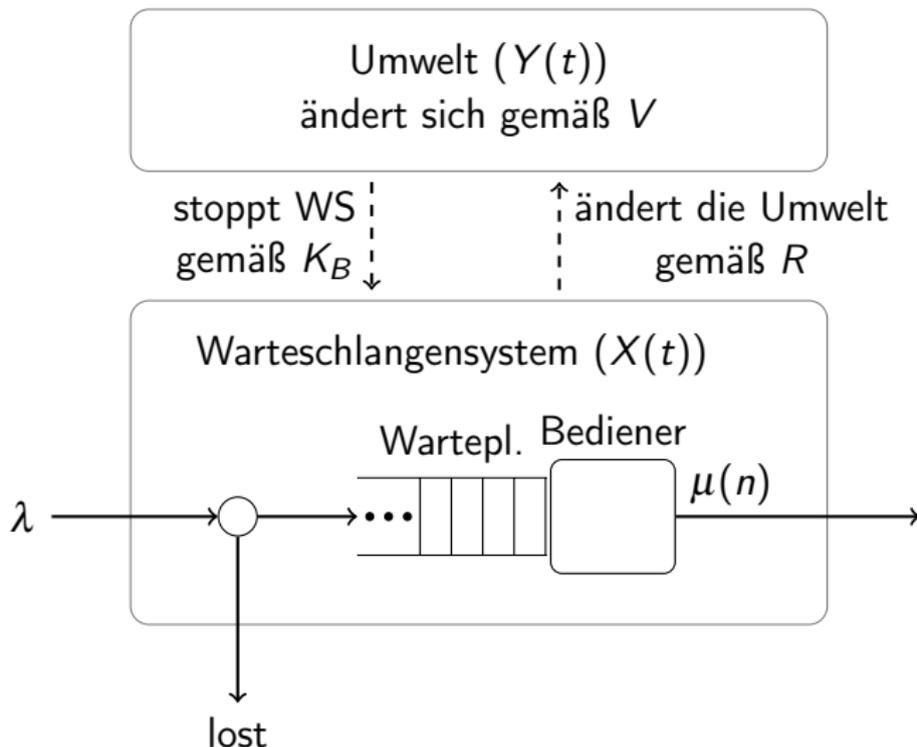
$M/M/1/\infty$ -Verlustsystem

Figure: Verlustssystem mit Parametern  $\lambda$ ,  $\mu(n)$ ,  $K_B$ ,  $R$ ,  $V$

# $M/M/1/\infty$ -Verlustsystem

$M/M/1/\infty$ -Verlustsystem.

- *Markov*-Ankünfte, d.h. Poisson verteilte Ankünfte.
- *Markov*-Bedienung, d.h. exponentielle Bedienzeit.
- *Eine* Bedieneinheit.
- *Unendlich* viele Warteplätze.
- Bei blockierenden Umweltzuständen (aus  $K_B$ ) gehen Kunden *verloren*.

# $M/M/1/\infty$ -Verlustsystem: Beschreibung

Ein  $M/M/1/\infty$ -Verlustsystem mit Umweltzuständen  $K$  ist ein zweidimensionaler Prozess  $(X(t), Y(t))$ .

- $X(t) \in \mathbb{N}_0$  beschreibt die Warteschlangenlänge (Anzahl der Kunden) zum Zeitpunkt  $t$ .
- $Y(t) \in K$  beschreibt den Umweltzustand zum Zeitpunkt  $t$ .

Das System wird über  $\lambda$ ,  $\mu(n)$ ,  $K_B$  (bzw.  $I_W$ ),  $R$ ,  $V$  Parameter vollständig definiert.

Gesucht: Grenzverteilung

$$\pi(n, k) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = n, Y(t) = k)$$

Zusammenhang zwischen  $I_W$  und  $K_B$ 

Die Matrix  $I_W \in \{0,1\}^{K \times K}$  ist eine spezielle Möglichkeit blockierende Zustände  $K_B$  zu beschreiben.

$$(I_W)_{km} := \delta_{km} \mathbf{1}_{[k \notin K_B]}$$

Beispiel  $K = \{0,1,2\}$ ,  $K_B = \{0\}$

$$I_W = \left( \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$M/M/1/\infty$ -Verlustsystem: Lösung

Sei  $(X(t), Y(t))$  ein ergodisches  $M/M/1/\infty$ -Verlustsystem mit Umweltzuständen  $K$  und Systemparametern:

$\lambda$ ,  $\mu(n)$ ,  $K_B$  (bzw.  $I_W$ ),  $R$ ,  $V$ .

Dann gilt für die Grenzverteilung

$$\pi(n, k) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = n, Y(t) = k)$$

$$\pi(n, k) = \xi(n)\theta(k)$$

mit

$$\xi(n) = C^{-1} \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{\mu(i)} \right), \quad C := \sum_{n=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n \left( \frac{\lambda}{\mu(i)} \right) \right)$$

und  $\theta$  als stochastische Lösung von

$$\theta \lambda (I_W (R - I) + V) = 0 \quad (\text{einfacher zu Lösen als } \pi Q = 0)$$

# Aktuelle Forschung

- Andere Lösungsmethoden für Verlustsysteme
- Warteschlangen in einer zufälligen Umwelt, aber ohne Kundenverlust
- Warteschlangennetze in einer Umwelt
- Modellierung mit Hilfe von Warteschlangensystemen

# Ende



Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

# Nicht-Exponentiell?

Was tun, wenn die Verweilzeit nicht exponentiell ist?

Approximation mit »Phasen«.

# Phasenverteilung

Aufgabe: Eine spezielle Verteilung näherungsweise konstruieren.

Lösung: Füge  $L$  zusätzliche »Zwischenzustände« - die Phasen - ein.

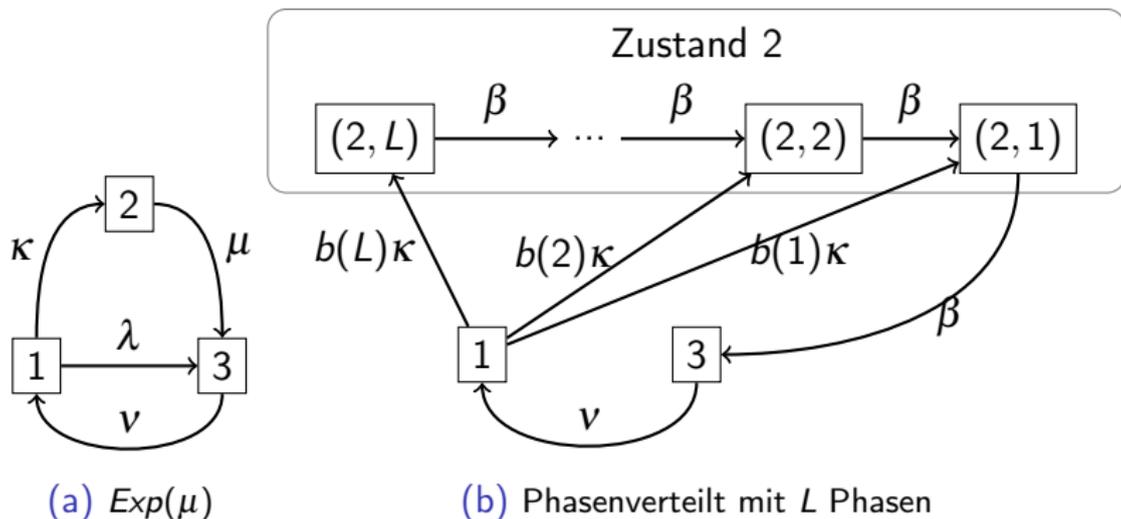
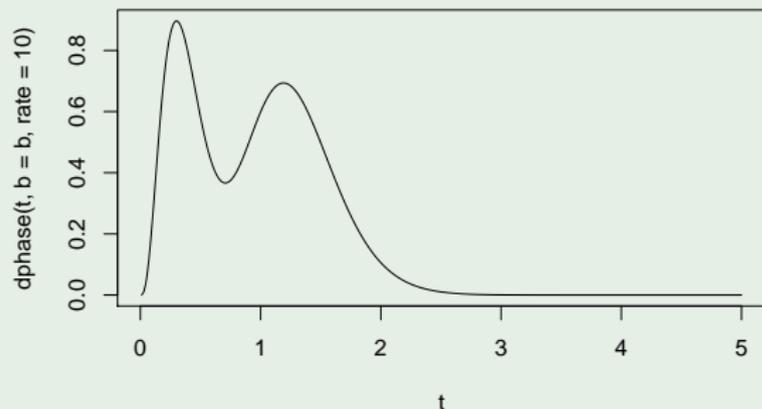


Abbildung: Verweilzeit im Zustand 2, Phasenapproximation

# Phasendichte, Beispiel

## Beispiel: Dichte einer Phasenverteilung

mit Parametern  $L = 13$ ,  $\beta = 10$ ,  $b(4) = \frac{2}{5}$ ,  $b(13) = \frac{3}{5}$



# Phaseverteilung Formal

## Definition

Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\beta > 0$  sei

$$\Gamma_{\beta,k}(s) = 1 - e^{-\beta s} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\beta s)^i}{i!}, \quad s \geq 0,$$

Für  $\beta \in (0, \infty)$ ,  $L \in \mathbb{N}$ , und Wahrscheinlichkeiten  $b(1), \dots, b(L)$  mit  $b(L) > 0$  so bezeichne die Verteilungsfunktion

$$B(s) = \sum_{\ell=1}^L b(\ell) \Gamma_{\beta,\ell}(s), \quad s \geq 0, \quad (1)$$

eine Phasenverteilung.

Durch Änderung von  $\beta$ ,  $L$ , und  $b$  können wir eine beliebige Verteilung auf  $(\mathbb{R}_+, \mathbb{B}_+)$  approximieren.

Getränkeautomat:  $\theta$ -Lösung

$$\lambda, \mu, I_W = \left( \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), R = \left( \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), V = \left( \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -v & 0 & v \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \theta(\lambda I_W(R - I) + V) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\theta(0), \theta(1), \theta(2)) \left( \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -v & 0 & v \\ 1 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -\lambda \end{array} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta(0)v = \theta(1)\lambda \Rightarrow \theta(0) = \frac{\lambda}{v}\theta(1)$$

$$\Rightarrow \theta(1)\lambda = \theta(2)\lambda \Rightarrow \theta(1) = \theta(2)$$

Normierungsbedingung:

$$1 = \sum_{k=0}^2 \theta(k) = \left( \frac{\lambda}{v} + 2 \right) \theta(1) \Rightarrow \theta(1) = \frac{1}{\frac{\lambda}{v} + 2}$$

# Eingebettete Markov Ketten.

Verlustsysteme nur zu Zeitpunkten betrachten, wenn ein Kunde das System verlässt. Anstatt eines Prozesses  $(X(t), Y(t) : t \in [0, \infty])$  betrachtet man eine Markov-Kette  $(\hat{X}(i), \hat{Y}(i) : i \in \mathbb{N}_0)$

Es ist bekannt, dass für die Grenzverteilungen

$$\xi(n) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = n), \quad \hat{\xi}(n) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\hat{X}(i) = n)$$

eines  $M/M/1/\infty$ -Systems (ohne Umwelt) gilt

$$\xi = \hat{\xi}$$

Wir konnten aber zeigen, dass für Verlustsysteme Fälle auftreten können mit

$$\pi(n, k) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = n, Y(t) = k), \quad \hat{\pi}(n, k) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\hat{X}(i) = n, \hat{Y}(i) = k)$$

$$\pi \neq \hat{\pi}$$



M.F. Neuts.

*Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models - An Algorithmic Approach.*

John Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981.



L. Kleinrock.

*Queueing Theory, volume I.*

John Wiley and Sons, New York, 1975.

# Preprints



Ruslan Krenzler und Hans Daduna.

*Loss systems in a random environment - steady state analysis.*

November 2012.

<http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/prst/prst2012-04.pdf>



Ruslan Krenzler und Hans Daduna.

*Ruslan Krenzler and Hans Daduna. Loss systems in a random environment - embedded markov chains analysis.*

May 2013.

<http://preprint.math.uni-hamburg.de/public/papers/prst/prst2013-02.pdf>