# Mathematik für Studierende der Lehrämter Primarstufe und Sekundarstufe I sowie Sonderschulen

# Grundbildung Analysis

# WiS 21/22

Hubert Kiechle

hubert.kiechle[at]uni-hamburg.de

## Danksagung

Dieser Text basiert teilweise auf einem Skript von Herrn Prof. Dr. Hans-Joachim Samaga, der mir sogar seine LaTeX-Quellen zur Verfügung gestellt hat. Ich habe seine Ausarbeitung in einigen Teilen nur umgearbeitet und ergänzt.

Vielen herzliche Dank, lieber Hans-Joachim, für deine stets großzügige Unterstützung.

Teile das Skripts basieren auf Ausarbeitungen von Frau PD Dr. Susanne Koch, der ich ebenfalls herzlich danken möchte.

# Inhaltsverzeichnis

# 16 Konvergenz von Folgen

Konvergenz ist der zentrale Begriff der Analysis. Wir werden zunächst Konvergenz von Folgen behandeln. Das ist zum einen anschaulicher, zum anderen hat es wichtige Anwendungen.

## Ein einführendes Beispiel

Wir stellen uns einen Autovermieter mit zwei Standorten Hamburg und München vor, der insgesamt $G = 300$ Fahrzeuge zu vermieten hat. Die Firma lässt es zu, dass Fahrzeuge, die an einem Standort abgeholt werden — ohne Aufpreis — am anderen zurückgegeben werden. Durch Beobachtung ergibt sich, dass ca. 20% der in Hamburg abgeholten Fahrzeuge in München zurückgegeben werden, während ca. 10% den umgekehrten Weg gehen. Es soll die langfristige Entwicklung untersucht werden. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich $h_0 = 150$ Fahrzeuge in Hamburg.

Wir gehen schrittweise vor:

1) In den ersten Wochen entwickelt sich die Anzahl der Fahrzeuge in Hamburg so:

$$150,\ 135,\ 124.5,\ 117.15,\ 112.005,\ 108.4\ \ldots$$

Es entsteht eine Folge, die wir besser anders beschreiben.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_n$ | 150 | 135 | 124.5 | 117.15 | 112.005 | ... | ... |

2) Sei $h_n$ die Anzahl der Autos in Hamburg nach $n$ Wochen. Der Startwert beträgt $h_0 = 150$. Es gilt

$$h_{n+1} = 0.8 \cdot h_n + 0.1 \cdot (300 - h_n) = 30 + 0.7 \cdot h_n$$

Das ist eine rekursiv definierte Folge.

3) Wir bestimmen eine explizite Darstellung für $h_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= 30 + 0.7 \cdot (30 + 0.7 \cdot h_{n-1}) \ = \ 30 \cdot (1 + 0.7) + 0.7^2 \cdot h_{n-1} \\ &= 30 \cdot (1 + 0.7 + 0.7^2 + \ldots + 0.7^n) + 0.7^{n+1} \cdot h_0 \\ &= 30 \cdot \sum_{k=0}^{n} 0.7^k + 0.7^{n+1} \cdot h_0 \ = \ 30 \cdot \frac{1 - 0.7^{n+1}}{1 - 0.7} + 0.7^{n+1} \cdot h_0 \quad (*) \\ &= 100 + 0.7^{n+1} \cdot (h_0 - 100) \ = \ 100 + 0.7^{n+1} \cdot 50 \end{aligned}$$

In $(*)$ wurde die geometrische Summenformel ausgenutzt. Es gilt also

$$h_n = 100 + 0.7^n \cdot 50\,.$$

Streng genommen müssten wir diese *Vermutung* mit vollständiger Induktion beweisen!

**Beobachtungen.** 1.) $h_n > 100$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.) Die Anzahl der Autos in Hamburg nimmt jede Woche ab:

$$h_{n+1} - h_n = (100 + 0.7^{n+1} \cdot 50) - (100 + 0.7^n \cdot 50) = 0.7^n \cdot (-0.3) \cdot 50 < 0\,.$$

Dies legt nahe, dass sich die Anzahl der Fahrzeuge $h_n$ für große $n$ einem „Grenzwert" $g$ annähert.

**Heuristik.** 1.) Nach 3) gilt $h_n = 100 + 0.7^n \cdot 50$. Nun wird $0.7^n$ für große $n$ immer kleiner. Der Wert kommt der Null immer näher. Daher darf man annehmen, dass $g = 100$ ist.

2.) Für große $n$ ist näherungsweise $h_{n+1} \approx h_n \approx g$ zu erwarten. Damit folgt aus 2)

$$g = 30 + 0.7 \cdot g \implies g = 100.$$

Beide Überlegungen liefern dasselbe Ergebnis.

## Grenzwerte

Bereits im ersten Semester haben Sie Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ in eine beliebige Menge $M$ kennengelernt. In diesem Sinn handelt es sich bei den Anzahlen von Autos $h_0, h_1, \ldots$ um eine Folge $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. In diesem Kapitel werden wir uns mit Eigenschaften reeller Folgen beschäftigen.

Zur Wiederholung sind in der nebenstehenden Tabelle die unterschiedlichen Sprechweisen gegenübergestellt:

| Funktionen-Sprache | Folgen-Sprache |
|---|---|
| $a : \mathbb{N} \to M$<br>$a : \mathbb{N}_0 \to M$ | $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$<br>$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ |
| $a(n)$ Funktionswert | $a_n$ $n$-tes Folgenglied |
| $n$ in $a(n)$ **Argument** | $n$ in $a_n$ **Index** |

Wir formulieren die wichtigsten Begriffe der Analysis.

**Definition.** Eine reelle (oder auch komplexe) Folge $(a_n)$ **konvergiert** gegen einen **Grenzwert** $a$, geschrieben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

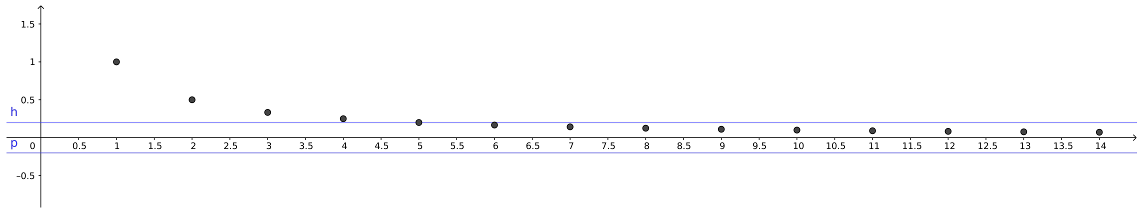
Eine Folge, die konvergiert, heißt auch **konvergent**. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, so nennt man sie **divergent**. Man spricht dann auch von **Divergenz**.

**(16.1) Beispiel.** Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ vermuten wir den Grenzwert 0. Es ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$. Zum Beweis müssen wir also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Wir wissen aus (2.15.2) (erstes Semester), dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dieses $n_0$ benutzen wir für den Konvergenznachweis. Für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

In diesem Beispiel sieht man deutlich die Abhängigkeit zwischen $\varepsilon$ und $n_0$. Je kleiner $\varepsilon$, desto größer muss $n_0$ gewählt werden. Die folgende Skizze soll das illustrieren.




Statt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ schreiben wir manchmal kürzer $\lim a_n = a$, andere Schreibweisen für diesen Sachverhalt sind $(a_n) \to a$ oder $a_n \to a$.

**(16.2) Bemerkung.** 1.) Die natürliche Zahl $n_0$ aus der Definition ist nicht eindeutig bestimmt. Man kann sie stets durch eine größere Zahl ersetzen.

2.) Andererseits wird eine gültige Wahl für $n_0$ in der Regel von dem vorgegebenen $\varepsilon$ abhängen: Je kleiner $\varepsilon$, um so größer der Index $n_0$.

3.) Wegen dieser Abhängigkeit findet man in Definitionen an Stelle von $n_0$ oft auch die Bezeichnung $n_0(\varepsilon)$.

4.) Man kann sich eine konvergente Folge als eine Möglichkeit vorstellen, den Grenzwert durch einen Näherungswert zu beschreiben. Dann ist $\varepsilon$ eine Fehlerschranke, und $n_0$ gibt an wie weit man gehen muss um sicher unterhalb der Fehlerschranke zu sein ($\varepsilon =$ „error“). In diesem Zusammenhang ist es auch sinnvoll ein möglichst kleines $n_0$ zu suchen!

5.) Die Definition gilt auch für komplexe Zahlen! Wir werden diese Tatsache gelegentlich nutzen.

6.) Man kann die Definition des Grenzwerts auch so ausdrücken:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist der Abstand *fast aller* Folgenglieder zu $a$ kleiner als $\varepsilon$.

**Fast alle** bedeutet hierbei *alle bis auf endlich viele Ausnahmen.* Dies ist etwas anderes als unendlich viele!

**(16.3) Beispiele.** 1.) Jede konstante Folge $a_n := a$ hat $a$ als Grenzwert, denn für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede natürliche Zahl $n$ gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$. In diesem Fall liegen sogar alle Glieder der Folge in jeder $\varepsilon$–Umgebung von $a$.

2.) Die Folge $a_n := (-1)^n$ ist nicht konvergent. Hätte die Folge einen Grenzwert $a$, so müsste es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir führen dies für $\varepsilon = 1$ zu einem Widerspruch:

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) - (a_n - a)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2$$

(wo steckt der Widerspruch?)

3.) $a_n := \frac{3n+4}{2n+2}$ hat den Grenzwert $\frac{3}{2}$. Um dies zu beweisen, müssen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0$ mit der verlangten Eigenschaft finden. Wir formen um:

$$|a_n - a| = \left|\frac{3n+4}{2n+2} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 =: s$$

Jedes $n_0$ mit $n_0 > s$ erfüllt unsere Bedingung.

*Frage*: Welches $n_0$ kann für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ gewählt werden?

**Definition.** Jede Folge, die den Grenzwert 0 besitzt, heißt **Nullfolge**.

Folgen können keinen oder einen Grenzwert haben, aber nie mehrere.

**(16.4)** *Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis.* Angenommen, die Folge $(a_n)$ hat zwei verschiedene Grenzwerte $a$ und $b$. Wähle $\varepsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$ (das ist der halbe Abstand zwischen $a$ und $b$). Nun gilt für fast alle Folgenglieder $a_n$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

und es folgt

$$2\varepsilon = |b - a| = \big|b - a_n - (a - a_n)\big| \leq |b - a_n| + \big|-(a - a_n)\big| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon;$$

ein Widerspruch. ■

**Bemerkung.** 1.) In einer Skizze wird der Widerspruch deutlicher, wenn man $\varepsilon := \frac{|b-a|}{4}$ wählt.

2.) Im vorherigen Beispiel (16.3.2) gibt es unendlich viele Folgenglieder, die in jeder Umgebung von 1 liegen, trotzdem ist 1 kein Grenzwert dieser Folge. Warum?

3.) Was ergibt sich bei der komplexen Folge $a_n = i^n$?

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ **divergiert** gegen $\infty$, falls es zu jeder reellen Zahl $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Analog sagt man: $(a_n)$ **divergiert** gegen $-\infty$, falls es zu jeder reellen Zahl $r < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n < r$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Wir notieren diesen Sachverhalt mit $(a_n) \to \infty$ bzw. $(a_n) \to -\infty$ analog zu richtigen Grenzwerten.

Man nennt $\infty$ bzw. $-\infty$ auch einen **uneigentlichen Grenzwert**.

Wichtig ist, dass diese Folgen divergieren. Konvergenz bedeutet immer die Existenz einer reellen Zahl als Grenzwert, und $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen.

**Bemerkung.** Manchmal findet man in der Literatur den Begriff der „uneigentlichen Konvergenz“.

**(16.5) Beispiele.** 1.) Für die Folge $(a_n)$ mit $a_n = \sqrt{n}$ gilt $(a_n) \to \infty$. Denn: Es sei $r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $\sqrt{n} > r$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir wählen irgendeine natürliche Zahl $n_0 > r^2$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > r^2$, woraus $a_n = \sqrt{n} > r$ folgt.

2.) Die Folge $1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, \ldots$ besitzt weder einen eigentlichen, noch einen uneigentlichen Grenzwert.

3.) Es sei $q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty & \text{falls} & q > 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1 & \text{falls} & q = 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 & \text{falls} & |q| < 1 \\ (q^n) \ \text{divergiert} & \text{falls} & q \leq -1 \end{array}$$

*Beweis.* $q > 1$: Sei $r \in \mathbb{R}^{>0}$ gegeben. Wir können $q = 1 + h$ mit $h > 0$ schreiben. Mit der Bernoullischen Ungleichung erhält man

$$q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh. \quad \text{Ist also} \quad n_0 > \frac{r-1}{h}$$

so folgt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $q^n > r$. Daher divergiert $(q^n)$ gegen $\infty$.

Der Fall $q = 1$ ist trivial.

$|q| < 1$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gilt

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon \iff \frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Die Überlegungen unter Fall $q > 1$ zeigen die Existenz eines geeigneten $n_0$.

$q \leq -1$: Ist anschaulich klar und soll hier nicht formal begründet werden. ∎

## Rechenregeln für Grenzwerte

Wir wollen einige Methoden und Hilfsmittel kennenlernen, um Folgen auf Konvergenz untersuchen zu können. Dabei spielen immer wieder Nullfolgen ein Rolle. Wir haben sie bereits im vorigen Abschnitt kennengelernt.

**(16.6)** *Sei $(a_n)$ eine beliebige Folge, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

**(1)** $\lim a_n = a \iff \lim(a_n - a) = 0$;

**(2)** $\lim a_n = a \implies \lim |a_n| = |a|$.

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Definition der Konvergenz.

(2) folgt direkt aus der Konvergenz und aus $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$ (siehe die Dreiecksungleichung). ■

*Frage*: Was ist mit „$\Longleftarrow$" in (16.6.2) ?

**Definition.** Eine Folge $(a_n)$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge aller Folgenglieder $\{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. Es gibt dann ein $s \in \mathbb{R}^{>0}$ mit $|a_n| < s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**(16.7) Beispiele.** 1.) $(\frac{1}{n})$ ist beschränkt, denn für alle Folgenglieder gilt $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

2.) Für die Folge der natürlichen Zahlen gilt zwar ebenfalls $0 \leq n$, trotzdem ist diese Folge nicht beschränkt, weil eine obere Schranke fehlt.

3.) $a_n = \frac{3n+4}{2n+2}$ ist beschränkt: 0 oder jede negative Zahl ist eine untere Schranke, wegen $\frac{3n+4}{2n+2} \leq \frac{4n+4}{2n+2} = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beispielsweise 2 eine obere Schranke.

Weitere wichtige Beispiele gibt der folgende

**(16.8) Satz.** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

*Beweis.* Sei $(a_n) \to a$. Wegen der Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in \,]a-1, a+1[$ für alle $n \geq n_0$. Für

$$t := \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\} \quad \text{und} \quad s := \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$$

gilt dann $t \leq a_n \leq s$ für alle Folgenglieder, $(a_n)$ ist somit beschränkt. ■

**Bemerkung.** Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch. Kennen Sie ein (Gegen-)Beispiel?

**(16.9) Satz.** *Sei $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ eine beschränkte Folge. Dann ist auch $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.*

*Beweis.* Sei $k > 0$ eine Schranke von $(b_n)$, also $-k \leq b_n \leq k$ für alle Folgenglieder. Zu $\varepsilon > 0$, beliebig, gibt es wegen der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ für alle $n \geq n_0$. Für diese $n$ folgt

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon.$$ ■

**(16.10) Beispiele.** 1.) Sei $d_n := \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$. Wegen $|\sin(x)| \leq 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $\sin(n)$ beschränkt, während $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

2.) Die Folge $(c_n)$ mit $c_n := \frac{n!}{n^n}$ ist eine Nullfolge: Wir zerlegen $c_n$ in ein Produkt zweier Folgen $c_n = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n}{n}\right) = a_n \cdot b_n$ (es sei $b_1 = 1$). Hierbei ist $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge und $b_n$ wegen $|b_n| = |\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}| \leq 1$ beschränkt.

3.) Es gilt $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\dfrac{1}{n}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \dfrac{1}{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \to 0$, denn $0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$ ist beschränkt.

Wenn sich Folgen durch Addition oder Multiplikation aus einfacheren Folgen zusammensetzen, kann man häufig Aussagen über Konvergenz machen. Und man kann gegebenenfalls sogar den Grenzwert berechnen.

**(16.11) Satz.** *Gegeben seien konvergente Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$. Dann gilt*

**(1)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**(2)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**(3)** *falls $\forall n : b_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$, dann ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

*Beweis.* Es sei $a := \lim a_n$ und $b := \lim b_n$.

(1) Übung!

(2) $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ sind nach (16.6.1) Nullfolgen, $(b_n)$ ist nach (16.8) beschränkt. Damit sind nach (16.9) auch $((a_n - a)b_n)$ und $((b_n - b)a)$ Nullfolgen. Nach (1) ist dann $a_nb_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a$ ebenfalls eine Nullfolge und die Behauptung $a_nb_n \to ab$ folgt erneut aus (16.6).

(3) Die Dreiecksungleichung zeigt $|b| \leq |b_n| + |b - b_n|$. Zu $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ existiert $n_0$ mit

$$\forall n \geq n_0 : |b - b_n| < \varepsilon \quad \text{also} \quad |b| \leq |b_n| + |b - b_n| < |b_n| + \varepsilon.$$

Weiter folgt

$$\forall n \geq n_0 : |b_n| > |b| - \varepsilon = |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \iff \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$$

und die Folge $\frac{1}{|b_n|}$ ist beschränkt.

Wir untersuchen die Folge $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$. Es ist

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|} \cdot |b - b_n|$$

eine Nullfolge nach (16.9). Die Folge $\left(\dfrac{1}{b_n}\right)$ konvergiert also gegen $\frac{1}{b}$. Die Behauptung erhalten wir aus (2):

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b}.$$

■

**(16.12) Beispiele.** 1) Gesucht ist $\lim \frac{2n-1}{3n^2+n-2}$. Anwendung von Regel (3) hilft zunächst nicht weiter, da Zähler und Nenner gegen $\infty$ streben. Daher formen wir den Ausdruck so um, dass der Grenzwert des Nenners existiert und nicht gleich $0$ ist.

Klammert man in Zähler und Nenner $n^2$ aus (höchste im Nenner auftretende Potenz von $n$), so erhält man

$$\frac{2n-1}{3n^2+n-2} = \frac{n^2(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2})} = \frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\,.$$

Regeln (1) und (2) zeigen, dass der Nenner den Grenzwert $3$, der Zähler den Grenzwert $0$ besitzt. Nun liefert (3) insgesamt den Grenzwert $0$.

2) $\lim \left(\frac{2n^3+n-4}{3n^3-5}\right) = \lim \frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{3-\frac{5}{n^3}} = \frac{2}{3}\,.$

3) Das funktioniert auch bei uneigentlichen Grenzwerten. Wir verzichten auf eine formale Begründung.

$$\lim \left(\frac{2n^3+n-4}{-3n^2+1}\right) = \lim \left(\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2n+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}}\right) = -\infty.$$

4) Wir betrachten die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ mit $|q| < 1$. Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad\to\quad \frac{1}{1-q} \qquad \text{denn} \quad q^{n+1} \;\to\; 0 \quad \text{wegen (16.5.3).}$$

Dabei wurde von (16.11) Gebrauch gemacht.

5) Auch für das einführende Beispiel kann jetzt der vermutete Grenzwert leicht verifiziert werden. Dabei findet auch (16.5.3) Verwendung.

Zum Abschluss der nützliche

**(16.13) Einschließungssatz.** *Es seien drei Folgen* $(a_n)$, $(b_n)$ *und* $(c_n)$ *gegeben. Es gelte* $\lim a_n = \lim b_n = a$ *und* $b_n \leq c_n \leq a_n$ *für fast alle* $n$. *Dann ist* $(c_n)$ *konvergent und* $\lim c_n = a$.

*Beweis.* Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0$ so groß, dass für alle $n \geq n_0$ gilt $b_n \leq c_n \leq a_n$, $|a_n - a| < \varepsilon$, und $|b_n - a| < \varepsilon$. Dann folgt für alle $n \geq n_0$:

$$a_n, b_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, \quad \text{also auch} \quad c_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[. \qquad \blacksquare$$

## Weitere Beispiele und Anwendungen

### I. Heron-Verfahren oder Babylonisches Wurzelziehen

Wir untersuchen eine rekursiv definierte Folge.

$$a_1 := 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right).$$

1. Durch Induktion ist klar, dass $a_n > 0$ für alle Folgenglieder gilt.
2. Wir berechnen

$$a_{n+1}^2 - 5 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{25}{a_n^2} + 10\right) - 5 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{25}{a_n^2} - 10\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{5}{a_n}\right)^2 \geq 0.$$

Da auch $a_1^2 = 9 \geq 5$ folgt daraus $\forall n \in \mathbb{N} : a_n^2 \geq 5$. Wir zeigen weiter $a_{n+1} \leq a_n$, dann ist die Folge monoton fallend und beschränkt. In der Tat

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - 5\right) \geq 0.$$

3. Daher existiert das Infimum $a$ der Menge $A := \{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ aller Folgenglieder. Wir zeigen, dass $a$ Grenzwert ist: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Eine Überlegung wie in Aufgabe 7 zeigt, dass ein Folgenglied $a_{n_0}$ existiert mit $a_{n_0} < a + \varepsilon$ (sonst wäre $a$ nicht Infimum). Da $(a_n)$ monoton fällt gilt dann $a_n \leq a_{n_0} < a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Somit erhält man

$$\forall n \geq n_0 : |a_n - a| \overset{!}{=} a_n - a < \varepsilon.$$

Das zeigt $\lim a_n = a = \inf A$.

4. Mit Hilfe der Grenzwertsätze können wir den Grenzwert $a$ ausrechnen. Die Folgen $(a_{n+1})$ und $(a_n)$ haben natürlich den gleichen Grenzwert, daher gilt

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \implies a = \sqrt{5}.$$

Allgemeiner gilt

**(16.14)** *Sei $x \geq 0$ gegeben. Die rekursiv definierte Folge $(a_n)$ mit*

$$a_1 > 0 \quad \textit{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

*konvergiert gegen $\sqrt{x}$.*

Der Beweis geht genau wie für $x = 5$ und wird hier nicht ausgeführt.

**(16.15) Bemerkung.** 1.) Wählt man den Startwert $a_1$ in der „Nähe" der gesuchten Wurzel, so liefert diese Rekursion ein schnelles Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Quadratwurzeln. Es wird in manchen Taschenrechnern und Computersystemen tatsächlich benutzt.

2.) Wählt man den Startwert $a_1 < 0$, so konvergiert die Folge gegen $-\sqrt{x}$.

3.) Dieses Verfahren ist nach Heron von Alexandria[1] (zwischen 200 v. Chr. und 300 n. Chr.) benannt und wird auch babylonisches Wurzelziehen[2] genannt. Es wurde in ähnlicher Form schon im Altertum verwendet. Wie; das ist in Aufgabe 6 angedeutet.

4.) Das in 3. benutzte Argument gilt viel allgemeiner. Jede beschränkte, monotone Folge besitzt einen Grenzwert $a$. Wächst die Folge, so ist $a$ das Supremum der Menge aller Folgenglieder; fällt die Folge, so ist $a$ das Infimum (vgl. auch Aufgabe 7).

## II. Die Eulersche Zahl

Ähnlich wie im vorigen Beispiel weisen wir die Konvergenz der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach.

1. Wir zeigen, dass $(a_n)$ monoton wachsend ist. Dazu untersuchen wir für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&> \left(1 - n\frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt aus der Bernoullischen Ungleichung für $h = -\frac{1}{n^2}$. Daher gilt $a_n > a_{n-1}$, und die Folge wächst (sogar streng) monoton.

**Tipp.** Zum Beweis der Monotonie einer Folge $(a_n)$ untersuche man einen Ausdruck der Form

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \text{oder} \quad a_n - a_{n-1}\,.$$

2. $(a_n)$ ist beschränkt. Im einem ersten (aufwendigen) Schritt zeigen wir $a_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierzu berechnen wir $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \qquad (*)$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \\
&\leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.
\end{aligned}$$

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Heron_von_Alexandria

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Babylonisches_Wurzelziehen

Wenn wir dies in $(*)$ einsetzen und die geometrische Summenformel benutzten, erhalten wir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

Es gilt also $a_n < 3$ für alle $n$ wie behauptet. Da $a_1 = 2$ ist, folgt wegen der Monotonie $2 \leq a_n < 3$ für alle $n$.

3. $(a_n)$ ist monoton und beschränkt. Somit folgt die Konvergenz wie im vorigen Beispiel; vgl. auch (16.15.4) und die Übungen.

Der Grenzwert der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ ist die nach L. Euler (1707–1783) benannte **Eulersche Zahl** $e$. Im Jahr 1728 wurde $e$ von Euler zur Bezeichnung der Basis des natürlichen Logarithmus verwendet. Die ersten Stellen der Dezimalbruchdarstellung von $e$ lauten

$$e = 2.71828182845904\ldots$$

**(16.16) Bemerkung.** 1.) Es gelten die Beziehungen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Die erste Ungleichung erhalten wir aus der Abschätzung für $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ in 2.

Man zeigt dann weiter (ähnlich wie für $(a_n)$), dass die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ monoton fällt. Schließlich findet man mit (16.9) leicht, dass $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist. Insgesamt ergibt sich mit dem Einschließungssatz (16.13)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

2.) Mit etwas Aufwand kann man zeigen, dass $e$ keine rationale Zahl ist. Tatsächlich ist $e$ (genau wie $\pi$) eine transzendente Zahl, d. h. nicht Nullstelle irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten. Dieser Beweis ist deutlich schwieriger.

3.) Man kann auch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R} \text{ (ja sogar } x\in\mathbb{C}).$$

Die so definierte **Exponentialfunktion** werden wir noch ausführlich studieren.[3]

[3] Die Exponentialfunktion ist z.Z. in aller Munde!

## III. Zinseszins

Auch der Kontostand z.B. am Ende jeden Jahres (jeden Monats, usw.) liefert eine Folge. Wir untersuchen eine andere Folge, die im Zusammenhang mit der Zins(eszins)rechnung auftritt.

Wenn ein gewisses Kapital $K$ mit $p$ Prozent verzinst wird, erhält man bei jährlicher Verzinsung am Ende des ersten Jahres

$$Z_1 = \frac{K \cdot p}{100}$$

Zinsen. Mit $x := \frac{p}{100}$ besitzt man nach einem Jahr ein Kapital

$$K_1 = K + Z_1 = K(1 + x).$$

**Beispiel.** 1000 Euro ergeben bei 10 Prozent Zinsen nach einem Jahr $K_1 = 1000 \left(1 + \frac{1}{10}\right) = 1100$ Euro.

*Frage*: Wie groß ist $K_1$ bei halbjährlicher Verzinsung, wenn der Zinssatz pro Jahr $p$ Prozent beträgt?

*Antwort*: Nach einem halben Jahr erfolgt eine Zinszahlung von $Z_{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{x}{2}$, dieser Betrag wird am Ende des Jahres erneut verzinst:

$$K_1 = K + Z_{\frac{1}{2}} + Z_1 = K + K \cdot \frac{x}{2} + \left(K + K \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{x}{2} = \ \dots \ = K \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 .$$

**Beispiel.** Im Gegensatz zur jährlichen Verzinsung besitzen wir bei ansonsten gleichem Anfangskapital und Zinssatz wie im ersten Beispiel am Ende des ersten Jahres $K_1 = 1000 \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2 = 1102.50$ Euro.

Wir werden in der Vorlesung vierteljährliche, monatliche, tägliche und ständige Verzinsung behandeln.

*Frage*: Sprengt ständige Verzinsung die Bank?

# 17 Reihen

Dem Vorsokratiker Zenon von Elea[4] (∼490 – ∼430 v. Chr.) wird das folgende Paradoxon zugeschrieben. Seine Intention war es, zu zeigen, dass Bewegung eine Illusion sei.

> Der schnellste Läufer des alten Griechenland — Achilles — macht ein Wettrennen mit einer Schildkröte. Er gibt ihr 100 m Vorsprung, dann läuft er los. Wenn Achilles die 100 m überwunden hat, hat die Schildkröte erneut einen (kleinen) Vorsprung. Bis Achilles diesen eingeholt hat, hat sie wieder einen Vorsprung usw. Achilles kann die Schildkröte also niemals erreichen, geschweige denn überholen.

Stimmt das? Oder besser gefragt — Wo liegt der Fehler?

Wir werden das in der Vorlesung diskutieren. Dabei sei angenommen, dass Achilles mit der Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$ und die Schildkröte mit $1\,\frac{m}{s}$ läuft.

Bei dieser Untersuchung muss man scheinbar unendlich viele Zahlen aufaddieren. Das ist aber **nicht möglich**!

Man kann 10 000 Zahlen aufaddieren, man kann — zumindest theoretisch — $10^{10\,000}$ Zahlen aufaddieren, man kann aber nicht unendlich viele Zahlen aufaddieren. Aus dem Versuch diese Schwierigkeit in den Griff zu bekommen ist die Theorie der (unendlichen) Reihen hervorgegangen.

Schon im vorherigen Kapitel ist uns diese Situation begegnet; siehe etwa (16.12.4), (16.16.1), und einige Übungsaufgaben. Dort wurden Folgen einer spezieller Gestalt betrachtet, die jetzt genauer untersucht werden sollen.

## Definition

Aus jeder gegebenen Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ , die wir auch **Bausteinfolge** nennen werden, lässt sich eine neue Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bilden, indem man jeweils die ersten Glieder der Folge $(a_i)$ addiert:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \ldots$$

Statt die (nicht definierte!) Summe aller Glieder der Folge $(a_n)$ zu bilden, betrachten wir die neue Folge $(s_n)$ der sogenannten **Partialsummen** und untersuchen deren Konvergenzverhalten.

**Beispiel.** Zur Folge $(Z_i)$ der Zinsen im $i$–ten Zeitabschnitt gehört die Folge $(S_i)$ der gesamten Zinseinnahmen nach $i$ Zeiteinheiten, es ist $S_i = \sum\limits_{\ell=1}^{i} Z_\ell$.

Formal erhalten wir die

[4] `http://de.wikipedia.org/wiki/Zenon_von_Elea`

**Definition.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ (unendliche) **Reihe**. Die übliche Schreibweise für diese Folge ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Das $n$-te Folgenglied einer Reihe wird auch die $n$-te **Partialsumme** genannt.

**(17.1) Bemerkung.** 1.) Wichtig ist die Tatsache, dass das Symbol $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ **nicht** für eine Summe mit unendlich vielen Summanden steht, sondern für die Folge der Partialsummen! Es ist also bei gegebener Bausteinfolge $(a_n)$ eine wohldefinierte, neue Folge, unabhängig von Konvergenzfragen.

2.) Die Glieder einer Reihe können natürlich auch mit dem Index 0 oder einem anderen Index beginnen, ferner kann statt $i$ jeder andere Buchstabe — beispielsweise $k$ oder $n$ — gewählt werden.

3.) Viele für die Analysis besonders wichtige Folgen treten in der Gestalt von Reihen auf. Das ist der Grund, warum diese Folgen besondere Aufmerksamkeit genießen. Ein weiterer Grund dafür ist, dass man häufig durch Aussagen über die Bausteinfolge $(a_n)$ Aussagen über die daraus gebildete Reihe machen kann.

**(17.2) Beispiele.** 1.) Sei $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau die Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$.

2.) Sei $a_n := n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} i$ ist die Folge

$$1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ \ldots \quad \text{d. h., es gilt} \quad s_n := \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ heißt **harmonische Reihe**.

4.) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ mit $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) heißt **geometrische Reihe**. Ihre Folgenglieder haben im Fall $x \neq 1$ die Gestalt $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Begründen Sie das! Diese Reihe ist in der Analysis unentbehrlich.

Wie jede Folge kann eine Reihe konvergent oder divergent sein. Alle Begriffe, die in diesem Zusammenhang auftraten sind auch für Reihen sinnvoll. Um diesen Umstand deutlich zu machen, formulieren wir die

**Definition.** Eine Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt **konvergent**, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert, d. h., wenn $(s_n) \to s$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gilt. Hierfür schreibt man dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s.$$

Diesen Grenzwert nennt man auch den **Wert der Reihe**. Manche sprechen sogar von der **Summe der Reihe**.

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

**Bemerkung.** Bitte beachten Sie die zweideutige Schreibweise. Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet einerseits die Folge der Partialsummen, andererseits — im Fall der Konvergenz — für den Grenzwert dieser Folge. Die aktuelle Bedeutung ist nur aus dem Kontext zu erschließen!

**(17.3) Beispiele.** 1.) Die Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i$ (Beispiele 1.)und 2.) von oben) sind divergent (gegen $\infty$).

2.) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist nach (16.12.4) für alle $x \in\, ]-1,1[$ konvergent. Für diese $x$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Dadurch wird eine Funktion $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ definiert!

3.) Mit Zahlen: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i =$ ____________ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-\frac{1}{2})^i =$ ____________ $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^i$ ________.

**Bemerkung.** Wenn verschiedene Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ den gleichen Grenzwert besitzen, so schreibt man $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$. Das bedeutet *nicht*, dass die Reihen gleich sind, also in *allen* Gliedern übereinstimmen.

## Kriterien für Konvergenz

Wir behandeln einige Eigenschaften der Bausteinfolge $(a_n)$, die Konvergenz oder Divergenz nach sich ziehen. Das folgende Lemma wird meist in seiner Kontraposition angewendet.

**(17.4)** $\sum a_i$ *konvergent* $\Longrightarrow$ $(a_n)$ *ist eine Nullfolge.*

*Beweis.* Für jedes $n > 1$ gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$. Aus der vorausgesetzten Konvergenz der Folge der Partialsummen (d. h. $(s_n) \to s$) und (16.11) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Wegen ihrer Bedeutung für Anwendungen formulieren wir die Kontraposition (vgl. erstes Semester) der Aussage dieses Satzes:

*Wenn die Bausteinfolge* $(a_n)$ keine *Nullfolge ist, ist die zugehörige Reihe divergent.* ∎

**(17.5) Beispiele.** 1.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{7k+100}$ ist wegen $\frac{2k+3}{7k+100} \to \frac{2}{7} \neq 0$ garantiert divergent.

2.) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert für alle $x$ mit $|x| \geq 1$, denn die Folge $\left(x^n\right)$ ist nach (16.5.3) keine Nullfolge.

3.) Über die Konvergenz der harmonischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sagt (17.4) nichts aus.

Obwohl $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt

**(17.6)** *Die harmonische Reihe ist divergent. Genauer: Sie divergiert gegen* $\infty$.

*Beweis.* Wir fassen Glieder der Reihe $\sum \frac{1}{k}$ wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\\
&a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\\
&a_9 + \ldots + a_{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dabei stellen wir fest, dass sich die Glieder der harmonischen Reihe so bündeln lassen, dass jedes „Bündel“ aufaddiert mehr als $\frac{1}{2}$ ergibt.

Mit $a_k = \frac{1}{k}$ schreiben wir diese Erkenntnis mathematisch exakt auf:

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : \qquad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k > \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Für die $2^n$–te Partialsumme $s_{2^n}$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n})\\
&> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n\text{–mal}} = 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Aus $1 + \frac{n}{2} \to \infty$ folgt die Divergenz der Partialsummen, also ist die harmonische Reihe divergent.

Sie divergiert gegen $\infty$, weil sie streng monoton wachsend ist. — Warum? ∎

**(17.7) Bemerkung.** 1.) Die harmonische Reihe strebt sehr langsam gegen $\infty$. Es ist beispielsweise

$$\sum_{i=1}^{10\,000} \frac{1}{i} \approx 9.79 < 10.$$

Eine interessante Anwendung finden Sie bei Wikipedia.[5]

2.) Es gilt sogar, dass die Reihe $\sum \frac{1}{p}$ über alle Primzahlen $p$ divergent ist. Dieses Resultat von L. Euler, beweist erneut, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

3.) Die sogenannte **alternierende harmonische Reihe** $\sum (-1)^{j+1} \frac{1}{j}$ ist im Gegensatz zur harmonischen Reihe konvergent. Der Grenzwert ist nicht leicht zu bestimmen, er lautet $\ln 2 \approx 0.6931\ldots$ (das können Sie mt einer Tabellenkalkulation nachprüfen; konvergiert sehr langsam!).

4.) Man kann jeden beliebigen vorgegebenen Grenzwert heraus bekommen, wenn man die Glieder der alternierenden harmonischen Reihe in anderer Reihenfolge summiert. Wir demonstrieren das am Beispiel der $2$: Die Glieder für ungerades $j$ sind positiv und die daraus gebildete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ ist wie die harmonische Reihe divergent. Deshalb kann man soviele Summanden mit ungeradem Index addieren, bis man $> 2$ ist (im vorliegenden Fall $k = 8$). Dann subtrahiert man $\frac{1}{2}$ (den ersten negativen Summanden der alternierenden harmonischen Reihe). Das Ergebnis ist $< 2$. Anschließend summiert man die folgenden Summanden mit ungeradem Index, um 2 wieder zu überbieten und subtrahiert dann $\frac{1}{4}$; usw. Die so entstehende „Umordnung“ der alternierenden harmonischen Reihe hat den Grenzwert $2$.

**Definition.** Eine Reihe $\sum a_i$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum |a_i|$ konvergent ist.

**Beispiel.** Die geometrische Reihe ist für $|x| < 1$ absolut konvergent.

Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent, wie man am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe sehen kann. Die Umkehrung stimmt aber immer.

**(17.8)** $\sum a_i$ *absolut konvergent* $\Longrightarrow$ $\sum a_i$ *konvergent.*

Wir verzichten hier auf einen Beweis dieser zentralen Aussage aus der Theorie der Reihen. Sie finden ihn in fast jedem Analysis-Buch, z.B. [Beh09, Satz 2.4.5].

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass bei einer absolut konvergenten Reihe jede „Umordnung“ denselben Wert liefert. Dies ist ein Grund für die fundamentale Bedeutung dieses Begriffs.

Zum Abschluss der Theorie der Reihen geben wir exemplarisch ein leicht zu handhabendes **Konvergenzkriterium**. Es gibt eine Menge weiterer solcher Kriterien, die man in Lehrbüchern über Analysis nachlesen kann. Man erkennt, wie eine Eigenschaft der Bausteinfolge Aussagen über die Konvergenz der Reihe erlaubt.

[5] `http://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe`

**(17.9) Quotientenkriterium.** *Gegeben sei die Reihe* $\sum a_i$ *mit* $a_i \neq 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$.

**(1)** *Die Reihe konvergiert absolut, falls es ein* $i_0 \in \mathbb{N}$ *und ein* $q \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass gilt*

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q < 1 \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0.$$

**(2)** *Die Reihe divergiert, falls es ein* $i_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass gilt*

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \geq 1 \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0.$$

*Beweis.* (1) Wir setzen $M = |a_{i_0}|$. Aus $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q$ folgt

$$|a_{i_0+1}| \leq |a_{i_0}|\, q = Mq, \quad |a_{i_0+2}| \leq |a_{i_0+1}|\, q \leq Mq^2, \quad |a_{i_0+3}| \leq |a_{i_0+2}|\, q \leq Mq^3,$$

usw. Insgesamt gilt $|a_{i_0+j}| \leq Mq^j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ (Beweis mit Induktion!). Jetzt kommt die geometrische Reihe ins Spiel: Die Reihe $\sum Mq^j = M \sum q^j$ ist wegen $0 < q < 1$ konvergent. Weiter gilt

$$\sum_{i=i_0}^{n} |a_i| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{M}{1-q}\ .$$

Außerdem ist die Folge $(\sum_{i=1}^{n} |a_i|)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar monoton wachsend. Mit (16.15.4) folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=i_0}^{\infty} |a_i|$. Da sich diese Reihe von $\sum |a_i|$ nur um endlich viele Glieder unterscheidet, ist auch $\sum |a_i|$ konvergent.

(2) Aus $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \geq 1$ folgt $|a_{i+1}| \geq |a_i|$ (für alle $i \geq i_0$). Also gilt

$$0 < |a_{i_0}| \leq |a_{i_0+1}| \leq |a_{i_0+2}| \leq \cdots ,$$

d. h., die $a_i$ bilden keine Nullfolge. Damit ist $\sum a_i$ nach (17.4) nicht konvergent. ■

Häufig hilft die folgende Spezialisierung des Quotientenkriteriums.

**(17.10) Folgerung.** *Gegeben sei die Reihe* $\sum a_i$ *mit* $a_i \neq 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$.

**(1)** *Die Reihe konvergiert absolut, falls gilt* $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < 1.$

**(2)** *Die Reihe divergiert, falls* $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| > 1.$

*Beweis.* (1) Für $a := \lim \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right|$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-a) > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $i_0$ mit

$$\forall i \geq i_0 : \left|\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| - a\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < a + \varepsilon = 1 - \varepsilon \quad (= q).$$

Daher zeigt (17.9.1) die Behauptung.

(2) geht ähnlich mit (17.9.2). ■

**(17.11) Beispiele.** 1.) Die Reihe $\sum \frac{1}{k!}$ konvergiert, denn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{für alle } k \geq 1\,.$$

2.) Entsprechend stellt man die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ fest:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}\right| = 3 \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{3}{4} < 1 \quad \text{für alle } k \geq 3 =: k_0\,.$$

3.) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{2^k}$ ist konvergent. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)^5}{2^{k+1}}}{\frac{k^5}{2^k}}\right| = \left|\frac{(k+1)^5 \cdot 2^k}{2^{k+1} \cdot k^5}\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^5\right| \to \frac{1}{2}$$

mit (17.10.1) folgt daher die Behauptung.

4.) Obwohl für die harmonische Reihe alle Quotienten $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ sind, ist diese Reihe divergent. (Man beachte, dass es *kein* $q$ mit den verlangten Eigenschaften gibt).

5.) Man kann zeigen, dass die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergent ist; aber nicht mit dem Quotientenkriterium! — Warum?

6.) Für welche $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ konvergent?

$$\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{1}{k!} x^k}\right| = \frac{1}{k+1}\,|x| \to 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Reihe ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ (sogar für alle $x \in \mathbb{C}$) absolut konvergent.

7.) Entsprechend untersuchen wir die Reihe $\sum \frac{k^k}{k!} x^k$.

$$\left|\frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{k^k}{k!} x^k}\right| = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k (k+1)}\,|x| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k |x| \to e\,|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{e}\,.$$

Die Reihe konvergiert also absolut für alle $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. Für $|x| > \frac{1}{e}$ divergiert sie.

**(17.12) Bemerkung.** 1.) Ist der Grenzwert aus (17.10) gleich 1, so kann man keine Aussage machen.

2.) Reihen, wie sie in 6.) und 7.) vorkommen, heißen **Potenzreihen**. Ihre Partialsummen bestehen aus Polynomen in der benutzten Variablen. Auch die geometrische Reihe ist eine Potenzreihe.

3.) Potenzreihen haben ein typisches Konvergenzverhalten: Stets gibt es ein Intervall der Form $]-r, r[$, auf dem die Reihe (sogar absolut) konvergiert, und für alle $x$ mit $|x| > r$ divergiert sie. (Über die Punkte $-r$ und $r$ kann man keine generellen Aussagen machen.)

Im Fall der geometrischen Reihe ist $r = 1$, im Beispiel 7.) gilt $r = \frac{1}{e}$, im Beipiel 6.) setzt man $r = \infty$. Das Intervall ist dann ganz $\mathbb{R}$.

4.) Potenzreihen definieren Funktionen $]-r, r[ \to \mathbb{R}$ auf ihrem Konvergenzbereich. Viele wichtige, spezielle Funktionen kann man mit Hilfe von Potenzreihen definieren.

5.) Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt sind, kann man durch Polynome annähren. Solche Näherungen (für Funktionen, nicht für Zahlen) werden oft in der Physik benutzt.

Dieses Thema werden wir im nächsten Kapitel wieder aufgreifen. Jetzt werden wir ein Thema aus dem ersten Semester abrunden.

## Dezimalentwicklung reeller Zahlen

Im ersten Semester wurde die $g$-adische Darstellung ganzer Zahlen studiert. Das soll nun auf reelle Zahlen ausgedehnt werden. Für eine genaue Beschreibung ist der Konvergenzbegriff nötig. Dabei beschränken wir uns auf den Fall $g = 10$, obwohl die Darstellung für andere $g$ nicht wesentlich anders verläuft.

Wir betrachten zunächst einige

**(17.13) Beispiele.** Bestimme die Dezimalentwicklung von

1.) $\frac{1}{4} = 0.25 = \frac{25}{100} = 0 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$

2.) $\frac{1}{3} =$ __________

3.) $\frac{4}{15} =$ ____________

In der Vorlesung diskutieren wir was das bedeutet.

Grundlage der Theorie ist der

**(17.14) Satz.** *Für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ ist die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

*monoton wachsend und konvergent. Der Grenzwert liegt in $[0, 1]$.*

*Beweis.* Offenbar ist die Reihe eine monoton wachsende Folge mit Partialsummen $\geq 0$ und es gilt $a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k}$. Daher folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ aus

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{10-1}\right) = 1$$

die Behauptung. ■

**Definition.** Gegeben seien $m \in \mathbb{N}_0$, $b_m, \dots, b_0 \in \{0, \dots, 9\}$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0, \dots, 9\}$. Wir schreiben

$$b_m \dots b_0 \,.\, a_1 a_2 a_3 \cdots = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

und nennen diese Reihe **Dezimalentwicklung** oder **Dezimalbruch**.

Man nennt $b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0$ die **Vorkommastellen** und $0.a_1 a_2 a_3 \dots$ die **Nachkommastellen**.

Da die Reihe nach (17.14) konvergiert, besitzt sie einen Grenzwert, der als **Wert** der Dezimalentwicklung bezeichnet wird.

**Bemerkung.** Wie üblich werden meist Dezimalentwicklungen mit ihren Werten identifiziert. Das entspricht dem ambivalenten Gebrauch der Schreibweise für Reihen und ihre Grenzwerte.

**Beispiel.** $3.1415926$ hat die Vorkommastelle $3$ und die Nachkommastellen $0.1415926$.

$1.0$ hat $1$ bzw. $0.0$ und $0.9999\dots$ hat $0$ bzw. $0.9999\dots$ als Vorkomma- bzw. Nachkommastellen.

Wichtig ist der

**(17.15) Satz.** *Für die Dezimalentwicklung $B := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$ mit Wert $W$ gilt*

**(1)** $W = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0$ *und* $W = 1 \iff \forall k \in \mathbb{N} : a_k = 9$.

**(2)** *Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und*

$$A_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} a_k \cdot 10^{-k} \quad \textit{gilt} \qquad 0 \leq W - A_\ell \leq 10^{-\ell}.$$

*Beweis.* (1) Die Aussage über $W = 0$ ist offenbar.

Ist $a_k = 9$ für alle $k$, so zeigt eine Aufgabe die Aussage.

Sei $W = 1$. Wäre etwa erstmals $a_{k_0} < 9$, so würde gelten

$$\begin{aligned} 1 = W \quad &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} 9 \cdot 10^{-k} + 8 \cdot 10^{-k_o} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{k_0-1} 9 \cdot 10^{-k} + 8 \cdot 10^{-k_o} + 10^{-k_0} \\ &= \sum_{k=1}^{k_0-1} 9 \cdot 10^{-k} + 9 \cdot 10^{-k_o} \quad < 1. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

(2) Da $B$ monoton ist und $A_\ell$ eine Partialsumme, ist die erste Abschätzung klar.

$$W - A_\ell = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \leq 10^{-\ell} \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 10^{-\ell}.$$

■

**Bemerkung.** Die Dezimalentwicklungen $0.\overline{9}$ und $1$ sind *verschieden*, aber ihre Werte sind *gleich*, also gilt $0.\overline{9} = 1$ in Übereinstimmung mit unserer Konvention für Reihen (siehe die Bemerkung vor (17.4)).

**Beispiel.** Wir bestimmen den Wert von $0.123123123\ldots$. Genauer betrachen wir die (periodische) Dezimalentwicklung

$$0.\overline{123} = \sum_{k=1}^{\infty} 123 \cdot 1000^{-k} = 123 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} - 1 \right) = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \in \mathbb{Q}.$$

Der Wert von $0.45123123123\cdots = 0.45\overline{123}$ ist

$$0.45\overline{123} = 0.45 + 10^{-2} \cdot 0.\overline{123} = \frac{45}{100} + \frac{41}{33300} = \frac{7513}{16650} \in \mathbb{Q}.$$

Jede Dezimalentwicklung stellt eine reelle Zahl dar — ihren Wert. Wichtiger noch ist die Umkehrung dieser Aussage.

**(17.16) Satz.** *Jede reelle Zahl $x$ besitzt eine Dezimalentwicklung. Genauer: Es existiert eine Dezimalentwicklung mit Wert $x$.*

*Im Fall $x < 0$ hat sie die Form $-D$ mit einer Dezimalentwicklung $D$ von $|x|$.*

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Existenz der 10-adischen Darstellung für ganze Zahlen und folgender Aussage

**(17.17)** *Sei $r \in [0,1[ \subseteq \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften für alle $k, n \in \mathbb{N}$:*

$$a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}, \quad r_k \in [0, 1[ \quad \textit{und} \quad r = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + r_n \cdot g^{-n}.$$

*In der Tat gilt folgende Rekursion*

$$r_0 := r \quad \textit{und} \quad a_k := \lfloor r_{k-1} \cdot g \rfloor, \; r_k := r_{k-1} \cdot g - a_k \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Wegen $0 \leq r_{k-1} < 1$ gilt $0 \leq a_k < g$, also $a_k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$. Des Weiteren folgt $0 \leq r_k < 1$. Daher zeigt eine triviale Induktion nach $k$ die Existenz der beiden Folgen mit den ersten beiden Eigenschaften.

Nun folgt eine Induktion nach $n$ für die letzte Eigenschaft:

$n = 1$: Es gilt $r \cdot g = a_1 + r_1$, also $r = a_1 g^{-1} + r_1 g^{-1}$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei $r = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + r_n \cdot g^{-n}$. Wegen $r_n \cdot g = a_{n+1} + r_{n+1}$ folgt

$$\begin{aligned} r &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + r_n \cdot g^{-n} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + r_n g \cdot g^{-(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + (a_{n+1} + r_{n+1}) \cdot g^{-(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot g^{-k} + r_{n+1} \cdot g^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe zwei weitere Folgen $(a'_k)$ und $(r'_k)$, die ebenfalls die obigen Bedingungen erfüllen. OE dürfen wir $n$ minimal wählen mit $a_n \neq a'_n$ oder $r_n \neq r'_n$. Es gilt dann

$$r = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g^{-k} + r_n \cdot g^{-n} = \sum_{k=1}^{n} a'_k \cdot g^{-k} + r'_n \cdot g^{-n}.$$

Subtrahiert man die rechte Seite von der linken und beachtet, dass $a_k = a'_k$ für alle $k < n$, so folgt

$$a_n \cdot g^{-n} - a'_n \cdot g^{-n} + r_n \cdot g^{-n} - r'_n \cdot g^{-n} = 0 \implies a_n - a'_n = r'_n - r_n$$

Wegen $\left| r'_n - r_n \right| < 1$ und $a_n - a'_n \in \mathbb{Z}$ sind beide Seiten gleich $0$; im Widerspruch zur Annahme. ∎

Zur Vereinfachung und weil es keine Einschränkung bedeutet, setzen wir ab jetzt $m = 0$ und $b_0 = 0$ voraus. D. h., die Vorkommastellen sind $0$. Anders ausgedrückt: Der Wert liegt in $[0, 1]$.

Man unterscheidet drei Typen von Dezimalentwicklungen. Eine Dezimalentwicklung $0.\, a_1 a_2 a_3 \ldots$ heißt

**endlich**, wenn $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall i \geq n_0 : a_i = 0$.

**periodisch**, wenn es $p, \ell \in \mathbb{N}_0$, $\ell > 0$, gibt mit $\forall i > p : a_{i+\ell} = a_i$.

**nicht periodisch**, andernfalls.

Falls $0.\, a_1 a_2 a_3 \ldots$ periodisch ist, so nennt man $0.\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_p$ die **Vorperiode** und schreibt $0.\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_p \overline{a_{p+1} \ldots a_{p+\ell}}$.

**(17.18) Bemerkung.** 1.) Auch endliche Dezimalentwicklungen sind periodisch!

2.) Die Darstellung einer reellen Zahl $x$ als Dezimalentwicklung ist *nicht immer* eindeutig! So gilt z. B. $1.234 = 1.233\overline{9}$. Bis auf 0 haben alle reellen Zahlen mit endlicher Dezimalentwicklung zwei verschiedene Darstellungen.

3.) Durch „Runden“ kann man die Fehlerabschätzung aus (17.15.2) auf $0.5 \cdot 10^{-\ell}$ verbessern.

4.) Statt der Basis 10 kann man wie im ersten Semester beliebige natürliche Zahlen $g \geq 2$ als Basis benutzen. Die Basis $g = 2$ findet in Computern tatsächlich Anwendung.

**(17.19) Satz.** *Eine Dezimalentwicklung ist genau dann periodisch, wenn ihr Wert eine rationale Zahl ist.*

*Beweis.* Gegeben sei eine Dezimalentwicklung $D$. Wegen (17.14) können wir o.E. den Wert im Intervall $[0,1]$ annehmen.

Sei $D = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$ periodisch mit Vorperiode $V = 0.\,a_1 a_2 \ldots a_p \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} &= V + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = V + 10^{-p} \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-(k-p)} \\ &= V + \frac{1}{10^p} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} \cdot 10^{-k}.\end{aligned}$$

Es genügt also, die Dezimalentwicklung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+p} \cdot 10^{-k}$ zu betrachten. Zur Vereinfachung nehmen wir $p = 0$ an. Wir setzen $z = a_1 a_2 \ldots a_\ell \in \mathbb{N}_0$, wobei $a_i = a_{i+\ell}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} &= a_1 a_2 \ldots a_\ell \cdot 10^{-\ell} + a_1 a_2 \ldots a_\ell \cdot 10^{-2\ell} + a_1 a_2 \ldots a_\ell \cdot 10^{-3\ell} + \ldots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} z \cdot (10^{-\ell})^m = z\left(\frac{1}{1-10^{-\ell}} - 1\right) = \frac{z}{10^\ell - 1} \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

Die Umkehrung ist schwieriger zu beweisen. Wir deuten die Vorgehensweise nur an.

Sei $\frac{m}{v}$ ein Bruch mit $m, v \in \mathbb{N}$. Im ersten Schritt werden die Potenzen von 2 und 5 herausgeteilt, d.h., wir schreiben

$$\frac{m}{v} = \frac{m}{2^\mu 5^\nu} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m'}{10^\lambda} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad \mathrm{ggT}(10, n) = 1 \quad \text{und} \quad \lambda = \max\{\mu, \nu\}.$$

Man überlegt sich, dass es genügt $\frac{1}{n}$ zu untersuchen.

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ minimal mit $10^\ell \equiv 1 \mod n$. Die Existenz von $\ell$ ist der Schlüssel zum Beweis und nicht ganz trivial. Nun gibt es $u$ mit $n \cdot u = 10^\ell - 1$. Also gilt

$$\frac{1}{n} = \frac{u}{10^\ell - 1} = u \cdot \left(\frac{1}{1-10^{-\ell}} - 1\right) = u \sum_{k=1}^{\infty} (10^{-\ell})^k.$$

Weil die Anzahl der Dezimalstellen von $u$ kleiner gleich $\ell$ ist, ist $u$ die Periode der Dezimalentwicklung (ggf. mit Nullen am Anfang aufgefüllt).

Die Vorperiode ergibt sich durch Multiplikation mit $\frac{m}{2^\mu 5^\nu} = \frac{m'}{10^\lambda}$. Dabei ändert sich auch die Ziffern der Periode, nicht aber die Länge der Periode. ∎

**Beispiel.** $\dfrac{1}{333}$ ergibt wegen $333 \cdot 3 = 10^3 - 1$ die Darstellung $0.\overline{003}$.

$$\frac{73}{666} = \frac{73}{2} \cdot \frac{1}{333} = 36.5 \cdot 0.\overline{003} = 0.1095 + 0.0001095 + \cdots = 0.1096096 + \cdots = 0.1\overline{096}.$$

Natürlich kann man das auch durch sukzessive Division mit Rest berechnen.

Schon (17.15.1) und (17.18.2) zeigen, dass die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl nicht immer eindeutig ist. Sie ist aber *oft* eindeutig, wie der folgende Satz zeigt.

**(17.20) Satz.** *Sei $x \in \, ]0,1[$ mit zwei verschiedenen Dezimalentwicklungen, nämlich $x = 0.\,a_1a_2a_3\ldots = 0.\,b_1b_2b_3\ldots$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $a_n \neq b_n$ und o.E. $a_n > b_n$.*

*Dann gilt $x = 0.\,a_1a_2a_3\ldots a_n$ mit einer endlichen Dezimalentwicklung, und*

$$b_k = \begin{cases} a_k & \text{falls } k < n \\ a_n - 1 & \text{falls } k = n \\ 9 & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

*Beweis.* Wir berechnen die Differenz des jeweils $m$-ten Gliedes, $m > n$, der beiden Partialsummenfolgen.

$$\begin{aligned} d_m &= \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{-k} - \sum_{k=1}^{m} b_k 10^{-k} = (a_n - b_n)10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{m} (a_k - b_k)10^{-k}. \\ &= 10^{-n}\left((a_n - b_n) + \sum_{k=n+1}^{m} (a_k - b_k)10^{-k+n}\right). \end{aligned}$$

Dann ist $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und ebenso $(10^n d_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Weiter gilt mit (17.14)

$$1 \le a_n - b_n \quad \text{und} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} (a_k - b_k)10^{-k+n}\right| \le 1.$$

Somit muss gelten

$$a_n - b_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (a_k - b_k)10^{-k+n} = -1,$$

sonst wäre $(10^n d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge! Also erhält man $b_n = a_n - 1$ und für alle $k > n : a_k - b_k = -9$; somit $a_k = 0$ und $b_k = 9$. ∎

**Bemerkung.** Etwas volkstümlicher ausgedrückt: Hat die reelle Zahl $x$ eine endliche Dezimalentwicklung $x = 0.\, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ mit $a_n \neq 0$, dann gilt auch

$$x = 0.\, a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1}(a_n - 1)\overline{9}.$$

Alle anderen reellen Zahlen besitzen eine eindeutige Dezimalentwicklung.

# 18 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion gilt als die wichtigste Funktion der Analysis. Sie hat sowohl theoretische als auch praktische Bedeutung. Sie tritt in vielen Anwendungen in natürlicher Weise auf. Ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus spielt ebenfalls eine große Rolle.

## Die Exponentialfunktion

In (17.11.6) haben wir gesehen, dass durch folgende Vorschrift eine Funktion definiert wird

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ = \ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Diese Funktion heißt **Exponentialfunktion**. Man beachte, dass jedem $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) der Wert der als konvergent erkannten Reihe zugeordnet wird.

Wir werden einige wichtige Eigenschaften dieser sehr bedeutenden Funktion festhalten.

**(18.1) Satz.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

**(1)** $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ ***(Funktionalgleichung)***

**(2)** $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

**(3)** $1 + x \leq \exp(x)$

**(4)** $\exp(x) > 0$

**(5)** *Falls* $-1 < x < 1$, *dann* $\exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

**(6)** $\exp$ *ist streng monoton wachsend, also injektiv.*

**(7)** $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,)$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* (1) kann man mit etwas Aufwand direkt aus der Reihendarstellung herleiten. Weil man dafür genauere Kenntnisse der Konvergenztheorie für Potenzreihen braucht, verzichten wir hier auf einen Beweis und verweisen auf [AHK$^+$08, § 9.3, S. 265f] (siehe auch [Kön03, § 8.1, S. 103ff]).

(2) Übung!

(3), (4), (5): Für $x = 0$ sind die Aussagen klar. Sei zunächst $x > 0$. Übung!

Sei nun $x \in \,]-1, 0[$, dann gilt mit dem eben gezeigten und weil alle Terme positiv sind

$$\begin{aligned} & 1 + (-x) \leq \exp(-x) = \exp(x)^{-1} \leq \frac{1}{1-(-x)} \\ \iff \quad & \frac{1}{1+(-x)} \geq \exp(x) \geq 1 - (-x) \\ \iff \quad & 1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

und (5) ist gezeigt. Weiter gilt (3) auf $]-1, \infty[$.

Da $\exp(x) > 0$ und $1 + x \leq 0$ für alle $x \leq -1$ folgt trivialerweise der Rest von (3).

(6) Sei $x < y$, dann gilt $y = x + u$ mit $u > 0$. Wegen (3) ist $\exp(u) > 1$ und mit (1) folgt $\exp(x) < \exp(x)\exp(u) = \exp(x + u) = \exp(y)$.

(7) Die Homomorphie-Eigenschaft ist gerade (1). Wegen (6) fehlt nur noch die Surjektivität. Die zeigen wir später. ∎

**(18.2) Bemerkung.** 1.) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt auch für alle $z \in \mathbb{C}$. Deshalb ist $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot\,)$ ein Homomorphismus, der zwar nicht injektiv, dafür aber surjektiv ist.

2.) Die Funktionalgleichung und die Abschätzung in (18.1.3) legen die Exponentialfunktion eindeutig fest.

Wir notieren ein weitere Konsequenz aus der Funktionalgleichung, die wir im Folgenden verallgemeinern werden.

**(18.3)** *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt* $\exp(k) = e^k$.

*Beweis.* Übung! ∎

Nun können wir wenigstens einige Punkte der Exponentialfunktion skizzieren und bekommen schon einen Eindruck des Graphen. Das wird in der Vorlesung gemacht.

## Der natürliche Logarithmus

Die Aussage (18.1.7) beinhaltet, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ eine bijektive Funktion ist. Nach dem ersten Semester existiert dann eine (eindeutig bestimmte) Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion heißt **natürlicher Logarithmus**.

Der natürliche Logarithmus ist also definiert durch

$$\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \qquad y = \ln(x) \iff \exp(y) = x.$$

Insbesondere gilt $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{>0}}$ und $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Wir leiten einige wichtige Eigenschaften ab.

**(18.4) Satz.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt*

**(1)** $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ ***(Funktionalgleichung)***

**(2)** $\ln(1) = 0$ *und* $\forall k \in \mathbb{Z} : \ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$

**(3)** $\ln(x) \leq x - 1$

**(4)** $\ln$ *ist streng monoton wachsend, also injektiv.*

**(5)** $\ln : (\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,) \to (\mathbb{R}, +)$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* (1) Es gilt

$$\begin{aligned} & \exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y \\ \iff \quad & \ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

(2) folgert man aus (18.1.2) und mit Induktion aus (1); vgl. auch (18.3).
(3) Wir setzen $\ln(x)$ in (18.1.3) ein: $\quad 1+\ln(x) \leq \exp(\ln(x)) = x \implies \ln(x) \leq x-1.$
(4) ist klar!
(5) folgt direkt aus (18.1.7) und (1). ∎

**(18.5) Bemerkung.** 1.) Die Funktionalgleichung und die Abschätzung (18.4.3) legen die ln-Funktion eindeutig fest.

2.) Die Funktionalgleichung des ln (und jeder anderen Logarithmusfunktion) erlaubt es Produkte von Zahlen durch Summen zu ersetzen. Das wurde bis vor wenigen Jahrzehnten für Handrechnungen benutzt. Dazu dienten Logarithmentafeln und/oder Rechenschieber.

3.) In der Tat suchte der schottische Mathematiker John Napier[6] (1550 – 1617) nach einer „stetigen" Funktion, die die obige Funktionalgleichung erfüllt und fand den Logarithmus (nahezu zeitgleich und unabhängig von Jost Bürgi[7] (1552 – 1632)).

4.) Der Eintrag in Wikipedia zum Logarithmus ist sehr lesenswert.[8]

## Potenzen

Was ist $2^{\sqrt{2}}$, oder $e^{\pi}$ ? Genauer und allgemeiner fragen wir: Wie ist $a^x$ definiert?

Diese Frage haben wir für $x \in \mathbb{Z}$ bereits im ersten Semester beantwortet, und zwar für beliebige Gruppen. (Welche Gruppe liegt hier zugrunde?)

Wir wiederholen die Definition; dabei seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{Z}$.

$$a^x := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (x \text{ Faktoren}) & \text{für } x > 0 \\ \left(a^{-1}\right)^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

Das ist auch für $a = e,\ a = \pi$ usw. definiert! Und es gelten die Potenzrechengesetze.

Im nächsten Schritt dehnen wir die Definition auf $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, aus. Dabei muss man $a \geq 0$ voraussetzen, wenn man keine Fallunterscheidungen machen will. Wie also ist $a^{\frac{1}{n}}$ zu definieren? Damit die Potenzrechengesetze weiter gelten, muss man zumindest

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$$

verlangen. Für $a^{\frac{1}{n}}$ wird auch $\sqrt[n]{a}$ geschrieben. Aber — existiert eine solche Zahl? Die Antwort liefert

[6] http://de.wikipedia.org/wiki/John_Napier
[7] http://de.wikipedia.org/wiki/Jost_Burgi
[8] http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus

**(18.6) Satz.** *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\sqrt[n]{a}$ mit den Eigenschaften*

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \quad \textit{und} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

*Beweis (Skizze).* Wir betrachten die Menge $W := \{u \in \mathbb{R}\,;\ u^n \leq a\}$. Diese Menge ist wegen $0 \in W$ nicht leer und durch $\max\{1, a\}$ nach oben beschränkt, besitzt also ein Supremum $s \geq 0$.

Etwas mühsamer ist es, die beiden Annahmen $s^n < a$ und $s^n > a$ zum Widerspruch zu führen. Schließlich müsste die Eindeutigkeit gezeigt werden. ∎

**Definition.** Man nennt $\sqrt[n]{a}$ die $n$-te **Wurzel** aus $a$.

**(18.7) Bemerkung.** 1.) Vgl. zum Beweis auch (2.16) aus dem ersten Semester. Dort wurde der Beweis für $\sqrt{a}$ für $a > 1$ ausgeführt.

2.) Ein anderer Weg $\sqrt[n]{a}$ zu definieren ist die Bijektivität der Funktion $\mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}\,;\ x \mapsto x^n$ zu zeigen und die Umkehrfunktion zu benutzen. Wir werden das später etwas genauer untersuchen (vgl. (19.14)).

3.) $\sqrt[n]{a}$ ist zunächst nur für $a \geq 0$ definiert und selbst $\geq 0$. Z. B. ist $\sqrt{4} = 2$ und nicht etwa $-2$. Völliger Unsinn wäre es $\sqrt{4} = \pm 2$ zu schreiben.

4.) $\sqrt[n]{a}$ zu bestimmen ist genau von der Aufgabe zu unterscheiden die Gleichung $x^n = a$ zu lösen. *Eine* Lösung dieser Gleichung ist $\sqrt[n]{a}$ (und zwar die einzige positive). Ist $n$ gerade, so hat diese Gleichung zwei Lösungen, nämlich $\sqrt[n]{a}$ und $-\sqrt[n]{a}$.

5.) Ist $n$ ungerade, so kann man auch $\sqrt[n]{a}$ für $a < 0$ definieren; nämlich durch

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}. \quad \text{Dann gilt} \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

In vielen Lehrbüchern wird dieser Ausdruck aber undefiniert gelassen. Der Grund dafür ist, dass für $a < 0$ die Potenzrechengesetze *nicht* uneingeschränkt gelten! (Beispiel?) Man handelt sich also viele Fallunterscheidungen ein.

In jedem Fall gilt, dass im Fall $a < 0$ die Exponentenschreibweise verboten ist!

6.) VORSICHT! Es gilt immer $(\sqrt[n]{a})^n = a$, nicht aber $\sqrt[n]{a^n} = a$.
Gegenbeispiel: $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3 \neq -3$.

Für die Untersuchung beliebiger rationaler Zahlen im Exponenten brauchen wir

**(18.8)** *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$, dann gilt $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.*

*Beweis.* Nach Definition sind alle Ausdrücke $\geq 0$. Wegen (18.6) können wir rechnen

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n \overset{!}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Die Eindeutigkeitsaussage in (18.6) zeigt die Behauptung. ∎

Wir untersuchen nun rationale Zahlen $b \in \mathbb{Q}$ und beschränken uns auf $a > 0$. OE. sei $b > 0$, dann ist $b = \frac{m}{n}$, mit $m, n \in \mathbb{N}$. Man ist geneigt zu definieren

$$a^b := \sqrt[n]{a^m} \quad \text{und} \quad a^{-b} := \sqrt[n]{a^{-m}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\,.$$

Bei dieser Definition muss man aufpassen, dass man keine Widersprüche erhält, denn die Darstellung von $b$ als Bruch $\frac{m}{n}$ ist nicht eindeutig. Es gilt $\frac{m}{n} = \frac{u}{v} \iff mv = nu$. Daher ergibt sich unter Zuhilfenahme von (18.8)

$$a^{mv} = a^{nu} \implies (a^{mv})^{\frac{1}{nv}} = (a^{nu})^{\frac{1}{nv}} \implies \left(\sqrt[v]{(a^m)^v}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{(a^u)^n}\right)^{\frac{1}{v}} \implies a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{u}{v}}.$$

Nur deshalb ist die oben gegebene Definition sinnvoll. Man sagt der Ausdruck ist **wohldefiniert**.

Dieses Vorgehen liefert für alle $a > 0$ bzw. $q \in \mathbb{Q}$ eine Funktion

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto a^x \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto x^q.$$

Machen Sie sich Skizzen der Graphen dieser Funktionen; auch mit geogebra oder einem Funktionen Plotter.

Wir werden jetzt (18.4.2) verallgemeinern.

**(18.9)** *Sei* $a \in \mathbb{R}^{>0}$ *und* $q \in \mathbb{Q}$, *dann gilt* $\quad \ln(a^q) = q \cdot \ln(a)$.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall $q = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$n \cdot \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{a}^{\,n}\right) = \ln a \implies \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln(a).$$

Nun ergibt sich die Behauptung leicht aus (18.4.2). ∎

Hieraus folgt für alle $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $q \in \mathbb{Q}$

$$a^q = \exp\Big(\ln(a^q)\Big) = \exp\Big(q \cdot \ln(a)\Big).$$

Diese Formel ist geeignet $a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren.

**Definition.** Für alle $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $\quad a^x := \exp\Big(x \cdot \ln(a)\Big)$.

Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto a^x$ heißt (allgemeine) **Exponentialfunktion** zur **Basis** $a$.

Für $p \in \mathbb{R}$ heißt die Abbildung $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto x^p$ (allgemeine) **Potenzfunktion** mit dem **Exponenten** $p$.

Dieses Vorgehen ist sinnvoll, weil unser Ausdruck für alle Zahlen, für die es eine unabhängige Beschreibung der Potenzen gibt auch mit dieser übereinstimmt. Die Definition ist also **konsistent**.

Aus (18.3) folgt $\exp(1) = e$, also gilt $\ln(e) = 1$. Daraus ergibt sich

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x).$$

Wir halten erneut einige wichtige Eigenschaften fest, insbesondere die Potenzrechengesetze in voller Allgemeinheit.

**(18.10) Satz.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

*Beweis.* Übung! ∎

Wir formulieren einige Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion.

**(18.11) Satz.** *Es seien $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto a^x$.*

**(1)** *$f(x) = a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$*

**(2)** *$f$ ist streng monoton* $\begin{cases} \textit{fallend} & \textit{falls} \quad 0 < a < 1 \\ \textit{wachsend} & \textit{falls} \quad a > 1 \end{cases}$

*und damit injektiv in diesen Fällen. Der Fall $a = 1$ ist trivial.*

**(3)** *$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,)\,;\ x \mapsto a^x$ ist für $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* (1) und (3) direkt aus (18.1.4) bzw. (18.1.7) mit (18.10).

(2) Im Fall $a > 1$ ist $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ die Verkettung zweier streng monoton wachsender Funktionen $x \mapsto x \cdot \ln(a)$ und $\exp$, also selbst streng monoton wachsend.

Im Fall $0 < a < 1$ ist $\ln(a) < 0$, also $x \mapsto x \cdot \ln(a)$ fallend. Dann gilt das auch für die Verkettung. ∎

Schließlich einige Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

**(18.12) Satz.** *Es seien $p \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto x^p$.*

**(1)** *$f(x) = x^p > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$.*

**(2)** *$f$ ist streng monoton* $\begin{cases} \textit{fallend} & \textit{falls} \quad p < 0 \\ \textit{wachsend} & \textit{falls} \quad p > 0 \end{cases}$

*und damit injektiv in diesen Fällen. Der Fall $p = 0$ ist trivial.*

**(3)** *$f : (\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,)\,;\ x \mapsto x^p$ ist für $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* (1) folgt direkt aus (18.11.1).

(2) Im Fall $p > 0$ ist Übung!

Im Fall $p < 0$ ist Übung!

(3) Die Homomorphie steht in (18.10). Nach (2) ist $f$ injektiv. Die Surjektivität wird später bewiesen. ∎

Die folgende Tabelle fasst den Werdegang der Definition von $a^x$ kurz zusammen:

| Basis | Exponent | Voraussetzung |
|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{N}_0$ | Halbgruppe |
| $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $x \in \mathbb{Z}$ | Gruppe |
| $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ | $\sqrt[n]{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$ | Vollständigkeit |
| $a \in \mathbb{R}$ | $\sqrt[n]{a}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ungerade | |
| $a \in \mathbb{R}^{>0}$ | $x \in \mathbb{Q}$ | Gruppe $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot\,)$ |
| $a \in \mathbb{R}^{>0}$ | $x \in \mathbb{R}$ (auch $x \in \mathbb{C}$) | Funktionen exp, ln |

**(18.13) Bemerkung.** Wir beschreiben eine alternative Vorgehensweise, die manchmal auch in Schulbüchern vorgestellt wird.

Wie oben beschrieben werden Potenzen mit rationalen Exponenten definiert. Das ist zwingend, wenn die Potenzrechengesetze gelten sollen. Um die „Lücken“ zu füllen, werden Folgen betrachtet. Genauer: Um $a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, zu definieren nimmt man eine Folge $(q_n)$ rationaler Zahlen, die gegen $x$ konvergiert, und setzt

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n} \quad \text{falls} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = x.$$

Um dieser Vorgehensweise Sinn zu geben, sind mehrere Hilfsaussagen zu beweisen

1. Es muss sichergestellt werden, dass es für jede reelle Zahl $x$ eine Folge rationaler Zahlen gibt, die gegen $x$ konvergiert.

2. Man muss zeigen, dass der Grenzwert $\lim a^{q_n}$ aus der Definition existiert.

3. Es gibt immer (sogar überabzählbar) unendlich viele verschiedene Folgen, die gegen eine fest reelle Zahl konvergieren. Sind die Grenzwerte aus der Definition alle gleich? Andernfalls wäre unser Konstrukt nicht wohldefiniert.

4. Was ist mit rationalen Zahlen? Es gibt ja auch Folgen die gegen rationale Zahlen konvergieren. Man muss zeigen, dass der Grenzwert aus der Definition den früher definierten Wert liefert. Nur dann ist die Definition konsistent.

5. Schließlich muss die Gültigkeit der Potenzrechengesetze nachgewiesen werden. Dazu müssen diese Gesetze für die rationalen Zahlen gezeigt werden, dann kann man mit (16.11) den Beweis relativ leicht führen.

Dieser Weg scheint aufwendiger zu sein, kommt aber ohne eine eigenständige Definition der Exponentialfunktion aus.

**Beispiel.** Für $2^{\sqrt{2}}$ könnte man die Folge $(q_n)$ aus dem Heron-Verfahren wählen. Bei einem Startwert 2 ergibt sich

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\dots$ | $\to\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_n$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{17}{12}$ | $\frac{577}{408}$ | $\frac{665857}{470832}$ | $\dots$ | $\to\sqrt{2}$ |
| $2^{q_n}$ | 4 | 2.828 | 2.66968 | 2.665148 | 2.665144 | $\dots$ | $\to 2^{\sqrt{2}}$ |

So ist beispielsweise $\quad 2^{q_5} = 2^{\frac{665857}{470832}} = \left(\sqrt[470832]{2}\right)^{665857} \quad \approx 2.665144$.
Vergleichen Sie das mit der Ausgabe Ihres Taschenrechners!
Was passiert, wenn man — wie es die Definition verlangt — $\sqrt[470832]{2^{665857}}$ rechnet?

## Der allgemeine Logarithmus

Den Logarithmus kann man wie die Exponentialfunktion verallgemeinern. Da die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}\,;\ x \mapsto a^x \quad \text{für alle } a \in\, ]0,1[\, \cup\, ]1,\infty[\, = \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$$

nach (18.11.3) bijektiv ist, besitzt sie eine (eindeutig bestimmte) Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} \quad \text{für jedes } a \in\, ]0,1[\, \cup\, ]1,\infty[.$$

Diese Funktion heißt **Logarithmus** zur **Basis** $a$. Jede dieser Funktionen kann durch jede andere ausgedrückt werden.

**(18.14) Satz.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$, dann gilt* $\quad \log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

*Insbesondere gelten die Aussagen (1), (2), (5) aus (18.4)*

*Weiter ist $\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \log_a x$ streng monoton* $\begin{cases} \textit{fallend} & \textit{falls} \quad 0 < a < 1 \\ \textit{wachsend} & \textit{falls} \quad a > 1 \end{cases}$

*und damit injektiv in diesen Fällen.*

*Beweis.* Übung! ■

**Bemerkung.** 1.) Mit diesem Satz kann man die Funktionalgleichung (18.4.1) direkt aus der für ln herleiten.

2.) Übliche Abkürzungen: $\quad \lg = \log_{10}$, $\ \mathrm{lb} = \log_2$

3.) Die Stärke eines Sinneseindrucks hängt von einer physikalischen Größe wie Helligkeit oder Lautstärke ab. Dieser Zusammenhang wird am Besten durch einen Logarithmus beschrieben.

4.) Ein analoger Zusammenhang besteht zwischen wahrgenommener Tonhöhe und der Frequenz eines Tones.

5.) Der **Schalldruckpegel** ist definiert durch

$L_p := 20 \log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)$, wobei $p$ der effektive Schalldruck und $p_0$ ein Referenzwert ist.

Die Einheit wird **Dezibel** (i.Z.: dB) genannt.

## Wachstum und Zerfall

Wir studieren einige Beispiele für Wachstum bzw. Zerfall. Wenn man konstante Wachstumsraten annimmt, so wird man direkt auf die Exponentialfunktion geführt.

**Beim Wachstum einer Bakterienkultur** nehmen wir an, dass jedes Bakterium mit der gleichen Rate Nachkommen produziert, unabhängig von der Größe der gesamten Kultur und von der verstrichenen Zeit.

Wir formalisieren diese Bedingungen um eine mathematische Beschreibung zu erhalten.

(1.) In gleichlangen Zeitintervallen soll sich die Anzahl um den selben **Faktor** vergrößern.

(2.) Zu einem bestimmten Zeitpunkt (oft $t = 0$), sei die Anzahl $N_0$ der Bakterien bekannt.

Ziel ist es eine Vorhersage über die Anzahl $N(t)$ der Bakterien zu einem späteren Zeitpunkt $t$ zu machen.

Wir betrachten ein konkretes

**Beispiel.** In jeder Stunde verdopple sich die Population. Ist $N_0 = 1000 = N(0)$, so gilt $N(1) = 2000 = 1000 \cdot 2^1$, $N(2) = 4000 = 1000 \cdot 2^2$ usw. Man findet

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t = N_0 \cdot e^{t \ln(2)} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

Tatsächlich gilt

$$\frac{N(t+s)}{N(t)} = \frac{1000 \cdot 2^{t+s}}{1000 \cdot 2^t} = 2^{t+s-t} = 2^s \implies N(t+s) = 2^s N(t).$$

Der Zunahmefaktor (hier $2^s$) hängt nur von der verstrichenen Zeitspanne $s$ ab, nicht aber vom Zeitpunkt $t$.

**Beispiel (Fortsetzung).** Mit den obigen Daten gilt etwa $N(30 \text{ min}) = N(\frac{1}{2}) \approx 1414.2$, und $N(24) = N(1 \text{ Tag}) \approx 16.8 \cdot 10^9$ also 16.8 Milliarden.

Auch hier haben wir eine **Modellierung** vorgenommen: Ein Vorgang in der Natur wird mathematisch beschrieben in der Hoffnung eine tieferes Verständnis für den Vorgang zu gewinnen, und quantitative Voraussagen machen zu können.

**(18.15) Bemerkung.** 1.) $N_0$ und der Faktor sind die **Kennzahlen** des Systems. Sie können im Prinzip gemessen werden.

2.) Die Bedingung (1.) charakterisiert die „Natur des Prozesses“. Hier werden Annahmen gemacht, die meist nicht bewiesen werden können. Selten erfassen sie das betrachtete System präzise. Oft enthalten sie Ungenauigkeiten wie in unserem Beispiel etwa:

- ▷ Die Anzahl der Bakterien ist eine natürliche Zahl (man sagt $N(t)$ sei **diskret**), wir haben aber ein **kontinuierliches** Modell gewählt, $N(t)$ wird als reelle Zahl angenommen. Bei großen Anzahlen liefert das trotzdem meist gute Resultate.
- ▷ Das Wachstum kann nicht lange so weiter gehen! Nimmt man z. B. den Durchmesser eines Bakteriums mit $2\mu$m an, so hätte man nach einer Woche $1.5 \cdot 10^{24}$ km$^3$ Bakterienvolumen. Die Erde hat ein Volumen von ca. $10^{12}$ km$^3$. Schon nach 5 Tagen wäre das Volumen der Bakterien bei $5.6 \cdot 10^9$ km$^3$.

  Das ist offensichtlich nicht möglich. Das Modell kann also nur innerhalb eines gewissen Zeitintervalls Gültigkeit haben. Dann treten Effekte in den Vordergrund, die wir vernachlässigt haben; etwa ein begrenztes Nahrungsangebot.

3.) Jedes Modell nimmt Vereinfachungen vor, die die Gültigkeit begrenzen. Diese Tatsache sollte man nie vergessen, wenn bestimmte Behauptungen als „wissenschaftlich erwiesen“ verkauft werden.

**Der radioaktive Zerfall** verläuft nach einem ähnlichen Muster. In festen Zeiteinheiten reduziert sich die Menge um einen festen Faktor.

**Beispiel.** Nach je einer Stunde werde die Menge $N(t)$ gedrittelt. Es gilt dann

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{3}\right)^t = N_0 \cdot e^{-t \cdot \ln(3)}.$$

Wir bestimmen die **Halbwertszeit** $T$:

$$\frac{1}{2} N(t) = N(t+T) = N_0 \cdot e^{-(t+T)\ln(3)} = N_0 \cdot e^{-t\ln(3)} \cdot e^{-T\ln(3)} = N(t) \cdot e^{-T\ln(3)}.$$

Es folgt $T\ln(3) = \ln(2)$, also $T \approx 0.63$ h $\approx 38$ min.

Prozesse wie in unseren Beispielen haben allgemein die Form $N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha t}$ mit einer Konstanten $\alpha$.

Ist $\alpha > 0$, so liegt Wachstum vor, im Fall $\alpha < 0$ handelt es sich um einen Zerfallsprozess. Entsprechend nennt man $|\alpha|$ **Wachstums-** bzw. **Zerfallskonstante**.

**Vorsicht:** Die Zerfallskonstante $\lambda$ ist positiv und es gilt $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Man spricht von **exponentiellem Wachstum** bzw. **exponentiellem Zerfall**.

**(18.16)** *Zwischen Zerfallskonstante $\lambda$ und Halbwertszeit $T$ besteht der Zusammenhang* $T \cdot \lambda = \ln(2)$.

*Entsprechend gilt für die Wachstumskonstante $\alpha$ und die Verdoppelungszeit $T$ die Beziehung* $T \cdot \alpha = \ln(2)$. ■

**Bemerkung.** Siehe auch den Artikel bei Wikipedia zum Thema Halbwertszeit.[9]

[9] `http://de.wikipedia.org/wiki/Halbwertszeit`

**(18.17) Beispiele.** 1.) Jährliche Verzinsung eines Kapitals $K$ bei Zinssatz $p$ mit Zinseszins führt auf die Folge $K(1+\frac{p}{100})^n$ ($n =$ Anzahl der Jahre). Das ist diskretes exponentielles Wachstum.

2.) Bei kontinuierlicher Verzinsung ergibt sich $K(t) = Ke^{\frac{p}{100}t}$ ($t =$ verstrichene Zeit in Jahren). Somit liegt (kontinuierliches) exponentielles Wachstum vor. Die Wachstumskonstante beträgt $\alpha = \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{\text{Jahre}}$, die Verdoppelungszeit $T = \frac{100\ln(2)}{p}$ Jahre.

# 19 Differentiation

Den Begriff der **Funktion** oder **Abbildung** haben wir bereits im ersten Semester kennengelernt und er hat uns stets begleitet. In der Analysis untersucht man *reelle* Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Da $D$ häufig ein *Intervall*, oder eine Vereinigung von Intervallen ist, soll dieser Begriff hier nochmals wiederholt werden.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Die Mengen

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x \le b\}\,, & \quad ]a,b[ &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x < b\}\,,\\
[a,b[ &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \le x < b\}\,, & \quad ]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \le b\}
\end{aligned}$$

heißen **Intervalle**. Es heißen

| | |
|---|---|
| $]a,b[$ | **offenes Intervall** |
| $[a,b]$ | **abgeschlossenes Intervall** |
| $]a,b]$ und $[a,b[$ | **halboffenes Intervall** |

Man lässt für $a$ oder $b$ auch $-\infty$ oder $\infty$ zu, und erhält z. B. $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x \le b\}$. In diesem Fall spricht man manchmal von einem **unendlichen Intervall**.

**Beispiel.** 1.) Wie kann man $\mathbb{R}$ als Intervall schreiben?

2.) $]-1,0[\, \cup \,]0,1] = \,]-1,1] \setminus \{0\}$, und $]0,1[\, \cup \,]1,\infty[\, = \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ sind typische Vereinigungen von Intervallen, wie sie als Definitionsmengen von Funktionen auftreten können.

3.) Wie kann man $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Vereinigung von Intervallen schreiben?

Häufig werden wir **Graph**en einer reellen Funktion skizzieren. Allerdings, kann man nicht alle Funktionen skizzieren.

**Beispiel.** Die **Dirichletfunktion** ist definiert durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sie ist benannt nach P. G. L. Dirichlet[10] (1805–1859).

Wie sieht der Graph aus?

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es reelle Funktionen zu untersuchen, die in einem gewissen Sinn *gutartig* sind.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist das **Tangentenproblem**. In der Vorlesung diskutieren wir kurz den Begriff **Tangente**. Dann untersuchen wir als erstes Beispiel die Funktion $f(x) := x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$. Eine Skizze zeigt, dass es wohl eine Tangente $g$ geben muss; aber wie kann man sie quantitativ beschreiben?

Wir kennen die Gleichung einer Geraden, die nicht parallel zur $y$-Achse ist, nämlich $g : y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$. Wir wissen außerdem, dass der Punkt $(x_0, f(x_0)) = (1,1)$

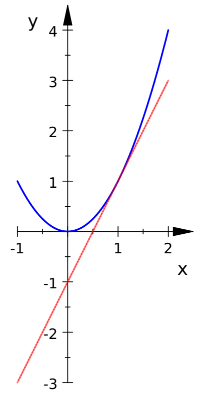
[10] http://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet

auf $g$ liegt. Das ergibt die Bedingung $1 = m + b$. Die eigentliche Aufgabe ist es also $m$ (oder $b$) zu bestimmen, d. h. die Steigung der Tangenten. Eine nahe liegende Idee ist es, Sekanten zu betrachten und einen Grenzübergang durchzuführen. Dieser Ansatz führte Gottfried Wilhelm Leibniz[11] (1646–1716) auf die Differentialrechnung. Nahezu zeitgleich wurde sie auch von Isaac Newton[12] (1643–1727) entwickelt, aber mit anderer Motivation.

Zurück zu unserem Problem: Wir betrachten einen variablen Punkt $(x, f(x))$ auf dem Graphen von $f$ und lassen $x$ gegen $x_0$ gehen (im Beispiel hat der Punkt die Koordinaten $(x, x^2)$). Die Steigung der Verbindungsgerade der Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \to 2 \quad \text{für } x \to 1\,.$$

In unserem Beispiel ist also $m = 2$ und die Tangente hat die Gleichung $g : y = 2x - 1$. Man erkennt in der nebenstehenden Graphik, dass diese Gerade tatsächlich die Tangente an $f$ im Punkt $(1, 1)$ ist. Man nennt den Wert $m$ dann auch die **Steigung** von $f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ oder an der **Stelle** $x_0$. Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Steigung genauer zu untersuchen, und weitere wichtige Eigenschaften herzuleiten.
Dazu brauchen wir zunächst einen neuen Begriff.




## Grenzwerte

**(19.1) Definition.** Gegeben sei eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass es eine Folge $(x_n) \in D$ gibt, mit $(x_n) \to x_0$.

$f$ hat an der Stelle $x_0$ den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$, wenn für jede Folge

$$(x_n) \to x_0 \quad \text{mit} \quad x_n \in D \quad \text{gilt} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

**(19.2) Bemerkung.** Man beachte, dass bei der Definiton des Grenzwerts, $x_0$ nicht in $D$ liegen muss. Man kann auch Grenzwerte für Punkte bilden, die „am Rand" von $D$ liegen.

**(19.3) Beispiele.** 1) Hat die Funktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$,
genannt **Signum** (das Vorzeichen) an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?

---

[11] http://de.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz
[12] http://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Dazu betrachten wir die Folge $(x_n)$ mit $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Für die zugehörige Folge $(\mathrm{sgn}(x_n))$ der Funktionswerte gilt

$$\mathrm{sgn}(x_n) = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sgn}(x_n)$ nicht, sgn hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, obwohl $\mathrm{sgn}(0)$ definiert ist.

Man sagt auch, dass die Funktion sgn in $x_0 = 0$ *unstetig* ist.

2) Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Der gesuchte Grenzwert tauchte in unserer Vorüberlegung zum Tangentenproblem auf.

Sei also eine Folge $(x_n)$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ gegeben, mit $\lim x_n = 1$. Dann gilt

$$\frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = x_n + 1 \to 2 \implies \lim_{x\to 1} f(x) = 2\,.$$

3) Sei $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann schreiben wir analog zu Folgen $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$.

4) Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$. Dann gilt für $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

*Frage*: Was ist mit $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Wir werden auf eine formale Definition der Konstrukte in 3) und 4) für Funktionen verzichten. Es sind einige Fälle zu berücksichtigen, aber es sollte klar sein wie man vorgehen muss.

Aus (16.11) und (16.13) folgen direkt die analogen (Rechen-)regeln für „$\lim\limits_{x\to x_0}$". Wir untersuchen die Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus etwas genauer.

**(19.4)** *Es gelten*

**(1)** $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1\,.$

**(2)** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0\,.$

**(3)** $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty\,.$

*Beweis.* (1) Übung!

(2) $\exp(x) \geq 1 + x$ nach (18.1.3) und $\lim\limits_{x\to\infty} 1 + x = \infty$. Die zweite Aussage folgt dann mit (18.1.2).

(3) kann man aus (2) herleiten. ∎

**(19.5) Bemerkung.** Die Beweise unter (1) hätte man leichter mit der Potenzreihendarstellung führen können:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \to 1 \qquad \text{für } x \to 0$$

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) = 1 + \frac{1}{2}x + \dots \to 1 \qquad \text{für } x \to 0$$

Das Problem besteht darin, dass wir hier zwei Grenzübergänge vertauschen, nämlich $x \to 0$ und die Summation der Reihe. Es ist zwar erlaubt, das zu tun, aber der Beweis würde einen gewissen Aufwand erfordern.

## Die Ableitung

... können wir jetzt formal definieren.

**Definition.** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $I$ ein Intervall. $f$ heißt an der Stelle $x_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder gleichwertig} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert wird $f'(x_0)$ geschrieben, und heißt die **Ableitung** von $f$ an der Stelle $x_0$.

Ist $f$ differenzierbar an jeder Stelle $x_0$ aus einer Teilmenge $X \subseteq I$, so sagt man, $f$ sei auf $X$ **differenzierbar**.

In diesem Fall entsteht eine neue Funktion $f' : X \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f'(x)$, die **Ableitungsfunktion**, oder kurz (erste) **Ableitung** von $f$ auf $X$.

Auf Leibniz geht die Bezeichnung $f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f$ zurück, die wir auch benutzen werden. Der Vorteil ist, dass die Variable nach der differenziert wird explizit erscheint. So kann man etwa schreiben

$$\frac{d}{dt}\ln(\omega t) = \dots \qquad \frac{d}{dy}e^{x+y} = \dots \qquad \frac{dx^n}{dx} = \dots$$

**(19.6) Beispiele.** 1.) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ zeigt die obige Überlegung $f'(1) = 2$. Allgemeiner findet man

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2 \cdot x_0.$$

2.) Entsprechend errechnet man für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto c$ die Ableitung $f'(x) = 0$ und $\mathrm{id}'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In diesen Fällen ist das Tangentenproblem trivial; warum?

Allgemeiner findet man $\frac{d}{dx}(mx + b) = m$, wie man es von einer Geraden erwartet.

3.) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt{x}$ liefert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{falls } x_0 \neq 0\,.$$

Die Ableitung ist nur auf $\mathbb{R}^{>0}$ definiert, nicht aber in $x_0 = 0$.

4.) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto |x|$ hat $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ als Ableitung. An der Stelle $x = 0$ ist sie nicht definiert: Mit der Folge $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ergibt sich nämlich

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| - 0}{(-1)^n \frac{1}{n} - 0} = (-1)^n \quad \text{divergiert!}$$

5.) Wir bestimmen die Ableitung von $\exp$. Dabei nutzen wir (19.4.1).

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h-x_0} - 1}{h} = e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Kurz $\exp' = \exp$. Dies ist vielleicht die bemerkenswerteste Eigenschaft von $\exp$, und auch ein Grund, warum man nicht z. B. $x \mapsto 2^x$ bevorzugt.

6.) Es gilt $\dfrac{d}{dx} \ln(x) = \dfrac{1}{x}$; auch eine überaus bemerkenswerte Eigenschaft.

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \qquad (*)$$

Mit Aufgabe 28 gilt $1 - 1/u \leq \ln u \leq u - 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^{>0}$, also

$$\frac{\frac{h}{x}}{1 + \frac{h}{x}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{x}} \leq \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \leq \frac{h}{x} \implies \frac{1}{1 + \frac{h}{x}} \leq \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \leq 1$$

und somit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = 1.$$

Daher zeigt $(*)$ die Behauptung.

**Bemerkung.** „$\exp' = \exp$“ kann man auch aus der Potenzreihendarstellung ablesen indem man gliedweise differenziert.

## Tangenten

**(19.7)** *Für eine in $x_0$ differenzierbare Funktion $f$ ist die Tangente $t$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gegeben durch*

$$t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff t : y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0. \qquad \blacksquare$$

Die Steigung ist durch die Ableitung gegeben, der Achsenabschnitt wird so bestimmt, dass die Gerade durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ geht. Daher muss man sich diese Formel auch nicht merken, wenn man verstanden hat wie sie zustande kommt!

**Beispiel.** Die Tangente an exp im Punkt $(0,1)$ ist $g : y = x + 1$. Wir hatten schon in (18.1) gesehen, dass $\exp(x) \geq x + 1$. Es gibt also genau einen Schnittpunkt der Geraden mit dem Graphen der Exponentialfunktion. Man kann zeigen, dass jede andere Gerade mit positiver Steigung durch den Punkt $(0,1)$, genau zwei Schnittpunkte mit dem Graphen hat. Das zeigt nochmal, dass $g$ die *richtige* Wahl für die Tangente ist.

Die Existenz einer Tangente kann man auch anders deuten, als **lineare Approximation** der Funktion. Es gilt nämlich

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \Phi(x)$$

mit der Fehlerfunktion $\Phi$. Das ist natürlich nur nützlich, wenn man den Fehler „kontrollieren" kann. In der Tat gilt für differenzierbare Funktionen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x)}{x - x_0} = 0$$

wie man aus der Definition erkennen kann (siehe auch den Beweis von (19.8) unten, dort wird $\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = 0$ gezeigt). Wichtig ist hier, dass nicht einfach nur $\Phi(x)$ gegen Null geht, sondern der angegebene Ausdruck. Das bedeutet nämlich, dass $\Phi(x)$ in einem gewissen Sinn *schnell* gegen Null geht, also der Fehler in einer Umgebung von $x_0$ nicht drastisch wächst.

**Das Newton-Verfahren zur Nullstellen-Bestimmung** liefert ein erste Anwendung: die Bestimmung eines Näherungswert für eine Nullstelle einer Funktion. Es setzt die Differenzierbarkeit der Funktion voraus. Ausgehend von einem Näherungswert $x_n$ bestimmen wir den Näherungswert $x_{n+1}$ indem wir die Tangente an den Punkt $(x_n, f(x_n))$ legen und diese mit der $x$-Achse schneiden. Die $x$-Koordinate dieses Schnittpunkt ist der nächste Näherungswert $x_{n+1}$. Mit der Tangentengleichung aus (19.7) muss also gelten

$$f'(x_n)x_{n+1} + f(x_n) - f'(x_n)x_n = 0 \iff x_{n+1} = \frac{f'(x_n)x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Daher ergibt sich die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir betrachten ein

**Beispiel.** Bestimme die Nullstelle des Polynoms $x^3 - 2$ mit Startwert $x_0 = 1$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1 | $1.\overline{3}$ | 1.263889 | 1.259933 | 1.259921 | 1.259921 |

Mit dem Startwert $x_0 = 2$ ginge es etwas langsamer.

**Bemerkung.** Das Heron-Verfahren aus § 16 zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ liefert genau dieselbe Rekursion wie das Newton-Verfahren, angewendet auf die Funktion $x^2 - 2$.

## Stetigkeit

Eine erste einfache Eigenschaft differenzierbarer Funktionen:

**(19.8)** *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x\to x_0}(x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

■

Man sagt, die Funktion $f$ sei **stetig** an der Stelle $x_0$, wenn die Eigenschaft im Satz erfüllt ist. D.h., wenn der Grenzwert im Punkt $x_0$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt.

$f$ heißt **stetig** auf $X \subseteq D$, falls $f$ an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Im Fall $X = D$ sagt man auch kurz die Funktion sei **stetig**.

Wichtig für uns ist: *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

Den folgenden Satz kann man als geometrische Deutung der Stetigkeit auffassen. Er gilt als einer der wichtigsten Sätze der Analysis und ist äquivalent zur Vollständigkeit.

**(19.9) Zwischenwertsatz.** *Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt $f$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Genauer: Zu jedem $y_0$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (d.h. $f(a) \le y_0 \le f(b)$ oder $f(b) \le y_0 \le f(a)$) existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

*Insbesondere, falls $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gibt es im Intervall $]a, b[$ eine Nullstelle.*

*Beweis (Skizze).* Sei o.E. $f(a) < f(b)$ und $y_0 \in \big]f(a), f(b)\big[$. Wir müssen zeigen, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $f(x_0) = y_0$.

Betrachte dazu die Menge $A := \big\{x \in [a, b]\,;\ f(x) \le y_0\big\}$. Diese Menge ist nicht leer ($a \in A$) und nach oben beschränkt durch $b$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert das Supremum $x_0$. Man zeigt, dass es eine Folge $(x_n) \to x_0$ gibt mit $x_n \in A$. Wegen der Stetigkeit hat man $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Nach Konstruktion gilt daher $f(x_0) \le y_0$.

Schließlich kann man zeigen, dass $f(x_0) < y_0$ auf einen Widerspruch führt.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten, weil 0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, falls $f(a) \cdot f(b) < 0$.

■

**Bemerkung.** 1.) Die fehlenden Details im Beweis kann man z.B. in [Heu03, 35.5] nachlesen. Dort wird der Nullstellensatz bewiesen (die „Insbesondere"-Aussage unseres Satzes). Daraus kann man durch Übergang zu $f(x) - y_0$ leicht die allgemeine Aussage herleiten.

2.) Einen anderen Zugang zum Beweis gibt [Beh09, 3.3.6]. Die Anwendung im folgenden Abschnitt basiert darauf.

Wir geben einige Anwendungen der Stetigkeit. Sie gelten insbesondere für alle differenzierbaren Funktionen.

**Das Bisektionsverfahren** ist ein numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung, wie das Newton-Verfahren. Es ergibt sich direkt aus dem Zwischenwertsatz.

Gegeben sei ein stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$. Nach (19.9) existiert eine Nullstelle in $]a, b[$.

Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(u_n)$ und $(v_n)$ in $[a, b]$. Die Startwerte seien $u_0 := a$ und $v_0 := b$.

Im $n$-ten Schritt sei $x := \dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$ (der Mittelpunkt von $u_{n-1}$ und $v_{n-1}$) und

$$\begin{array}{llll} u_n := x, \quad v_n := v_{n-1} & \text{falls} & f(x)f(v_{n-1}) < 0 & (\text{neues Intervall } [x, v_{n-1}]) \\ u_n := u_{n-1}, \quad v_n := x & \text{falls} & f(x)f(v_{n-1}) > 0 & (\text{neues Intervall } [u_{n-1}, x]). \end{array}$$

Im Fall $f(x) = 0$ brechen wir ab, weil wir die gesuchte Nullstelle gefunden haben. Dieser Fall spielt in der Praxis keine Rolle.

**(19.10)** *Die Folgen $(u_n)$ und $(v_n)$ sind konvergent mit demselben Grenzwert $c$ und es gilt $f(c) = 0$.*

*Genauer gilt die Fehlerabschätzung:* $\quad \left| \dfrac{u_n + v_n}{2} - c \right| \le \dfrac{v_n - u_n}{2} \le \dfrac{b-a}{2^n}.$

*Beweis.* Nach (19.9) liegt die gesuchte Nullstelle $c$ im Intervall $]u_n, v_n[$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & 0 \le c - u_n \le v_n - u_n \\ \Longrightarrow \quad & -\frac{1}{2}(v_n - u_n) \le c - u_n - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \le v_n - u_n - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ \Longrightarrow \quad & -\frac{1}{2}(v_n - u_n) \le c - \frac{1}{2}(v_n + u_n) \le \frac{1}{2}(v_n - u_n). \end{aligned}$$

Das zeigt die erste Fehlerabschätzung. Die Zweite ergibt sich durch vollständige Induktion nach $n$. Insbesondere gilt $\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \to 0$. Daraus folgt die Konvergenz der beiden Folgen gegen die Nullstelle $c$. ∎

**(19.11) Bemerkung.** 1.) Um das Bisektionsverfahren anzuwenden muss man — wie bei anderen Verfahren auch — eine grobe Näherung der Nullstelle erraten, oder graphisch bestimmen, oder .... Dann kann man die Startwerte $a$ und $b$ wählen, usw.

2.) Das Bisektionsverfahren ist sehr universell. Einzige Voraussetzung ist die Stetigkeit der Funktion $f$. Leider konvergiert es relativ langsam. Daher wird es in der Praxis selten eingesetzt.

3.) Das Bisektionsverfahren liefert eine **Intervallschachtelung**: Der anzunähernde Wert liegt stets in einem Intervall $]u_n, v_n[ \subsetneq ]u_{n-1}, v_{n-1}[$. Diese Intervalle sind ineinander geschachtelt.

**Beispiel.** Wir suchen die Nullstelle des Polynoms $x^3 - 2$ im Intervall $[1, 2]$.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | | 1.25 | | | | | 1.2578... | |
| $v_n$ | 2 | 1.5 | | 1.375 | 1.3125 | 1.281... | 1.2656... | | 1.2617... |

Es gilt $\sqrt[3]{2} \approx 1.259921\ldots$.

**Surjektivität.** Wir können jetzt einige Lücken schließen, die in Kapitel 18 (und auch im 1. Sem.) geblieben sind. Zunächst betrachten wir die Exponentialfunktion.

**(19.12) Satz.** *Die Abbildung* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ *ist surjektiv. Das zeigt den Rest von (18.1.7).*

*Beweis.* Sei $y_0 \in \mathbb{R}^{>0}$. Nach (19.4.2) gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, sodass $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit $\exp(x_1) < y_0 < \exp(x_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz (19.9) existiert also $x_0$ zwischen $x_1$ und $x_2$ mit $\exp(x_0) = y_0$. ∎

**Bemerkung.** Die Surjektivität der ln-Funktion ergibt sich direkt aus der Definition als Umkehrfunktion von exp; oder auch aus (19.4) wie im obigen Beweis.

**(19.13) Satz.** *Sei* $p \in \mathbb{R}$ *und* $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$; $x \mapsto x^p$.

**(1)** $$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } p > 0 \\ 1 & \textit{falls } p = 0 \\ \infty & \textit{falls } p < 0 \end{cases} \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \textit{falls } p > 0 \\ 1 & \textit{falls } p = 0 \\ 0 & \textit{falls } p < 0 \end{cases}$$

**(2)** *Im Fall* $p \neq 0$ *ist* $f$ *surjektiv.*

**(3)** *Sei nun* $p \in \mathbb{N}$, *dann kann* $f$ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *fortgesetzt werden und es gilt*

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} \infty & \textit{falls } p \textit{ gerade} \\ -\infty & \textit{falls } p \textit{ ungerade} \end{cases}$$

*Beweis.* (1) Übung!

(2) Wir werden in (19.22) zeigen, dass $f$ differenzierbar ist. Dann folgt die Behauptung wie gewohnt aus dem Zwischenwertsatz (19.9) und (1).

(3) Es gilt $(-x)^p = \begin{cases} x^p & \text{falls } p \text{ gerade} \\ -x^p & \text{falls } p \text{ ungerade} \end{cases}$. Daher folgt die Behauptung aus (1). ∎

**(19.14) Bemerkung.** Wie in (18.7.1) angekündigt, können wir nun eine alternative Konstruktion für die $n$-te Wurzel angeben: Die Funktion $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$; $x \mapsto x^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar (siehe (19.19) unten) und nach (18.12.2) injektiv. Wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ist $f$ auch surjektiv, also bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ liefert die $n$-te **Wurzel**.

Polynome ungeraden Grades besitzen stets eine Nullstelle. Es gilt aber noch mehr.

**(19.15) Satz.** *Jedes Polynom $f$ ungeraden Grades ist eine surjektive Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Insbesondere hat $f$ eine Nullstelle.*

*Beweis.* Für ungerade $n$ gilt nach (19.13.3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$. Bei einem Polynom bestimmt die höchste Potenz das Verhalten gegen $\pm\infty$. Daraus folgt die Behauptung mit (19.9). ∎

**Bemerkung.** Das tragende Argument ist die Zeile „Bei einem Polynom bestimmt die höchste Potenz das Verhalten gegen $\pm\infty$“. Wir deuten den Beweis dafür kurz an:

Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad $n$, d. h. $a_n \neq 0$. O.E. dürfen wir $a_n > 0$ annehmen, denn sonst könnten wir $-f$ betrachten. Wir schreiben $f(x) = a_n x^n + g(x)$ mit dem Polynom $g$ vom Grad kleiner als $n$. Man sieht leicht, dass

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x^n} = \lim_{x\to\pm\infty} \left( \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) = 0.$$

Daher gibt es ein $r > 0$ mit $\left|\frac{g(x)}{x^n}\right| < \frac{a_n}{2}$ für alle $x$ mit $|x| > r$. Für solche $x$ gilt also $a_n + \frac{g(x)}{x^n} > a_n - \frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{2}$ und damit

$$f(x) = x^n \left( a_n + \frac{g(x)}{x^n} \right) \begin{cases} > \frac{a_n}{2} x^n & \text{falls } x > 0 \text{ oder } n \text{ gerade} \\ < \frac{a_n}{2} x^n & \text{falls } x < 0 \text{ und } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Das $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium.** Stetigkeit wurde historisch anders eingeführt. Zu Anfang des 19. Jahrhunderts formulierten — unabhängig voneinander — Augustin Louis Cauchy[13] (1789 – 1857) und Bernard Bolzano[14] (1781 – 1848) eine bereits präzise Definition. Die folgende beweistechnisch einfacher zu handhabende Variante dieser Definition stammt von Karl Weierstrass[15] (1815 – 1897). Wir formulieren sie als Kennzeichnung.

**(19.16) Satz.** *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig $\iff$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \textit{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \textit{gilt} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

[13] http://de.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy
[14] http://de.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano
[15] http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

*Beweis.* „$\Longleftarrow$“: Zu zeigen ist $x \to x_0 \implies f(x) \to f(x_0)$:

Gegeben sei eine beliebige Folge $(x_n) \to x_0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zu diesem $\delta$ wiederum gibt es wegen der Konvergenz von $(x_n)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also

$$\forall\, n \geq n_0 : |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Somit konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$.

„$\Longrightarrow$“: Zu zeigen ist: $\forall \varepsilon > 0 \ldots$, vorausgesetzt ist die Stetigkeit von $f$ in $x_0$.

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, die Behauptung sei falsch. Das bedeutet:

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall \delta > 0 : \quad \exists x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta, \qquad \text{aber} \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Mit anderen Worten: Es gibt mindestens eine Folge $(x_n) \to x_0$ (denn: $\forall \delta > 0\ \exists x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$), deren Bildfolge $f(x_n)$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert (denn: $\exists \varepsilon > 0\ \ldots\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Stetigkeit in $x_0$; damit ist der Satz bewiesen. ∎

**Bemerkung.** In vielen Büchern wird Stetigkeit mit Hilfe von (19.16) *definiert* und unsere Definition als dazu äquivalente Aussage bewiesen.

Als Abschluss noch ein Beispiel zum Selbststudium, das erneut zeigt welch eigentümliche Eigenschaften Funktionen haben können. Hier ist das Kriterium aus (19.16) einfacher anzuwenden.

**Beispiel.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \ \text{ und für } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{für} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \quad \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

*Frage*: An welchen Stellen ist $f$ stetig?
*Antwort*: $f$ ist unstetig für $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, denn in jeder $\delta$–Umgebung von $x_0$ liegen irrationale Zahlen mit $f(x) = 0$. Somit ist die $\varepsilon$–$\delta$–Bedingung für kein $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < f(x_0)$ erfüllt.

Hingegen ist $f$ stetig für $x_0 \notin \mathbb{Q}$ und für $x_0 = 0$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Da es nur endlich viele $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ gibt mit $f(x) \geq \frac{1}{n_0}$, existiert $\delta := \min\left\{|x - x_0|\,;\ f(x) \geq \frac{1}{n_0}\right\} > 0$. Dieses $\delta$ erfüllt die Bedingung aus (19.16). Ist nämlich $|x - x_0| < \delta$ so gilt $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

## Rechenregeln und weitere Beispiele

Sei $I$ stets ein Intervall.

**(19.17) Satz.** *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**(1)** *Dann sind auch die Funktionen* $f+g,\ \lambda f,\ fg$ *differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

**(2)** *Für alle* $x_0 \in I$ *mit* $g(x_0) \neq 0$ *gilt* $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$

*Beweis.* (1) Die beiden ersten Aussagen folgen direkt aus den entsprechenden Rechenregeln (16.11) für Grenzwerte.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

(2) Zunächst der Spezialfall $f = 1$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{g(x)^2}\bigl(-g'(x)\bigr) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

Nun folgt mit Hilfe von (1)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \qquad \blacksquare$$

**(19.18) Bemerkung.** 1.) Die beiden ersten Aussagen bedeuten, dass die Menge $C^1(I)$ aller differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$ einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^I$ bildet. Weiter ist die Abbildung $\frac{d}{dx} : C^1(I) \to \mathbb{R}^I\ ;\ f \mapsto f'$ linear.

2.) Die entsprechenden Regeln aus (19.17) heißen **Produktregel** und **Quotientenregel**. Sie sind neben der **Kettenregel** ((19.21) unten) fundamental für die Berechnung von Ableitungen.

Unter Verwendung von Produkt- und Quotientenregel zeigen man mit Induktion

**(19.19)** $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$. *Im Fall* $n < 0$ *muss dabei* $x \neq 0$ *vorausgesetzt werden.*

*Beweis.* Übung! $\blacksquare$

Diesen Satz und den vorigen kann man insbesondere auf Polynome anwenden.

**(19.20) Beispiele.** 1.) Jede Polynomfunktion $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.

2.) Eine Funktion $f$ heißt **rational**, wenn $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen $p$ und $q$.

Der maximale Definitionsbereich ist $D_f = \{x \in \mathbb{R}\,;\ q(x) \neq 0\}$. Da $q$ nur endlich viele Nullstellen hat, ist das der Zahlenstrahl „mit einigen Löchern". Insbesondere ist $D_f$ die disjunkte Vereinigung endlich vieler Intervalle.

Rationale Funktionen sind differenzierbar auf ganz $D_f$.

Konkretes Beispiel: Für die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$ gilt

$$\frac{d}{dx}\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x^2 - 1 - 2x(x+2)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}.$$

**(19.21) Kettenregel.** *Seien $I, J$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $\vec{f}(I) \subseteq J$, dann ist die Verkettung $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt* $\quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

*Beweis (grobe Skizze).*

$$\begin{aligned}
\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \frac{\Big(g(f(x)) - g(f(x_0))\Big)(f(x) - f(x_0))}{(f(x) - f(x_0))(x - x_0)} \\
&= \frac{g\Big(f(x) - f(x_0)\Big)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $f$ konvergiert dieser Ausdruck wie erwartet. ∎

**Bemerkung.** Zwei sehr unterschiedlich aufgeschriebene Beweise findet man in [Heu03] und [For08].

**(19.22) Beispiele.** 1.) $\dfrac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$

2.) $\dfrac{d}{dx}x^b = \dfrac{d}{dx}e^{b\ln x} = e^{b\ln x} \cdot bx^{-1} = be^{b\ln x}e^{-\ln x} = be^{(b-1)\ln x} = bx^{b-1}$, mit $b \in \mathbb{R}$.

Noch eine wichtige Quelle für Ableitungsfunktionen ist der

**(19.23) Satz.** *Seien $f : I \to J$ eine streng monotone, surjektive, differenzierbare Funktion, wobei $I, J$ Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Dann ist $f$ bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$. Wenn für $x_0 \in I$ gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\Big(f^{-1}(y_0)\Big)}.$$

*Beweis (Skizze).* Zunächst halten wir (ohne Beweis) fest, dass $f^{-1}$ stetig ist. Wir setzen $x = f^{-1}(y)$. Dann gilt $x \to x_0 \iff y \to y_0$. Daher können wir rechnen

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{für } y \to y_0 . \qquad \blacksquare$$

**(19.24) Beispiele.** 1.) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend und surjektiv. Die Umkehrfunktion wird bekanntlich mit $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ bezeichnet. Da die Ableitung von $f$ für $x \neq 0$ nicht Null ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} \quad \text{wobei } y = \sqrt[3]{x} \quad (\iff y^3 = x).$$

**Vorsicht:** Die suggestive Schreibweise $\frac{d}{dx}x^{1/3} = 1/3 \cdot x^{1/3-1} = 1/3 \cdot x^{-2/3}$ ist nur für $x > 0$ zulässig; vgl. dazu (18.7). Die Ableitung in $x = 0$ existiert nicht; die Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $(0,0)$ ist die $y$-Achse!

2.) Es ist ln die Umkehrfunktion von exp. Mit $y = \exp(x)$ findet man abermals

$$\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}\,.$$

**Bemerkung.** Die Kombination der Sätze aus diesem Abschnitt erlaubt es, aus der Kenntnis der Ableitungen ganz weniger Funktionen, die Ableitungen sehr vieler (fast aller ihnen bekannter) Funktionen herzuleiten.

Zum Abschluss dieses Abschnitts seien noch die höheren Ableitungen erwähnt: Ist die Ableitungsfunktion $f'$ einer Funktion $f$ selbst differenzierbar, so nennt man ihre Ableitung $f'' := (f')'$ die **zweite Ableitung** von $f$. Man spricht entsprechend für alle $k \in \mathbb{N}$ von der **$k$-ten Ableitung**. Schreibweisen sind

$$f^{(k)} := (f^{(k-1)})' \quad \text{oder} \quad \frac{d^k}{dx^k}f, \quad \text{wobei} \quad f^{(0)} := f.$$

Die erste Formel gibt eine rekursive Definition!

**(19.25) Bemerkung.** 1.) Eine $k$-mal differenzierbare Funktion muss nicht $(k+1)$-mal differenzierbar sein. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Funktion $f(x) = x\,|x|$. Die Ableitung ist $f'(x) = |x| + x \operatorname{sgn} x \overset{!}{=} 2\,|x|$ für $x \neq 0$ und

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,|h| - 0}{h - 0} = \lim_{h \to 0} |h| = 0.$$

Daher hat man $f'(x) = 2\,|x|$, eine Funktion, die in Null nicht differenzierbar ist.

2.) Es gibt Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in jedem Punkt stetig sind, aber in *keinem* Punkt differenzierbar. Solch eine Funktion kann man trotz Stetigkeit nicht „ohne Absetzen des Stifts durchzeichnen“. Man kann sie überhaupt nicht zeichnen!

# 20 Die trigonometrischen Funktionen

In diesem kurzen Kapitel werden die aus der Schule bekannten Funktionen $\sin$ und $\cos$ eingeführt, die auch **Winkelfunktionen** genannt werden. Weitere trigonometrische Funktionen wie $\tan$, $\arcsin$ usw. werden in den Übungen behandelt.

In der Schule wird üblicherweise ein Zugang zu den trigonometrischen Funktionen über den Einheitskreis, oder das rechtwinkelige Dreieck gewählt.

Dieser Zugang hat eine Reihe von Nachteilen.

- Er basiert auf einem intuitiven Winkelbegriff, der präzisiert werden müsste, um eine stringente Definition zu erhalten.
- Durch diese Definition wird keine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt. Hier hilft der Umweg über das Bogenmaß.
- Der Begriff des Bogenmaßes ist alles andere als einfach und erfordert bei einer präzisen Definition den Begriff der Integration.
- Er liefert keine gute Methode zur Berechnung der Werte. Hier gibt es wenige Ausnahmen, die aus der Schule bekannt sind.
- Später (in der Oberstufe) werden Winkel mittels Skalarprodukt und der cos-Funktion eingeführt. Das ist ein Zirkelschluss! Vgl. dazu auch Kap. 13 aus dem Sommersemester.

Aus diesen Gründen wird hier ein Zugang (von mehreren möglichen) dargestellt, der den Ansprüchen der Mathematik und der Anwendungen genügt.

## Die Funktionen $\sin$ und $\cos$

Wir beginnen mit der

**(20.1) Definition.** Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned}
\cos x &:= \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \left[= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \pm \dots\right] \\
\sin x &:= \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \left[= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \dots\right]
\end{aligned}$$

Diese Funktionen heißen **Cosinus** bzw. **Sinus**.

**Bemerkung.** Das Quotientenkriterium (17.9) zeigt die Konvergenz beider Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Umweg über $\mathbb{C}$ dient zur Motivation, zur Vereinfachung einiger Beweise und um den Zusammenhang der Funktionen $\exp$, $\sin$ und $\cos$ wenigstens anzudeuten.

Was hat das mit den aus der Schule bekannten Funktionen sin und cos zu tun? Wo ist der Zusammenhang?

Um das zu illustrieren formulieren wir einige Eigenschaften und geben Beweisskizzen.

**(20.2)** *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

**(1)** $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) \ \Big[ = \exp(\overline{ix}) \Big]$

**(2)** $\big|\exp(ix)\big| = 1$

*Beweis.* (1) $\overline{\exp(ix)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(ix)^k} \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\overline{ix})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-ix)^k = \exp(-ix)$.

(2) $\big|\exp(ix)\big|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = 1$. ∎

Daher liegt $\exp(ix)$ auf dem Einheitskreis. Man kann $x$ als **Bogenlänge** deuten. Eine geometrische Beschreibung wird in der Vorlesung gegeben.

Wir ziehen einige Folgerungen, die man ohne geometrische Deutung erhält.

**(20.3) Satz.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

**(1)** $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$

**(2)** *Es gelten die* ***Additionstheoreme***

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \textit{und} \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

**(3)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

**(4)** $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \textit{und} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$.

*Insbesondere sind* sin *und* cos *stetige Funktionen.*

*Beweis.* (1) folgt direkt aus der Definition (20.1); oder auch aus (20.2.1).

(2) Übung!

(3) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \pm \dots \implies \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 \pm \dots \to 1$ für $x \to 0$.
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \pm \dots \implies \frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 \pm \dots \to 0$ für $x \to 0$.

(4) Aus (2) und (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptungen. ■

Ein Neuformulierung von (20.2) liefert

**(20.4)** *Für alle* $x\in\mathbb{R}$ *gilt*

**(1)** $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

**(2)** $|\cos x|\le 1$ *und* $|\sin x|\le 1$

*Beweis.* (1) folgt aus (20.2); oder aus $1=\cos(x-x)=\dots$ mit (20.3).
(2) kommt direkt aus (1). ■

**Bemerkung.** Aus (1) ergibt sich erneut, dass der Punkt $P(t):=(\cos t,\sin t)\in\mathbb{R}^2$ für alle $t\in\mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis liegt.

## Die Zahl $\pi$

Wie haben Sie diese Zahl in der Schule eingeführt?

Wir beschreiben hier einen analytischen Zugang, den wir mit einigen direkten Folgerungen aus den Reihen-Darstellungen einleiten.

**(20.5)** *Es gilt*

**(1)** $\sin 0=0$ *und* $\sin x>0$ *für alle* $x\in\,]0,2]$*;*

**(2)** $\cos 0=1$ *und* $\cos x>\frac{1}{2}$ *für alle* $x\in[-1,1]$*;*

**(3)** $\cos 2<0$*;*

**(4)** *Es existiert eine Nullstelle* $\tau\in\,]1,2[$ *von* $\cos$*.*

*Beweis.* (1) Wir nutzen die Potenzreihe

$$\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9-\frac{1}{11!}x^{11}\pm\dots\\
&= x\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)+\frac{1}{120}x^5\left(1-\frac{1}{6\cdot 7}x^2\right)+\frac{1}{9!}x^9\left(1-\frac{1}{10\cdot 11}x^2\right)+\dots
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $\sin 0 = 0$. Da $0 < x < 2$ ist jeder Klammerausdruck $\left(1 - \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}x^2\right)$ und jeder Faktor $\frac{1}{k!}x^k$ positiv; z.B. gilt

$$\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) \geq \left(1 - \frac{1}{6}2^2\right) = \frac{1}{3}.$$

Damit ist jeder Summand der Summe positiv.

(2) Hier gilt

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} \pm \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\left(1 - \frac{1}{5\cdot 6}x^2\right) + \frac{1}{8!}x^8\left(1 - \frac{1}{9\cdot 10}x^2\right) + \dots
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $\cos 0 = 1$. Wegen $x^2 \leq 1$ gilt $1 - \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}$. Alle anderen Summanden sind — wie eben — positiv.

(3) Wir arangieren die Summanden etwa anders:

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} \pm \dots = -\frac{1}{3}\underbrace{-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}}_{<0}\underbrace{-\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!}}_{<0} \pm \dots < 0.$$

Es gilt nämlich

$$-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} = \frac{2^6}{6!}\left(-1 + \frac{4}{7\cdot 8}\right) < 0 \quad \text{und analog für alle folgenden Paare.}$$

Somit haben ab dem dritten Summenden je zwei aufeinanderfolgende Summanden (wie die beiden unterklammerten Ausdrücke) eine negative Summe. Daher gilt $\cos 2 < 0$.

(4) Nach (20.3.4) ist cos stetig. Wegen $\cos 1 > 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz (19.9) eine Nullstelle $\tau$ von cos mit $1 < \tau < 2$. ∎

**Definition.** Für das Infimum über alle positiven Nullstellen der Funktion cos schreiben wir $\tau'$ und setzen $\pi := 2\cdot\tau'$. Die Zahl $\pi$ wird auch **Kreiszahl** genannt.

Die Existenz von $\tau'$ und damit $\pi$ ist durch (20.5.4) gesichert. Wir halten fest

**(20.6)** $2 < \pi < 4$ *und* $\pi$ *ist die kleinste positive Nullstelle von* sin.

*Beweis.* Es gilt

$$\sin\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Es sei $u$ eine positive Nullstelle von sin mit $u < \pi$. Dann gilt

$$0 = \sin u = \sin\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$

Wegen $\frac{u}{2} < \frac{\pi}{2}$ $[= \tau'(!)]$ ist $\frac{u}{2}$ keine Nullstelle der cos-Funktion. Daher muss $\frac{u}{2}$ eine Nullstelle von sin sein. Es gilt aber $\frac{u}{2} < 2$ und das widerspricht (20.5.1). ∎

Dadurch ergibt sich die nebenstehende Wertetabelle für die Funktionen cos und sin, die in den Übungen ergänzt werden wird.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $0$ | $-1$ |

*Beweis.* Die Werte für 0 stehen in (20.5).

Nach (20.5.1) und (20.6) gilt $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, daher zeigt (20.4.1)

$$1 = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Mit (20.3.2) rechnet man

$$\cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1.$$

∎

**Bemerkung.** Wir können jetzt genaueres über den Punkt $P(t)$ aus der vorigen Bemerkung sagen, indem wir die Punkte $P(0)$, $P(\pi/2)$ und $P(\pi)$ skizzieren.

Was unsere Definition von $\pi$ mit Kreisen zu tun hat, ist an diesem Punkt allenfalls zu erahnen.

Wir geben eine Deutung in der Vorlesung.

## Die Umkehrfunktionen von sin und cos

Wir betrachten die Funktion sin auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Es gilt $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz (19.9) ist $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ surjektiv. Die Funktion ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend (der Beweis wird in (21.6) nachgereicht). Daher existiert die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Die Ableitung von sin ist auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ nicht Null. Somit gilt

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dabei wurde $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$ benutzt, und dass cos auf dem Intevall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ positiv ist.

Entsprechend erhält man die Umkehrfunktion arccos von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ und findet die Ableitung $\dfrac{d \arccos x}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

**(20.7) Bemerkung.** Aus der Wertetabelle oben kann man folgende Aussagen einfach herleiten:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

1.) Daraus folgt $\quad \dfrac{d}{dx}\cos x = \dfrac{d}{dx}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x\,,$
erneut die bekannte Ableitung für $\cos x$.

2.) Wir betrachten die Beziehung $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dann finden wir $u \in [-1, 1]$ mit $x = \arcsin u$. Einsetzen liefert

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right) = \sin \arcsin u = u \iff \frac{\pi}{2} - \arcsin u = \arccos u.$$

Daraus ergibt sich abermals die Ableitung für $\arccos$. Diese Beziehung erklärt auch, warum die Ableitungen der Umkehrfunktionen von $\sin$ und $\cos$ bis auf ein Vorzeichen gleich sind.

# 21 Anwendungen der Differenzialrechnung

Wir präsentieren exemplarisch einige wichtige Anwendungen. Weitere Anwendungen, wie etwa Optimierungsprobleme (d.h. Bestimmung von Maxima und/oder Minima) werden in den Übungen behandelt.

## Extrema und Monotonie

**Definition.** Sei $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, $f$ habe in $x_0 \in ]a,b[$ ein **lokales Maximum** bzw. **lokales Minimum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[.$$

**Extremum** ist der Sammelbegriff für Maximum und Minimum.

Der folgende Satz ist Ihnen aus der Schule bekannt.

**(21.1) Satz.** *Sei $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit einem lokalen Extremum in $x_0 \in ]a,b[$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

*Beweis.* Wir betrachten den Fall, dass in $x_0$ ein Maximum vorliegt. Der andere Fall geht analog. Die Funktion

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für} \quad x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für} \quad x = x_0 \end{cases}.$$

ist stetig(!) und es gilt $F(x) \geq 0$ für $x \leq x_0$ und $F(x) \leq 0$ für $x \geq x_0$. Daher muss gelten $F(x_0) = 0$, wie behauptet. ∎

**Bemerkung.** Der Satz gibt nur eine notwendige Bedingung für Extrema. Man findet gewissermaßen Kandidaten dafür, die man dann genauer untersuchen kann. Weitere Kandidaten sind die Randpunkte des Intervalls und evtl. Stellen an denen die Funktion nicht differenzierbar ist. Zum Beispiel hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ keine Extrema, dennoch gilt $f'(0) = 0$.

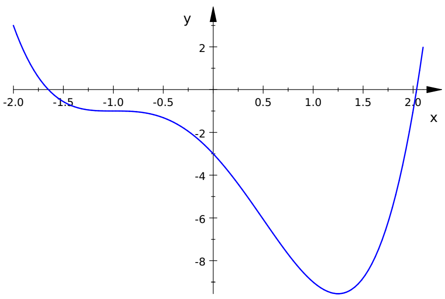
**(21.2) Beispiele.** 1.) Die Funktion $f : [-3,2] \to \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ hat folgende Kandidaten für Extremwerte __________. Da die Ableitung keine Nullstellen hat müssen nur die Randpunkte und die Stelle $x_0 = 0$ untersucht werden, an der keine Ableitung existiert. Man findet:

| $x$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 0 | 2 |
| | globales Maximum | globales Minimum | Max. |

2.) Wir betrachten $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 3$. Die Ableitung lautet

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = (x+1)^2(4x-5)$. Man erhält

| $x$ | $-1.6$ | $-1$ | $\frac{5}{4}$ | $2.04$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-1$ | $-9.5$ | $0$ |
| $f'(x)$ | | $0$ | $0$ | |
| | | kein Ext. | Min. | |




Ohne Beweis (siehe z.B. [Heu03, 49.1]) formulieren wir den wichtigen

**(21.3) Mittelwertsatz.** *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $x_0 \in ]a,b[$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.*

Wir zeigen einige wichtige Folgerungen

**(21.4)** *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in ]a,b[$. Dann ist $f$ konstant.*

*Beweis.* Sei $x \in ]a,b[$. Wegen des Mittelwertsatzes (21.3) existiert ein $x_0 \in ]a,x[$ mit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \implies f(x) = f(a).$$

Daher ist $f$ konstant gleich $f(a)$. ∎

**(21.5)** *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gelte $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in ]a,b[$. Dann ist $f$ monoton, bzw. streng monoton wachsend bzw. monoton, bzw. streng monoton fallend.*

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall $f'(x) < 0$ für alle $x \in ]a,b[$ und führen einen Widerspruchsbeweis: Sei also angenommen, dass $f$ nicht streng monoton fällt, dann gibt es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \leq f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz (21.3) gibt es $x \in ]x_1, x_2[$ mit

$$f'(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \text{im Widerspruch zur Voraussetzung.}$$

Die anderen Fälle verlaufen analog. ∎

**(21.6) Beispiel.** Wir untersuchen die Funktion $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Für die Ableitungsfunktion $\cos$ gilt $\cos x > 0$ für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Nach (21.5) ist $\sin$ auf dem gegebenen Intervall streng monoton wachsend, also injektiv.

Das wurde in § 20 schon einmal benutzt.

**(21.7) Bemerkung.** 1.) Aus (21.4) folgt, dass zwei Funktionen $f, g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ mit derselben Ableitung, also $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in ]a, b[$ sich nur um eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ unterscheiden, dass also gilt $f(x) = g(x) + C$ für alle $x \in ]a, b[$. Es hat nämlich $f - g$ die Ableitung Null und ist daher konstant.

2.) Die Schlüsse in (21.5) sind nur in der unscharfen Form (ohne „streng“!) umkehrbar. Wieder dient $x \mapsto x^3$ als Beispiel.

3.) Um zu prüfen, ob eine Nullstelle $x_0$ der Ableitung ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden ist, kann man die erste Ableitung in der „Nähe“ von $x_0$ untersuchen:

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| | | Max. | |

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| | | Min. | |

Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ist es kein Extremum.

**Beispiel.** Wir wenden die obige Bemerkung auf Beispiel (21.2.2) an und ergänzen und bestätigen die dort angegebene Tabelle

| $x$ | $-1.6$ | | $-1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $2.04$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | | $-1$ | | $-9.5$ | | 0 |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| | | fällt | kein Ext. | fällt | Min. | steigt | |

## Krümmung

Wir verzichten auf eine formale Definition der **Krümmung** einer Funktion und geben sattdessen eine anschauliche Beschreibung.

Wir sagen ein Funktion sei auf einem Intervall **links gekrümmt** oder **konvex**, wenn die Steigung der Funktion wächst. Das bedeutet, dass man beim Entlanglaufen auf dem Graphen (in Richtung wachsender $x$) eine Linkskurve beschreibt. Noch anders gedeutet: Jede Strecke zwischen zwei Kurvenpunkten liegt ganz oberhalb des Graphen.

Entsprechend definiert man den Begriff **rechts gekrümmt** oder **konkav**. Hier fällt die Steigung der Funktion; mit analogen geometrischen Deutungen.

Ein Punkt auf dem Graphen heißt **Wendepunkt**, wenn sich dort das Krümmungsverhalten ändert.

Das wichtigste Kriterium liefert der folgende Satz.

**(21.8)** *Sei $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. $f$ ist genau dann links gekrümmt (rechts gekrümmt), wenn $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) für alle $x \in ]a, b[$.*

*Wendepunkte treten genau an den Nullstellen von $f''$ auf, an denen das Vorzeichen wechselt.*

**Bemerkung.** Unsere „Definition“ impliziert zusammen mit (21.5) diese Aussage direkt. Die *richtige* Definition kommt ohne Annahmen über die Differenzierbarkeit aus. Für einen formalen Beweis wird dann erneut der Mittelwertsatz (21.3) benötigt.

**Beispiel.** Wir greifen Beispiel (21.2.2) nochmals auf und ergänzen unsere Tabelle erneut. Es gilt $f''(x) = 12x^2 + 6x - 6 = 6(x+1)(2x-1)$.

| $x$ | $-1.6$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{5}{4}$ | | $2.04$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | | $-1$ | | $-6.0625$ | | $-9.5$ | | $0$ |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| Wach.<br>Krüm. | | fällt<br>links | kein Ext.<br>Wendepkt. | fällt<br>rechts | Wendepkt. | | Min.<br>links | steigt | |

Zum Abschluss dieses Abschnitts an einem Beispiel, die wohlbekannte

**Kurvendiskussion.** Wir **diskutieren** die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Folgende Eigenschaften sind zu untersuchen:

1. Maximalen Definitionsbereich ermitteln. Entfällt hier!
2. Symmetrie untersuchen: Offenbar gilt $f(-x) = f(x)$, d. h., die Funktion ist symmetrisch zur $y$-Achse.
3. Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ bestimmen: ________________
4. Nullstellen: ____________
5. Monotonie, Extremwerte: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$ hat als einzige Nullstelle $x_0 = 0$. Offenbar wechselt das Vorzeichen von $+$ zu $-$, es liegt also ein Maximum vor. Die Funktion wächst zuerst, ab $x_0$ fällt sie.
6. Krümmung, Wendepunkte:
$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)(-x) + e^{-\frac{x^2}{2}}(-1) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( x^2 - 1 \right)$$
hat zwei Nullstellen $x_{1/2} = \pm 1$.

Wir tragen die Ergebnisse in eine Tabelle ein, wobei $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0.243$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.409$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ | | $0$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | wachsend<br>links | Wendepkt. | | Max.<br>rechts | | Wendepkt. | fallend<br>links | |

Mit diesen Daten kann man eine ziemlich präzise Skizze des Graphen anfertigen.

## Wachstumsraten

Im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion haben wir in § 18 schon spezielle Wachtumsprozesse studiert. Wir betrachten jetzt eine viel allgemeinere Situation. Gegeben sei eine Funktion $t \mapsto f(t)$, die einen zeitabhängigen Prozess beschreibt. Wir fragen: *Wie ändert sich der Wert der Funktion, wenn die Zeit fortschreitet?*

Der **Zuwachs**, wenn man von einem Zeitpunkt $t$ zu einem späteren $t+k$ übergeht beträgt

$$\frac{f(t+k)-f(t)}{k}.$$

Wichtig für die Vergleichbarkeit ist es, diesen Wert auf das **Inkrement** $k$ zu beziehen. Ist das betrachtete Inkrement gleich einer Zeiteinheit (d. h. $k=1$), so liefert unser Wert die **diskrete absolute Wachstumsrate**. Das haben wir im Zusammenhang mit der Verzinsung gesehen. Das Inkrement ist hier typischerweise 1 Monat, oder 1 Jahr. Die Funktion $f$ wird dann besser als Folge aufgefasst.

Wir wollen uns mit **kontinuierlichen Prozessen** befassen.

**Beispiel.** Bei einer Autofahrt sei $f(t)$ der zurückgelegte Weg ab einer bestimmten Startzeit. Wählt man etwa $k=1$ Stunden, so ist $\frac{f(t+k)-f(t)}{k}$ die **Durchschnittsgeschwindigkeit** in diesem Zeitraum. Die Maßeinheit ist $\frac{km}{h}$. Allgemeiner liefert der Ausdruck die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeit-Intervall $[t, t+k]$. Lässt man $k$ gegen Null gehen, so entsteht die **Momentangeschwindigkeit**. Das ist das, was der Tacho misst.

**Bemerkung.** In vielen praktischen Prozessen wird nicht wirklich die Momentangeschwindigkeit gemessen, sondern ein Näherungswert der Form $\frac{f(t+k)-f(t)}{k}$ mit „genügend kleinem“ $k$.

Ein Beispiel sind einfache Tachometer an Fahrrädern, die mit Hilfe eines Magneten in den Speichen die Zeit messen, die das Rad für eine Umdrehung braucht und mittels des Umfangs $U$ des Rades in die zurückgelegte Strecke umrechnen. Hier ist $f(t+k)-f(t) = U$ konstant und $k$ variabel.

Wir halten fest: Die Ableitung einer Funktion liefert die momentane **absolute Änderungs-** bzw. **Wachstumsrate** der Funktion.

Bezieht man die Wachstumsrate einer Funktion auf den aktuellen Funktionswert, so erhält man die **relative Änderungs-** bzw. **Wachstumsrate** der Funktion. Sie ist gegeben durch $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Dieser Wert wird häufig in den Wirtschaftwissenschaften benutzt.

**Beispiele** sind die Inflationsrate, und die Wachstumsrate (des Bruttosozialprodukts).

Realtive Änderungsraten kann man leichter untereinander und über längere Zeiträume vergleichen.

## Differentialgleichungen

Wir greifen nochmals das Problem der kontinuierlichen Verzinsung auf. Das Kapital $K(t)$ wird als Funktion der Zeit aufgefasst. Der jährliche Zinssatz sei $p$. Wählen wir $\Delta t$ als Inkrement (z. B. 1 Jahr, 1 Monat, 1 ein Tag, ...) gemessen in Jahren, so gilt

$$K(t+\Delta t) = (1+p\Delta t)K(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{K(t+\Delta t)-K(t)}{\Delta t} = pK(t)$$

Grenzübergang $\Delta t \to 0$ führt auf die **Differentialgleichung** $K'(t) = pK(t)$. Man sieht leicht, dass $K(t) = K(0)e^{pt}$ eine Lösung ist. Das haben wir in § 18 auf anderem Weg auch gefunden.

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung deren Lösung eine Funktion ist. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen der Funktion und ihren Ableitungen her. Wenn sie lösbar sind, haben Differentialgleichungen meist eine ganze Schar von Lösungen, sodass man nur durch die Vorgabe von **Anfangswerten** zu einer eindeutigen Lösung kommt.

Differentialgleichungen treten in der Physik sehr häufig auf. Die Differentialgleichung selbst beschreibt das physikalische System (gewissermaßen den Versuchsaufbau). Die Anfangswerte legen den Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt fest. Die Lösung beschreibt den (oft zeitlichen) Verlauf des Systems.

Wir betrachten zwei Beispiele:

**I. Exponentielle Sättigung.** In einer Leiterschleife befinde sich eine Spule mit Induktivität $L$ und ein Widerstand $R$. Wird eine Gleichspannung $E$ angelegt, so gilt für den — von der Zeit abhängigen — Strom $I = I(t)$ die Differentialgleichung

$$L\frac{d}{dt}I(t) + RI(t) = E,$$

denn die Summe der Spannungen muss Null sein. Wird der Schaltkreis zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen, so gilt $I(0) = 0$. Das ist der Anfangswert. Gesucht ist die Stromstärke $I(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit. Um die Gleichung zu lösen, definieren wir eine Funktion $u(t) := I(t) - \frac{E}{R}$. Es gilt

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}I(t) = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}I(t) = -\frac{R}{L}u(t).$$

Diese Differentialgleichung für $u(t)$ können wir lösen:

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{also} \quad I(t) = u_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}\,,$$

mit dem Parameter $u_0$. Die Anfangsbedingung liefert

$$0 = I(0) = u_0 + \frac{E}{R} \implies u_0 = -\frac{E}{R}\,.$$

Die Lösung unseres Problems ist also

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Man erkennt, dass die Stromstärke anwächst um sich dann an den Sättigungswert $\frac{E}{R}$ anzunähern. Beachten Sie, dass die Induktivität bei der Sättigung keine Rolle mehr spielt. Für Gleichstrom hat eine Spule keinen Widerstand! Im Grenzfall entsteht das bekannte Ohmsche Gesetz $E = RI$ und die Stromstärke ist konstant.

**II. Die Schwingungsgleichung.** Schwingungsvorgänge spielen eine fundamentale Rolle in allen Naturwissenschaften und ihren Anwendungen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sich ein Vorgang in ähnlicher Weise mehrfach wiederholt.

Wir betrachten das vielleicht einfachste System — den **harmonischen Oszillator**. An einem elastischen Gummiband (oder einer Feder) hängt eine Masse $m$. Abhängig von der **Federkonstanten** $k$ gibt es eine **Ruhelage**, in der das System regungslos verharrt. Lenkt man die Masse aus dieser Ruhelage (nach oben oder unten) aus, so wirkt die **Rückstellkraft** $K$, die die Masse in die Ruhelage zurück treibt. Sie ist proportional zur **Auslenkung** $s(t)$, d. i. der Abstand der Masse von der Ruhelage. Die Proportionalitätskonstante ist gerade $k$, es gilt also $K = -ks(t)$. Mit dem **Newtonschen Kraftgesetz** ergibt sich die Differentialgleichung $ms''(t) = -ks(t)$. Gewöhnlich schreibt man diese Gleichung so

$$s''(t) + \omega^2 s(t) = 0 \quad \text{wobei} \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Beachte, dass $k$ und $m$ positiv sind. Man erkennt leicht, dass

$$s(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad \text{für alle} \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$$

Lösung ist. Wir geben Anfangswerte vor:

**(21.9) Beispiele.** 1.) Wir nehmen an, die Masse werde zum Zeitpunkt $t = 0$ um $A$ angehoben und dann losgelassen. Dann ist für $t = 0$ die Auslenkung $A$ und die Geschwindigkeit $0$. Das führt auf

$$A = s(0) = A_1 \sin(\omega 0) + A_2 \cos(\omega 0) = A_2$$

und mit $s'(t) = A_1\omega \cos(\omega t) - A_2\omega \sin(\omega t)$

$$0 = s'(0) = A_1\omega \cos(\omega 0) - A_2\omega \sin(\omega 0) = A_1\omega \implies A_1 = 0.$$

Die Lösung für diese Situation ist also $s(t) = A\cos(\omega t)$. Dabei ist $A$ die maximale Auslenkung. Sie wird **Amplitude** genannt.

2.) Wird die Masse im Ruhepunkt angestoßen, etwa mit Startgeschwindigkeit $v_0$, so ergibt sich wie oben $A_2 = 0$ und $A_1\omega = v_0$, also

$$s(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Die Amplitude ist also $\frac{v_0}{\omega}$.

**(21.10) Bemerkung.** 1.) Man kann zeigen, dass es keine anderen Lösungen als die oben angegebenen gibt. Zu jedem Paar von Anfangswerten $s(t_0)$ und $v(t_0)$ gibt es genau eine Lösung. Dazu ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $A_1, A_2$ zu lösen.

2.) Die Funktion $s(t)$ ist $T := \frac{2\pi}{\omega}$-periodisch. Nach der Zeit $T$ wiederholt sich der Vorgang. $T$ heißt daher **Schwingungsdauer**. Der Ausdruck

$$\nu := \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

heißt **Frequenz**; sie wird in Hz$= \frac{1}{s}$ (Hertz)[16] gemessen.

3.) Die Einheit der Frequenz ist nach Heinrich Rudolf Hertz[17] (1857–1894) benannt.

4.) Die Abbildung $f \mapsto f'' + \omega^2 f$ ist linear auf einem geeigneten Vektorraum von Funktionen. Die oben gesuchte Lösungsmenge ist genau der Kern dieser linearen Abbildung und daher selbst ein Vektorraum. Die Aussagen in 1.) besagen, dass die Funktionen sin und cos eine Basis des Lösungsraums bilden.

5.) Die eben gemachten Aussagen gelten für die Klasse der sog. **linearen** Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für sie gibt es ein einfaches Lösungsverfahren, das auf einem Ansatz mit der komplexen Exponentialfunktion beruht.

[16] `http://de.wikipedia.org/wiki/Hertz_(Einheit)`
[17] `http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Rudolf_Hertz`

# 22 Integration

In der Integrationstheorie stellt man die Frage nach der Bestimmung von Flächen, Längen, Volumina, usw. Diese Probleme sind fast so alt wie die Mathematik und lieferten die Motivation für viele abstrakte Entwicklungen, wie z. B. die Lösung quadratischer Gleichungen bei den Babyloniern. Schon die Griechen kannten exakte Methoden, die in Ansätzen den modernen Zugang zum Integral vorwegnahmen. In diesem Sinne ist Integration sehr viel älter als Differentiation. Das Grundproblem der Integration lieferte auch eine wichtige Motivation für die Entwicklung der Differentialrechnung im 17. Jahrhundert.

## Flächen

Wir betrachten zunächst nur den Spezialfall der Fläche unter dem Graphen einer Funktion.

Gegeben sei also eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir versuchen die Fläche unter dem Graphen zu approximieren, indem wir Stützpunkte $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ im Intervall $[a, b]$ wählen, und die Rechtecksflächen $f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$ aufaddieren.

Um die Darstellung zu erleichtern, wählen wir die Punkte $x_k$ **äquidistant**, dann gilt $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ und der Näherungswert $A_n$ für die Fläche ist

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_k) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\ .$$

Eine wichtige Tatsache ist, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für sehr viele Funktionen (z. B. für alle stetigen und für alle monotonen Funktionen) einen Grenzwert besitzt. Falls dieser Grenzwert existiert, so nennt man die Funktion **integrierbar**. Der Grenzwert wird **Integral** über die Funktion $f$ von $a$ bis $b$ genannt. Man schreibt

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

**(22.1) Bemerkung.** 1.) Das Integral ist eine mit einem Vorzeichen versehene Fläche. Flächenstücke unterhalb der $x$-Achse werden negativ gewertet. Unsere Definition von $A_n$ enthält das, wie man leicht sehen kann.

2.) Streng genommen wird durch das Integral der Begriff der **Fläche** erst definiert. Die Definitionen aus der Schule sind durch die Anschauung geprägt und höchstens für Rechtecke, Dreiecke und ähnlich einfache Gebilde präzise formuliert.

3.) Das wird klarer, wenn man versucht die Fläche etwa eines Kreises zu „bestimmen“. Schon Archimedes[18] (∼287–212 v. Chr.) benutzte für seine Untersuchungen Approximation und Grenzwertbildung.

[18] http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes

4.) Der entscheidende Fortschritt im 17. Jahrhundert besteht in der Entdeckung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der einen Zusammenhang mit dem Tangentenproblem herstellt.

Dieser Zusammenhang erlaubt die Behandlung vieler Probleme, die in der Antike und im Mittelalter nicht zugänglich waren.

Folgende Eigenschaften des Integrals sind anschaulich klar, bzw. ergeben sich aus unserer Beschreibung. Ein strenger Beweis würde eine genaue Definition erfordern.

**(22.2)** *Gegeben seien integrierbare Funktionen* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**(1)** $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

**(2)** $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

**(3)** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*, für alle* $c \in [a, b]$

**(4)** $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$.

**Bemerkung.** Auch integrieren ist „linear“. Aber es gibt keine einfache Formel für das Integral von Produkten oder verketteten Funktionen. Daher ist Integrieren in der Praxis sehr viel schwieriger als Differenzieren.

## Stammfunktionen

Wir bringen nun Differenzieren und Integrieren zusammen. Dieser Zusammenhang ist fundamental für Theorie und Anwendungen. Zunächst eine

**Definition.** Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** zur Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn gilt $F' = f$.

Offensichtlich sind Stammfunktionen nicht eindeutig bestimmt. In der Tat gilt

**(22.3)** *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine Funktion auf einem Intervall* $I$. *Sind* $F, G$ *Stammfunktionen von* $f$, *so gibt es ein* $C \in \mathbb{R}$ *mit* $F(x) = G(x) + C$.

*Beweis.* Übung! ∎

Nun zu dem Satz, der die mathematische Welt im 17. Jahrhundert tiefgreifend verändert hat. Er ist untrennbar mit den Namen Newton und Leibniz verbunden.

**(22.4) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion.*

**(1)** *Die Funktion* $F_a(x) := \int_a^x f(t)dt$ *ist eine Stammfunktion von* $f$, *d. h.* $F_a$ *ist differenzierbar und* $F_a' = f$.

**(2)** *Für jede Stammfunktion $F$ von $f$ gilt* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

*Beweis (Andeutung).* (1) Wir betrachten

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \approx \frac{f(x)h}{h} \to f(x) \quad \text{für } h \to 0,$$

weil $f(x)h$ ungefähr der Fläche zwischen $x$ und $x+h$ entspricht.

(2) Wegen (22.3) gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $F_a(x) = F(x) + C$. Unter Beachtung von $F_a(a) = 0$ folgt mit (1)

$$\int_a^b f(x)dx = F_a(b) = F_a(b) - F_a(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a). \qquad \blacksquare$$

Dieser Satz motiviert auch die übliche Bezeichnung und Schreibweise für Stammfunktionen als **unbestimmtes Integral** bzw. $\int f(x)dx$ *ohne* die Angabe von Grenzen.

**(22.5) Beispiele.** 1.) Die Fläche unter einer konstanten Funktion $x \mapsto c$ ergibt sich zu $\int_a^b c dx = cx|_a^b = cb - ca = c(b-a)$, wie erwartet!

2.) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) = 3$

3.) Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Geraden $g(x) = \frac{5}{2} - x$ und der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

## Anwendung: Arbeit

Wirkt eine konstante Kraft $K$ längs eines Weges der Länge $s$, so ist die geleistete Arbeit (bzw. verbrauchte Energie) $E = Ks = K(b-a)$, wenn $a$ der Startpunkt und $b = a + s$ der Endpunkt ist. Variiert die Kraft entlang des Weges, so kann man wieder den Weg in kleine Stücke $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ zerlegen und die Arbeiten $E_k = K(x_{k+1} - x_k)$ aufsummieren. Im Grenzübergang entsteht

$$E = \int_a^b K(x)dx\ .$$

Das ist eine geeignete *Definition* für die Arbeit.

**Beispiel.** Wieviel Energie $E(h)$ wird benötigt, um ein Objekt der Masse $m$, das sich auf der Erdoberfläche befindet, auf die Höhe $h$ über dem Erdmittelpunkt zu heben?

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt für die Kraft

$$K(x) = G\frac{mM}{x^2}, \quad \text{wobei } M = \text{Erdmasse},\ G = \text{Gravitationskonstante}$$

Daher gilt mit dem Erdradius $R$

$$E(h) = \int_R^h G\frac{mM}{x^2}dx = GmM(-1)\frac{1}{x}\bigg|_R^h = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h}\right).$$

Der Grenzfall $h \to \infty$ entspricht der Energie $E_\infty$, die benötigt wird um das Objekt ganz aus dem Schwerefeld der Erde zu entfernen.

Beträgt die Startgeschwindigkeit $v_0$, so ergibt eine **Energiebilanz**

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = K_\infty \implies v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 11.2\,\frac{km}{s} \quad \text{für die Erde.}$$

$v_0$ heißt die **Fluchtgeschwindigkeit**. Sie ist bemerkenswerterweise nicht von der Masse des Objekts anhängig.

## Integrationsmethoden

Wir behandeln exemplarisch zwei wichtige Methoden um Integrale zu lösen.

**(22.6) Substitutionsregel.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f\Big(g(t)\Big) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

*Beweis.* Für eine Stammfunktion $F$ von $f$ gilt nach der Kettenregel (19.21)

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Daraus folgt mit dem Hauptsatz (22.4)

$$\int_a^b f\Big(g(t)\Big) \cdot g'(t)dt = (F \circ g)(t)\bigg|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

∎

**(22.7) Beispiele.** 1.) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)xdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(t)dt = \frac{1}{2}(-\cos t)\bigg|_0^\pi = 1.$

2.) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\big|g(x)\big| + C$, wobei $f(t) = \frac{1}{t}$.

3.) Man kann die Substitutionsregel auch „von rechts nach links“ anwenden, wenn die substituierte Funktion umkehrbar ist. Wir bestimmen eine Stammfunktion, daher müssen keine „Grenzen“ berücksichtigt werden. Stattdessen machen wir am Ende eine *Rücksubstitution.*

$$F(x) = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt, \quad \text{mit } x = \ln t \text{ und } dx = \tfrac{1}{t}dt.$$

Es gilt $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t + C$ also ergibt sich insgesamt

$$F(x) = \arctan(e^x) + C$$

4.) Wir bestimmen die Fläche $A$ eines Halbkreises mit Radius $r$. Der Kreis ist durch die Gleichung $x^2+y^2=r^2$ gegeben. Um den Halbkreis als Funktion zu bekommen, lösen wir nach $y$ auf und ignorieren die negative Lösung. Daraus ergibt sich die Funktion $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ unter der die Fläche zu bestimmen ist. Also

$$A=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=\int_{-r}^{r}r\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}dx=r^2\int_{-r}^{r}\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\,\frac{1}{r}\,dx\ .$$

Die Substitution $t=\frac{x}{r}$ führt auf $A=r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$. Wir führen eine weitere Substitution durch: $t=\sin u$ und erhalten mit $dt=\cos u\ du$

$$A=r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin(u)^2}\cos u\ du=r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos u)^2du$$

Man verifiziert leicht, dass $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)$ eine Stammfunktion von $(\cos x)^2$ ist. Daher folgt

$$A=r^2\,\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}r^2\pi.$$

Als Fläche des Kreises ergibt sich dann die bekannte Formel $r^2\pi$.

Die folgende Methode ergibt sich aus der Produktregel.

**(22.8) Partielle Integration.** *Seien die Funktionen $f$ stetig und $u$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und sei $F$ Stammfunktion von $f$, dann gilt*

$$\int_a^b u\cdot f\,dx=u\cdot F\Big|_a^b-\int_a^b u'F\,dx.$$

*Beweis.* Durch Ableiten erkennt man, dass $u\cdot F-\int_a^x u(t)'F(t)\,dt$ eine Stammfunktion von $u\cdot f$ ist. Daher zeigt (22.4) die Behauptung. ∎

**Bemerkung.** Die Regel kann man sich so merken: $\int uv'=uv-\int u'v$.

**(22.9) Beispiele.** 1.)

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-\left(2xe^x-\int 2e^xdx\right)=(x^2-2x+2)e^x+C$$

2.) Analog behandelt man $\int x^2\sin x\ dx$.

3.) Etwas trickreicher ist

$$\begin{aligned}\int\cos^2x\,dx &= \cos x\sin x-\int(-\sin x)\sin x\,dx=\cos x\sin x+\int(1-\cos^2x)\,dx\\ &= x+\cos x\sin x-\int\cos^2x\,dx\\ &\Longrightarrow\ 2\int\cos^2x\,dx=x+\cos x\sin x+C'\\ &\Longrightarrow\ \int\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\cos x\sin x\right)+C\end{aligned}$$

## Länge einer Kurve

Der Graph einer jeden stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, ist geometrisch eine **Kurve**. Ist $f$ stetig differenzierbar auf $]a,b[$, dann nennt man

$$\ell(f) := \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$$

die **Länge** der Kurve, die durch $f$ definiert wird.

Wir werden diese Formel in der Vorlesung plausibel machen.

**(22.10) Beispiele.** 1.) Für die Gerade $g(x) = mx + b$ auf dem Intervall $[u,v]$, gilt

$$\ell(g) = \int_u^v \sqrt{1+m^2}\,dx = \sqrt{1+m^2}\,(v-u).$$

Das ist genau die Länge die sich direkt mit dem Satz des Pythagoras ergibt.

2.) Wir untersuchen den Halbkreis mit Radius $r > 0$. Eine Darstellung der Kurve ist durch $h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ auf dem Intervall $[-r, r]$ gegeben. Für die Länge ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ell(h) &= \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx \\
&= r\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\,\frac{1}{r}\,dx \overset{!}{=} r \arcsin u\Big|_{-1}^{1} \\
&= r\Big(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\Big) = r\pi
\end{aligned}$$

mit der Substitution $u = \frac{x}{r}$

3.) Wir setzen nun $r = 1$ und fragen: Wie lang ist der Kreis-Bogen $k$, wenn man $h$ auf das Intervall $[u,1]$, $u \in [0,1]$, einschränkt?

$$\begin{aligned}
k &= \int_u^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x\Big|_u^1 \\
&= -\arccos(1) + \arccos(u) = \arccos(u). \qquad \text{Es folgt } u = \cos(k).
\end{aligned}$$

Weiter gilt: $\quad h(u) = \sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\cos^2(k)} \overset{!}{=} \sin(k)$, da $\sin(k) > 0$.

**Bemerkung.** Das letzte Beispiel bestätigt den in § 20 behaupteten Zusammenhang zwischen Bogenmaß und der in der Schule üblichen Definition der sin- und cos-Funktion mit Winkeln im Einheitskreis.

Genauer, der Punkt $P(k) = (\cos k, \sin k)$ auf dem Einheitskreis gehört wirklich zum Bogen der Länge $k$.

## Rotationskörper

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, die überall größer gleich Null ist. D.h. $\forall x \in [a,b]$ gilt $f(x) \geq 0$. Geometrisch bedeutet das, dass der Graph oberhalb der $x$-Achse verläuft. Nun rotieren wir diesen Graphen einmal ganz um die $x$-Achse. Dann entsteht ein Fläche, die man **Rotationsfläche** nennt. Zusammen mit evtl. entstehenden Kreisflächen bei $a$ und bei $b$ schließen diese Flächen einen geometrischen Körper ein, den man **Rotationskörper** nennt.

Die Kreisflächen entstehen genau dann, wenn $f(a) \neq 0$, oder $f(b) \neq 0$.

**(22.11) Beispiele.** Wir wählen $a = 0$ und $b > 0$.

1.) $f(x) = 1$ führt auf einen Zylinder, der Höhe $b$ mit Radius $1$

2.) $f(x) = x$ führt auf einen Kegel, der Höhe $b$

3.) Ist die Kurve ein Halbkreisbogen, so entsteht eine Kugel.

**(22.12) Definition.** Mit obigen Bezeichnungen nennen wir

$$\begin{aligned} V(f) &:= \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx && \text{das **Volumen** und} \\ M(f) &:= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x)^2)} \, dx && \text{die **Mantelfläche**} \end{aligned}$$

des aus $f$ konstruierten Rotationskörpers. Um die gesamte **Oberfläche** $O(f)$ zu erhalten muss man ggf. noch die Deckflächen $\pi(f(a)^2 + f(b)^2)$ zu $M(f)$ addieren, also

$$O(f) = M(f) + \pi\left(f(a)^2 + f(b)^2\right).$$

Beide Formeln werden in der Vorlesung plausibel gemacht.

**(22.13) Beispiele.** Wir wählen $a = 0$ und $b > 0$.

**Zylinder**, $f(x) = r$ ergibt $V_Z = \pi \int_0^b r^2 \, dx = \pi r^2 b$ und

$$O_Z = 2\pi \int_0^b r\sqrt{1 + 0^2} \, dx + \pi(r^2 + r^2) = 2\pi(rb + r^2).$$

**Kegel**, $f(x) = mx$, $m > 0$, ergibt $V_{Ke} = \pi \int_0^b (mx)^2 \, dx = \frac{\pi}{3} m^2 b^3 = \frac{\pi}{3} r^2 b$, mit $r = mb$ dem Radius der Bodenfläche, und $b$ der Höhe des Kegels.

$$\begin{aligned} O_{Ke} &= 2\pi \int_0^b mx\sqrt{1 + m^2} \, dx + \pi(mb)^2 = \pi\left(m\sqrt{1 + m^2} b^2 + (mb)^2\right) \\ &= \pi\left(r\sqrt{b^2 + (mb)^2} + r^2\right) = \pi\left(r\sqrt{b^2 + r^2} + r^2\right). \end{aligned}$$

Dabei ist $\sqrt{b^2 + r^2}$ die Länge einer Mantellinie des Kegels.

**Kugel**, hier sei $a = -r$, $b = r$ und $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (vgl. dazu (22.10.2)). Dann gilt

$$V_{Ku} = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-r}^{r} \right) = \frac{4\pi}{3} r^3;$$

$$\begin{aligned} O_{Ku} &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} r \, dx = 2\pi r x|_{-r}^{r} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

# Literatur

[AHK+08] Arens, T. ; Hettlich, F. ; Karpfinger, Ch. ; Kockelkorn, U. ; Lichtenegger, K. ; Stachel, H: *Mathematik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008

[Beh09] Behrends, Ehrhard: *Analysis*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009

[For08] Forster, Otto: *Analysis 1*. 8. Aufl. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008

[Heu03] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis*. 15. Aufl. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 2003

[Kön03] Königsberger, Konrad: *Analysis 1*. 6. Aufl. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003

# Index