

## Präsenzaufgaben

### 44. Asymptoten

Eine Gerade  $y = mx + b$  heißt **Asymptote** an den Graphen der Funktion  $f$ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx - b) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

(a) Wenn eine der Gleichungen besteht, dann gilt auch das entsprechende

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} (f(x) - mx - b) = 0. \quad \text{Folgern Sie} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Wie kann man also eine Asymptote an  $f$  finden?

(b) Untersuchen Sie die Funktion  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x - 2}$  auf Asymptoten.

### 45. Wahr oder falsch?

- (a) Das Newton-Verfahren konvergiert immer.
- (b)  $\frac{d}{dx} 5^x = 5^x$ .
- (c) Jede differenzierbare Funktion ist surjektiv.
- (d) Jede bijektive Funktion ist differenzierbar.
- (e)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{17}$  ist surjektiv.
- (f)  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^7 - x^8$  ist surjektiv.

## Hausaufgaben

46. Zeigen Sie  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$  zunächst für  $n \in \mathbb{N}_0$  mit Induktion, dann für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . [8 Punkte]

47. Untersuchen Sie folgenden Funktionen auf Asymptoten [16 Punkte]

$$f(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 7}{4x^2 + 1}, \quad g(x) = \frac{2x - 3}{4x + 5}, \quad h(x) = x(1 - e^{-x}), \quad k(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Skizzieren Sie  $k(x)$  auf dem Intervall  $] \pi, \infty[$ .

**Hinweis:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$

### 48. Näherungsverfahren für Nullstellen

Die Funktion  $f(x) := x^3 - x - \frac{3}{2}$  hat eine Nullstelle im Intervall  $[1, 2]$  (Nachweis!).

- (a) Bestimmen Sie einen Näherungswert dieser Nullstelle mit dem Bisektionsverfahren auf zwei Stellen hinter dem Komma.
- (b) Wieviele Schritte brauchen Sie mit dem Newton-Verfahren um dieselbe Genauigkeit zu erzielen?