

Grundbildung Analysis

Blatt 6

WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

32. Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$.

Wie muss der Satz lauten, wenn man $\sqrt[n]{ab}$ umschreiben will?

33. Bestimmen Sie x mit Hilfe der Definition des Logarithmus (kein Taschenrecher).

$$\log_7(49) = x, \quad \lg(\sqrt[3]{100}) = x, \quad \log_x(4) = \frac{1}{2}, \quad 5^x = 0.04$$

34. Wahr oder falsch?

(a) Die Umkehrabbildung der Funktion $\mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto x^p$ ist

i. $\mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto x^{-p}$; ii. $\mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto x^{\frac{1}{p}}$; iii. $\mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto x^{-\frac{1}{p}}$.

(b) Für alle $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\log_{a^n}(\frac{1}{a}) = -\frac{1}{n}$

(c) Der Graph der Funktion \log_2 entsteht aus dem Graphen der Funktion

(i) $x \mapsto 2^x$ bzw. (ii) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x$ durch Spiegelung

- an der x -Achse;
- an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

(d) Man kann eine Zeitung leicht zehnmal falten und dabei jeweils die Fläche halbieren.

Hausaufgaben

35. Geben seien $x \in \mathbb{R}^{>0}$ und $a, b \in]0, 1[\cup]1, \infty[$.

(a) Zeigen Sie $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

(b) Folgern Sie $\log_a(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

(c) Beweisen Sie die Funktionalgleichung $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(d) Gilt $\log_{0.7}(x^k) = k \cdot \log_{0.7}(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$? Beweis?

bitte wenden!

36. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (b) $(a^x)^y = a^{xy}$ (c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

(d) $a < b \implies \begin{cases} a^x < b^x & \text{falls } x \dots \\ a^x > b^x & \text{falls } x \dots \end{cases}$ Bedingung ergänzen!

37. Für $p \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Potenzfunktion $\mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}; x \mapsto x^p$.

(a) Fertigen Sie Skizzen des Graphen an für die Fälle $p \in \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \pi\}$.

(b) Beweisen Sie (18.12.2) in allen Einzelheiten.

(c) Für welche p kann man die Funktion auf „natürliche Weise“ fortsetzen? D. h. Funktionswerte für Zahlen aus $\mathbb{R}^{\leq 0}$ definieren. (Neuen Definitionsbereich und neue Funktionswerte angeben, keine Begründung gefordert).