Grundbildung Analysis

Blatt 5 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

26. Beweisen Sie mit Induktion: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\exp(k) = e^k$.

27. Zeigen Sie die Abschätzung $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^{>0}$.
Skizzieren Sie alle drei involvierten Funktionen auf dem Intervall $]0, 2[$.

28. Wahr oder falsch?

(a) $\sqrt{9} = \pm 3$

(b) $(-27)^{\frac{2}{6}} = 3$ und $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$

(c) $\sqrt[5]{a+b} = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}$.

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{b^{-1}}$.

Hausaufgaben

29. *Die Exponentialfunktion (theoretisch)*

Notieren Sie, welche Sätze Sie an welcher Stelle benutzt haben.

(a) Zeigen Sie $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$.

(b) Folgern Sie mit Aufgabe 26: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$.

(c) Was ist der Wert von $\exp(\frac{1}{3})$? Beweis? **Hinweis:** $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

bitte wenden!

30. *Die Exponentialfunktion (numerisch)*

Wir schreiben $s_n(x)$ für die n-te Partialsumme von exp, z.B. ist $s_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

(a) Berechnen Sie $s_2(\frac{1}{2})$ und $s_2(-\frac{1}{2})$ händisch als Bruch und überprüfen Sie (18.1.2).

(b) Überprüfen Sie die Funktionalgleichung (18.1.1) an Hand von Zahlen-Beispielen mit einer Tabellenkalkulation (oder einem Taschenrechner).

Anleitung: Wählen Sie $x, y \in \,]-0.5, 0.5[$ und bestimmen Sie Näherungswerte mit Hilfe von s_8.

(c) Zeigen Sie $s_n(x) \leq \exp(x)$ für alle $x \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Visualisieren Sie die Aussagen aus Aufgabe 21 (auch für $x < 0$). Siehe dazu auch (18.1) der Vorlesung.

(e) Visualisieren Sie die Aussage aus (c) für $n \in \{3, 4\}$. Was passiert für $x < 0$?

31. Nutzen Sie wenn möglich die Funktionalgleichung. Notieren Sie, welche Sätze Sie an welcher Stelle benutzt haben. Sei $x \in \mathbb{R}^{>0}$.

(a) Warum gilt $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$?

(b) Beweisen Sie mit Induktion: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$.

(c) Zeigen Sie $\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$.

(d) Folgern Sie: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$.

(e) Was ist der Wert von $\ln(\sqrt[3]{e})$? Beweis?