Grundbildung Analysis

Blatt 4 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

Die **Exponentialfunktion** ist definiert durch die Reihe

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

21. Zeigen Sie für alle $x \geq 0$:

(a) $\exp(0) = 1$

(b) $1 + x \leq \exp(x)$

(c) $\exp(x) > 0$

(d) Falls $x < 1$, dann $\exp(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$

22. Wahr oder falsch?

(a) Die Dezimalentwicklung für 0 ist eindeutig bestimmt.

(b) Die Dezimalentwicklung für π ist eindeutig bestimmt.

(c) Die Dezimalentwicklung für $\sqrt{0.04}$ ist eindeutig bestimmt.

(d) Die Zahl $0,\overline{9}$ ist fast 1, aber nicht ganz.

Hausaufgaben

23. Bestimmen Sie

(a) die Dezimalentwicklungen von $\frac{6}{25}$ und $\frac{3}{14}$.

(b) die Bruchdarstellung (ausgekürzt) von $0.56\overline{231}$.

(c) Leiten Sie aus dem Beweis von Satz (17.19) ein Verfahren ab, mit dem eine periodische Dezimalentwicklung in einen Bruch umgewandelt werden kann.

(d) Geben Sie drei Zahlen an, deren Dezimalentwicklung nicht eindeutig ist.

bitte wenden!

24. Ergänzung zum Beweis von (17.19).

(a) Bestimmen Sie das kleinste $\ell \in \mathbb{N}$ mit $10^\ell \equiv 1 \mod n$ für $n \in \{3, 7, 11, 13\}$.

(b) Welche Konsequenzen hat das jeweils für die Dezimalentwicklung von $\frac{1}{n}$?

(c) Verifizieren Sie die Antwort am Beispiel $\frac{1}{13}$.

25. Betrachte $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{C}$; genauer, die achte Partialsumme $s_8(x) = \sum_{k=0}^{8} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Es sei $x = ti \in \mathbb{C}$ mit $t \in \mathbb{R}$, dann ist $s_8(ti)$ eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie die Zerlegung von $s_8(ti)$ in Real- und Imaginärteil.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners (oder einer Tabellenkalkulation) Näherungswerte $a = s_8(z_1)$ und $b = s_8(z_2)$ für $z_1 = \frac{\pi}{2} i \in \mathbb{C}$ bzw. $z_2 = \frac{\pi}{4} i \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Real- und Imaginärteil von a und b sind in Dezimalentwicklung anzugeben.

(c) Berechnen Sie b^2 und vergleichen Sie mit a.

(d) Was vermuten Sie, ist der Wert von $f(\frac{\pi}{2} i)$?

(e) Bestimmen Sie die Lösungen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = i$ und vergleichen sie die Ergebnisse mit dem Näherungswert für b.