

# Grundbildung Analysis

Blatt 3

WiS 2021/22 — H. Kiechle

## Präsenzaufgaben

15. Bestimme den Grenzwert von (a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^k$  (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3^k}$

16. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3^k}{k!}\right)^2$$

17. Wahr oder falsch?

- (a) Wenn eine Folge zwei der drei Eigenschaften *beschränkt*, *monoton*, *konvergent* besitzt, dann auch die dritte.
- (b) Konvergente Folgen, die in fast allen Folgengliedern übereinstimmen, müssen den gleichen Grenzwert haben.
- (c) Für Folgen  $(a_n), (b_n)$  gilt  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 0 \implies \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow \infty$ .
- (d)  $\lim a_n = 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent.

## Hausaufgaben

18. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{5^{2k+1}}$ , (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ , (c)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$  (mit  $x \in \mathbb{R}$ ).

**bitte wenden!**

**19.** Untersuchen Sie auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls die Grenzwerte (auch uneigentliche) an (mit Beweis).

(a)  $a_n := \frac{n+2}{\sqrt{n}-1}$                        $b_n := \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

(b) 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, ...

Geben Sie zunächst das Bildungsgesetz dieser Folge an.

Was hat diese Folge mit dem periodischen Dezimalbruch  $0.\bar{9}$  zu tun?

**20.** Gegeben sie die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Reihe konvergiert  $\iff \sum_{j=2021}^{\infty} a_j$  konvergiert.

(b) Es gelte  $|a_j| \leq b_j$  mit einer konvergenten Reihe  $\sum b_j$ . Dann ist  $\sum a_j$  absolut konvergent.