Grundbildung Analysis

Blatt 2 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

9. Die Folge (a_n) sei monoton wachsend und beschränkt. Dann besitzt die Menge aller Folgenglieder $\{a_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum s und es gilt $\lim a_n = s$.

10. Zu den Folgen

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}, \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

gehören die Grenzwerte e^{-1}, $\sqrt{e}$, e, e^2, aber welcher Grenzwert zu welcher Folge?

11. Wahr oder falsch?

(a) In jeder Nullfolge kommt die Zahl 0 unendlich oft vor.

(b) In jeder Nullfolge kommt die Zahl 0 wenigstens einmal vor.

(c) Es gibt Folgen mit unendlich vielen Folgengliedern 0, die nicht gegen 0 konvergieren.

(d) Streng monotone fallende Folgen können nicht nach unten beschränkt sein.

(e) Es gibt Folgen, bei denen jede reelle Zahl aus [0,1] als Folgenglied vorkommt.

Hausaufgaben

12. Gegeben seien konvergente Folgen (a_n) und (b_n). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

13. Stellen Sie fest, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert (auch uneigentlich).

(a) $a_n = \dfrac{4n^3+7n^2+(-1)^n}{9n^3+6n+n^2}$

(b) $a_n = \dfrac{5n^5+3n-1}{2n^2-7n^7+4n^5+3n^3}$

(c) $a_n = \dfrac{-8n^3+9n}{6n^2+7n-8}$

(d) $a_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n}$ **Tipp:** Mit $\sqrt{n+3}+\sqrt{n}$ erweitern!

bitte wenden!

14. Testen Sie Ihren Taschenrechner (oder Ihre Tabellenkalkulation)!

(a) Loten Sie aus, bis zu welcher Zehnerpotenz Ihr Taschenrechner (oder Ihre Tabellenkalkulation) die Glieder der Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ korrekt (bis auf Rundung) wiedergibt.

  i. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle.

  ii. Testen Sie auch Zahlen, die keine Zehnerpotenzen sind.

  iii. Versuchen Sie eine Erklärung.

(b) Gegeben sei die Folge $e_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

  i. Berechnen Sie einige Folgenglieder der Folge (e_n).

  ii. Skizzieren Sie die ersten 6 Folgenglieder in ein Koordinatensystem.

  iii. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Werten der Folge (a_n) und formulieren Sie eine — naheliegende — Vermutung.