Grundbildung Analysis

Blatt 13 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

71. Ein Rotations-Paraboloid entsteht, wenn man die Funktion $f : [0, h] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$, $h > 0$, um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie $V(f)$ und $M(f)$.

72. Wahr oder falsch?

(a) Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

(b) Die Flächenfunktion einer stetigen Funktion ist differenzierbar.

Aufgaben (freiwillig, keine Abgabe)

73. Gegeben sei die Funktion $f(x) := x \cdot (\ln x)^2$.

(a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

(b) Für $x > 0$ gilt $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$ und offenbar $f(x) \geq 0$. Was kann man daraus für $\lim_{x\to 0} f(x)$ schließen?

(c) Bestimmen Sie die Fläche unter dem Graphen von f von der y-Achse bis zur Nullstelle.

74. *Gedämpfter harmonischer Oszillator*

Beim harmonischen Oszillator, wie er in der Vorlesung behandelt wurde, blieb die Reibung unberücksichtigt. Bei schwacher Reibung und kleinen Geschwindigkeiten, kann man die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit annehmen. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung und der Proportionalitätskonstante $\delta > 0$ für die Reibungskraft ergibt sich die Differentialgleichung

$$ms''(t) + \delta s'(t) + ks(t) = 0$$

Verifizieren Sie, dass die Funktion

$$s(t) = e^{-\alpha t} \left(A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)\right), \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\delta}{2m} \quad \text{und} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \alpha^2$$

im Fall $\frac{k}{m} > \alpha^2$ („schwache Dämpfung“) für je zwei reelle Zahlen A_1, A_2 eine Lösung ist.

bitte wenden!

75. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\quad f'(x) = \dfrac{3}{x^3+1}.$

76. Gegeben sei die Funktion

$$g :]0,\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie den die Asymptote $h(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Flächen zwischen g und h über den Intervallen $]0,1[$ und $]1,\infty[$.