Grundbildung Analysis

Blatt 1 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

1. Durch $c_0 := 1$ und $c_n := c_{n-1} + \dfrac{1}{2^n}$ ist rekursiv eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert.

(a) Stellen Sie die Folge in Form einer Tabelle dar.

(b) Können Sie die Folge in geschlossener Form angeben?

(c) Konvergiert die Folge?

2. Skizzieren Sie die Folgenglieder der Folge $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Gesucht sind die Grenzwerte von $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3n}\right)$ und $\left(\dfrac{3}{n}\cdot n\right)$.

Zur Folge $\left(\frac{2}{3n}\right)$: Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein passendes $n_0 \in \mathbb{N}$ aus der Definition der Konvergenz! Können Sie alle möglichen n_0 angeben?

3. Wahr oder falsch?

(a) In der Konvergenzdefinition kann $\forall\varepsilon > 0$ durch $\exists\varepsilon > 0$ ersetzt werden.

(b) Wenn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \varepsilon$, ist a kein Grenzwert der Folge (a_n).

(c) Wenn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, ist a ein Grenzwert der Folge (a_n).

(d) Fast alle Hamburger kennen die Definition des Grenzwerts.

Übungsaufgaben

4. Vereinfache soweit möglich und auf möglichst viele verschiedene Weisen

$$\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25} \qquad \sqrt{\frac{25}{49}} \qquad \sqrt[4]{\frac{(a^4+b^4)u^8}{a^4}}$$

5. Schreiben Sie die geometrische Summenformel auf und beweisen Sie sie.

bitte wenden!

Hausaufgaben

6. Zeigen Sie formal ganz präzise, dass für alle $a, x, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

Folgern Sie daraus $U := \{x \in \mathbb{R}\,;\ |x - a| < \varepsilon\} = \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Skizzieren Sie U im Fall $a = 2$ und $\varepsilon = 0.1$.

7. Berechnen Sie für die untenstehenden Folgen einige Werte (mit einer Tabellenkalkulation?), bis Sie eine Vermutung für den Grenzwert haben. Verifizieren Sie Ihre Vermutung mit der Definition. Geben Sie insbesondere je ein (möglichst kleines) n_0 an, das für $\varepsilon = 10^{-3}$ die Aussage der Definition erfüllt.

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^3}, \qquad\qquad b_n = \frac{10n^2 + 1}{5n^2 - 1}.$$

8. In einem alten babylonischen Text findet sich die Aufgabe zu einem Rechteck mit Seitenlängen $a \geq b$ die Seitenlänge w eines flächengleichen Quadrats zu ermitteln. Es wird folgende Methode vorgeschlagen:

Wähle für a_1 den Mittelwert von a und b und bestimme b_1 so, dass $a_1 b_1 = ab$. Wiederhole diese Schritte, bis (fast) ein Quadrat entsteht.

(a) Zeigen Sie, dass $b \leq b_1 \leq a_1 \leq a$ gilt, mit Gleichheit in einer (und dann allen!) Ungleichung nur, wenn $a = b$.

(b) Wiederholt man die Schritte, so entstehen Folgen (a_n) und (b_n). Begründen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fallend, die Folge (b_n) monoton wachsend ist.

(c) Führen Sie das Verfahren (rechnerisch; mit einer Tabellenkalkulation?) durch für

i. $a = 12$ und $b = 3$ ii. $a = 3$ und $b = 2$

(d) Wieviele Schritte brauchen Sie, bis vier Stellen nach dem Komma „richtig“ sind. Welche Werte ergeben sich?