

Grundlagen der Mathematik

Die mündliche Prüfung

WiS 2021/22

Allgemeine Hinweise

Die unten stehende Liste enthält sechs Themen-Blöcke, von denen drei mit einem * gekennzeichnet sind (nachfolgend *-Blöcke genannt).

Eine mündlichen Prüfung beginnt typischerweise mit der Nennung eines Themas aus einem *-Block. Sie können dann selbstständig Ihr Wissen über dieses Thema darlegen, seien Sie aber bitte auf Zwischenfragen vorbereitet. Die weiteren Themen der Prüfung können allen Blöcken entstammen.

Spätestens nach etwa der Hälfte der Zeit wird das Thema gewechselt. Das kann sich organisch durch den Verlauf des Prüfungsgesprächs ergeben, oder durch Intervention der Prüfenden.

Je nach Verlauf der Prüfung sind auch mehrere Themenwechsel möglich.

Der Fragenkatalog

... ist exemplarisch zu verstehen. Natürlich können in der Prüfung Fragen gestellt werden, die nicht oder in anderer Formulierung im Katalog stehen.

Wichtig ist auf jeden Fall, dass Sie zu den Themen Definitionen, wichtige Sätze und Beispiele/Gegenbeispiele nennen können. Besonders bei den Beispielen sollten Sie beachten: *das Wichtige zuerst*.

Sie sollen auch einfache Beweise führen können. Dabei kommt es nicht unbedingt auf eine formal korrekte, detaillierte Ausführung an, wie sie etwa im Skript zu finden ist; sondern: Sie sollen die Beweisidee kommunizieren!

Manchmal können auch Skizzen eine Erklärung unterstützen.

Kriterien bei der Bewertung

- Inhaltlich korrekte und präzise Ausführungen zu den gewählten Themen
- Beherrschung des Formalismus
- Beherrschung der Beweisführung
- Fähigkeit zum Transfer

1 Mengen und Aussagen

- Was sind Mengen
- Welche Verknüpfungen für Mengen gibt es?
- Welche Rechenregeln gelten dabei? (einige Regeln nennen)
- für Aussagen
- Lesen Sie vor: $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$
- Ist dies eine wahre Aussage? (ggf. Hilfe: Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf)
- Was bedeutet diese Aussage? (Kontraposition)
- Lesen Sie vor: $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$
- Ist dies eine wahre Aussage? (ggf. Hilfe: Stellen Sie eine Wahrheitstafel auf)
- Wie lautet eine zu der Aussage $\neg(A \implies B)$ äquivalente Aussage, die oft in Widerspruchsbeweisen verwendet wird?
- Was ist eine Aussageform?
- Was ist eine Allaussage, eine Existenzaussage? Was ist ihre Negation? Erläutern Sie dies an einem Beispiel.
- Wie kann man Mengen aufschreiben? (aufzählend / mit Aussageform)
- Was ist die Potenzmenge einer Menge? Was ist $\text{Pot}(\emptyset)$?
- Erläutern Sie die Analogie zwischen Aussagen und Mengen. Welche Gründe gibt es dafür?
- Relationen (nur Def. als Aussageform, Grundbegriffe; Details unter § 6)

2 Die reellen Zahlen

- Axiome — Zsh. zu Halbgruppen, Gruppen
- Folgerungen aus den Ring-Axiomen: $a0 = 0$, $(-a)b = -ab$, u.ä.
- Daraus „minus mal minus gibt plus“
- Beweis: Binomische Formeln (nur quadratisch)
- Quadratische Ergänzung, Beweis der Lösungsformel für quad. Gleichungen
- Anordnung — Absolutbetrag

- Eigenschaften; Beweise
- Bestimmen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$
- Begründen Sie die Identität $|a - b| = |b - a|$; was bedeuten diese Ausdrücke anschaulich?
- Supremum, Infimum, Maximum, Minimum: Definition, Eindeutigkeit, Unterschiede, Bsp.
- $\inf \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$ bestimmen, mit Beweis
- Vollständigkeit
- Beweis: \mathbb{N} ist nicht beschränkt
- Wie ist die Quadratwurzel definiert?
- Für welche reellen Zahlen existieren sie?
- Ist sie eindeutig? Warum?

3 * Abbildungen

Grundbegriffe

- Was ist eine Abbildung?
- Skizze in \mathbb{R}^2 : Ist das eine Abbildung? Begründung?
- Skizze Pfeildiagramm: Ist dies eine Abbildung? Begründung?
- Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2 + 2x$ definiert.
Bestimmen Sie $f(-1)$ und $f(a - 1)$ (wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig sei). Auch Skizze, ...
- Setzen Sie $x + h$ in $f(x) = x^2 - x$ ein und vereinfachen Sie.
- Lesen Sie vor: $\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$.
Was bedeutet diese Aussage für $f : A \rightarrow B$?
- Formulieren Sie die Definition des Begriffs „injektiv“.
- Formulieren Sie die Kontraposition dieser Definition
- Definieren Sie surjektiv.
- Beispiele und Visualisierung mit reellen Funktionen
- Geben Sie ein Beispiel einer injektiven, nicht surjektiven Abbildung! (z.B. Pfeildiagramm; Graph einer reellen Funktion)

- Geben Sie ein Beispiel einer surjektiven, nicht injektiven Abbildung! (z.B. Pfeildiagramm; Graph einer reellen Funktion)
- Was ist der Unterschied zwischen nicht injektiv und surjektiv?
- Definieren Sie $\vec{f}(M)$ für eine Abbildung $f : A \rightarrow B$; $M \subseteq B$
- Beweis $\vec{f}(\vec{f}(M)) \subseteq M$

Verkettung, Umkehrbarkeit

- Definieren Sie $f \circ g$! — Verkettung — Komposition
- Warum ist dies eine Abbildung?
- Beispiele
- Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2 + 2x$ und $g(x) := (x - 1)^{-1}$ definiert. Bestimmen Sie $f \circ g(-1)$.
- Ist die Verkettung kommutativ? mit Begründung
- Was ist die Identität? Wie ist ihr Verhalten bei Verkettung?
- Was ist die Umkehrfunktion (inverse Abb.) einer Abbildung? Wann existiert sie?
- Verhalten bei Verkettung
- Assoziativität der Verkettung mit Beweis
- Beweis bijektiv \iff es ex. Umkehrabbildung

Kardinalität und Abzählbarkeit

- Definition „gleichmächtig“
- Beispiele für gleichmächtige — ungleichmächtige Mengen
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$ mit Beweis
- Definition endlich, abzählbar unendlich, überabzählbar unendlich; Beispiele nennen
- A, B endlich; wann existieren injektive / surjektive Abb. $A \rightarrow B$? Beweisidee (z.B. Pfeildiagramm)
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ mit Beweis
- Erläuterungen zum Beweis \mathbb{Q} ist abzählbar und \mathbb{R} ist überabzählbar.
- Was können Sie über die Mächtigkeit $|\mathbb{N}^2|$ sagen?
- (Vgl. Potenzmenge — Ausgangsmenge)

4 * Natürliche Zahlen

Grundbegriffe

- Peano Axiome: Erwartung:
Es existiert eine Menge \mathbb{N}_0 , ein Element $0 \in \mathbb{N}_0$ und eine Abb. ν mit ...
- Anschauliche Erläuterungen zur Abbildung ν und den Axiomen
- Eigenschaften von $+$, \cdot und $<$
- Definition von $+$ und $<$
- Beweis der Eigenschaften von $+$; wie? — Methode: Induktion!
- Beweis einer der Eigenschaften von $+$ (z.B. Assoz.).
- Beweis $a + b = 0 \implies a = 0 \wedge b = 0$
- Definition von „ \cdot “ als *Potenzen* bzgl. $+$
- Herleitung der Eigenschaften von „ \cdot “ aus den Potenzrechengesetzen.
- Definition von $n - m$ in \mathbb{N} (wann definiert? wie?)
- Beweis der Transitivität von $<$
- $a \cdot b = 0 \implies ???$; Beweis (Tipp: Kontraposition)
- Ist die Verknüpfung $(a, b) \mapsto a^b$ kommutativ/assoziativ auf \mathbb{N} ? (Was heißt das überhaupt?)
- Geben Sie ein Beispiel für eine Abbildung ν auf \mathbb{N}_0 an, die ein Peanoaxiom nicht erfüllt (z.B. das Induktionsaxiom — evtl. nur Skizze der Bahn)

Halbgruppen — Gruppen — Potenzen

- Potenzen und Gesetze — Zsh. mit „ \cdot “
- Beweis: $a^{n+m} = a^n * a^m$ (anschaulich, oder mit Induktion)
- analog: Beweis: $(a * b)^n = a^n * b^n$ (muss kommutativ sein!)
- dasselbe für Gruppen
- Beweis eines Potenzrechengesetzes — Bedeutung für „ \cdot “; für „ $+$ “
- Beweis: Eindeutigkeit des neutralen Elements
- Beweis: Eindeutigkeit des inversen Elements
- Beispiele für (Halb-)Gruppe, evtl. Verknüpfungstafel
- Untersuchung von $(\text{Pot}(\mathbb{N}), \cap)$ oder $(\text{Pot}(\mathbb{N}), \cup)$

Induktion

- Bsp. Induktionsbeweis für $1 + 2 + \dots + n = \dots$
- Zusammenhang Induktionsaxiom — Induktionsbeweis
- Beweis $n < 2^n$
- Beweis $7|8^n - 1$, u.ä.
- Beweis der geometrischen Summenformel
- Beweis der Bernoullischen Ungleichung

Stellenwertsysteme

- Division mit Rest
- Beweis
- g -adische Darstellung — was ist das?
- Beweis Existenz (mit Algorithmus)
- Beweis Eindeutigkeit
- $(12)_3 \cdot (20)_3$ wie?
- Warum ?

5 Die ganzen Zahlen

- Definieren Sie die Menge \mathbb{Z} .
- Wie wird $+$ auf \mathbb{Z} definiert?
- Eigenschaften von $+$, \cdot und $<$
- Welche Schwierigkeiten treten beim Beweis der Eigenschaften auf? ... viele Fallunterscheidungen
- Wie ist $a < b$ definiert ?
- Beweisen Sie dass $<$ transitiv ist.
- Beweisen Sie die Trichotomie
- Wie wird „ \cdot “ auf \mathbb{Z} definiert?
- Zusammenhang Eigenschaften von „ \cdot “ und Potenzrechengesetze für Gruppen

- Zeigen Sie, dass in \mathbb{Z} jede Gleichung der Form $a + x = b$ in der Unbekannten x eindeutig lösbar ist. Wie verhält sich das in \mathbb{N} ? Woran liegt das?
- Gruppen, Potenzen und Gesetze, Zsh. mit „.“
- Beweis eines Potenzrechengesetzes(??) — Bedeutung für „.“

Ringe

- Eigenschaften eines Ringes; evtl. am Bsp. \mathbb{Z} , oder \mathbb{Z}_m .
- Welche Elemente aus \mathbb{Z} sind bezüglich Addition/Multiplikation invertierbar?
- $a \cdot b = 0 \implies ???$ — Antwort: $a = 0 \vee b = 0$
- Untersuchung von $(\text{Pot}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$
- Folgerungen aus den Ring-Axiomen, z.B.: $a0 = 0$, $(-a)b = -ab$, u.ä.
- Daraus „minus mal minus gibt plus“
- Beweis: Binomische Formeln (nur quadratisch)

6 * Elementare Zahlentheorie

- Definition „teilt“
- Wahr oder falsch? $7|(-14)$, $(-6)|3$, $0|7$, $7|0$
- einfache Eigenschaften von „teilt“ formulieren; z.B. $a|b \wedge a|c \implies a|(ub + vc)$
- einfache Eigenschaften von „teilt“ beweisen; z.B. transitiv; $a|b \wedge b|c \implies a|c$
- Definition „ $\equiv \pmod{m}$ “, wichtige Eigenschaften
- Beweise dazu
- Äquivalenzrelation, Klassenbildung, evtl. am Bsp.
- Definition „Primzahl“
- Wie viele Primzahlen gibt es?
- Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen
- Warum ist für jede natürliche Zahl ≥ 2 der kleinste Teiler > 1 eine Primzahl?
- Warum besitzt jede natürliche Zahl ≥ 2 einen Primteiler?
- Hauptsatz der Arithmetik (Primfaktorzerlegung: PFZ) formulieren

- Beweis der Existenz andeuten
- Bestimmen Sie die PFZ von 360. Welche Form haben die Teiler dieser Zahl?
- Allgemeiner: Welche Form haben die Teiler von $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$, p_i Primzahlen, $a_i \in \mathbb{N}_0$) — und für Expert:innen: Wie viele Teiler gibt es also?
- Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} : 3|10^n - 1$
- Bestimmen Sie, sofern möglich, folgende Ausdrücke:
 $\text{ggT}(24, 18)$, $\text{ggT}(24, 0)$, $\text{ggT}(0, 0)$, $\text{ggT}(12, 9, 18)$; $\text{kgV}(14, 21)$, $\text{kgV}(0, 0)$.
- Definieren Sie ggT — kgV
- Wie kann man $\text{ggT}(a, b)$ bestimmen.
- Beweis $a = qb + r \implies \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$ — Zsh. mit Euklidischem Algorithmus
- Darstellung des ggT als Linearkombination — Zsh. mit Euklidischem Algorithmus
- Beweis $t|a \wedge t|b \implies t|\text{ggT}(a, b)$ (aus Linearkombination)
- p prim $\implies \mathbb{Z}_p$ ist ein Körper