Grundlagen der Mathematik

Blatt 9 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

49. Ergänze folgenden Lückentext zur vollständigen Induktion:

Behauptung : $1+3+5+\cdots+(2n-1) \;=\; n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis : I. _______________: Die Behauptung ist richtig für $n =$___ , da ______ gilt.

II.______________________: Wir nehmen für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ an, dass

____

III. Induktionsschluss: Wir zeigen $1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) =$________.

Es gilt ____$+2n+1 =$

__________, was zu zeigen war.

50. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k := 1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$.

51. Wahr oder falsch?

(a) $\sum_{j=1}^{4} j = 11$ (b) $\sum_{k=1}^{l} k = \sum_{l=1}^{k} l$ (c) $\sum_{\ell=1}^{7} 5 = 35$

Hausaufgaben

Vollständige Induktion darf auf diesem Blatt nicht in Kurzform ausgeführt werden.

52. Beweisen Sie drei der folgenden vier Aussagen mit Induktion. [24 Punkte]

(a) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad 3|(n^3-n)$.

(c) Gegeben sei $h \in \mathbb{R}$, mit $h \geq -1$, dann gilt $(1+h)^n \geq 1+nh$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
An welcher Stelle verwenden Sie die Voraussetzung $h \geq -1$?

(d) Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, dann gilt $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

bitte wenden!

53. $\heartsuit$ Beweisen Sie für alle $a, m \in \mathbb{N}_0$.

(a) $1 + m = m + 1$.

Hinweis: $(\star)$ $\nu(a) = a + 1$ aus der Vorlesung wurde schon bewiesen!

(b) $a + m = 0 \implies a = 0 \wedge m = 0$.

Aufgaben, die mit $\heartsuit$ gekennzeichnet sind, dürfen nur mit Hilfe der Peano-Axiome und daraus schon abgeleiteter Aussagen bewiesen werden. Jeder Beweisschritt ist durch ein geeignetes Zitat zu belegen.