Grundlagen der Mathematik

Blatt 7 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

39. Gegeben seien die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \qquad \text{und} \quad h(x) = 3x - 6$$

Bestimmen Sie $h \circ g$, $g \circ h$, h^{-1} und g^{-1}.

Skizzieren Sie die beiden Funktionen g und g^{-1} in ein Koordinatensystem.

40. Wahr oder falsch?

(a) Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es
- eine injektive Abbildung $A \to B$;
- eine surjektive Abbildung $A \to B$;
- eine bijektive Abbildung $A \to B$.

(b) Für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, ist $h \circ h = h$.

(c) Bei einer Bijektion $f : A \to B$ ist $f^{-1}(u)$ das einzige Element von $\overleftarrow{f}(\{u\})$ $(u \in B)$.

(d) Es gibt eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mit $1, 2, 3 \notin \vec{f}(\mathbb{N})$.

(e) Wenn es zu der Abbildung $f : A \to B$ eine Abbildung $g : B \to A$ gibt mit
- $g \circ f = \mathrm{id}_A$, dann ist f injektiv;
- $f \circ g = \mathrm{id}_B$, dann ist f surjektiv.

Hausaufgaben

41. Gegeben seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f(x) := x(x-1)(x-3), \; g(x) := \begin{cases} x-1 & \text{falls } x < 0 \\ x+1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}, \; h(x) := \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x < 0 \\ -x-3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen und untersuchen Sie mit deren Hilfe, welche dieser Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind.

(b) Führen Sie für je ein Beispiel den Beweis, dass die gewählte Funktion *nicht* injektiv bzw. *nicht* surjektiv ist.

bitte wenden!

42. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) := 2x - 6 \quad \text{und} \quad g(x) := \begin{cases} x+2 & \text{falls } x < 1 \\ 3x & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} .$$

Gesucht sind die zugehörigen Umkehrfunktionen sowie $f \circ f$ und $g \circ g$.

Für eine Zeichnung des Graphen von $g \circ g$ gibt es zwei Extrapunkte!

43. Es seien die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Zeigen Sie

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

(d) Sind f und g bijektiv, so gilt für die Umkehrabbildung $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Zur Evaluation der Lehrveranstaltung können Sie den QR-Code nutzen (oder einen Link auf der Web-Seite)