Grundlagen der Mathematik

Blatt 4 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

21. Bestimmen Sie mit *quadratischer Ergänzung* die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x - 5 = 0$. Leiten Sie daraus eine Produktdarstellung des Polynoms $x^2 - 4x - 5$ ab und begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen als die gefundenen geben kann.

22. Bestimmen Sie folgende Menge in Intervall-Schreibweise $M := \left\{ x \in \mathbb{R}\,;\ \dfrac{1}{x-2} \leq x - \dfrac{1}{2} \right\}$

23. Wahr oder falsch?

(a) „$=$“ ist transitiv.

(b) $a \cdot b \cdot c < 0 \implies (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) < 0$.

(c) $x^2 + y^2 \leq 0 \iff xy = 0$

(d) Die Inverse von 0 ist ∞.

(e) Die „Mitternachtsformel“ muss man auswendig wissen.

Hausaufgaben

24. Gegeben sei der Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Beweisen Sie in allen Details und mit genauen Referenzen auf die Axiome bzw. Sätze aus der Vorlesung.

(a) Die drei binomischen Formeln. Hier sind die Sätze zunächst zu formulieren.

(b) $\forall a, b \in \mathbb{K} : ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$.

(c) $\forall a, b \in \mathbb{K} : a^2 = b^2 \implies a = b \vee a = -b$.

Hinweis: Die Sätze aus (a) und (b) dürfen verwendet werden.

(d) Die Gleichung $x^2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{K}$, besitzt höchstens zwei Lösungen.

bitte wenden!

25. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, setzen wir $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ $[= b^{-1}a]$. Das macht Sinn, weil „$\cdot$" kommutativ ist! Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{\dots}{\dots}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{\dots}{\dots}.$$

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ soweit wie möglich (mit Beweis).

(c) In welchem Sinn ist der Ausdruck $\frac{a}{b}$ eine Äquivalenzklasse?

Wie sieht die zugehörige Äquivalenzrelation aus?

Hinweis: Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ wird durch das Zahlenpaar (a, b) beschrieben. Die Relation muss also für solche Paare definiert werden.

26. Leiten Sie die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ her. Sie wird auch p-q-Formel oder „Mitternachtsformel" genannt.

Hinweis: Quadratische Ergänzung!

Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Gleichung in Abhängigkeit von den Koeffizienten p, q.