Grundlagen der Mathematik

Blatt 3 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

15. Wir untersuchen die Relation „$\equiv \mod 7$“ auf $\mathbb{Z}$ aus der Vorlesung.

(a) Bestimmen Sie für alle $a \in \{-1, 0, 1, 2, 6, 7, 8\}$ die Mengen $K_a := \{x \in \mathbb{Z}\,;\ a \equiv x \mod 7\}$.

(b) Wie viele verschiedene Mengen K_a gibt es?

(c) Bestimmen Sie zu $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jeweils ein Element $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \mod 7$.

16. Beweisen Sie, dass die Relation „$\equiv \mod m$“ auf $\mathbb{Z}$ transitiv ist.

17. Wahr oder falsch?

(a) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

(b) Für $M = \mathrm{Pot}\{1, 2, 3\}$ gilt $1 \in M,\ 1 \subseteq M,\ \{1\} \in M,\ \{1\} \subseteq M$.

(c) „$\subseteq$“ ist eine Relation auf $\mathrm{Pot}\, M$.

(d) Die Relation „$\leq$“ ist symmetrisch.

(e) Die Relation „$\perp$“ ist transitiv.

Hausaufgaben

18. Beweisen Sie für $m \in \mathbb{N}$

(a) Die Relation „$\equiv \mod m$“ auf $\mathbb{Z}$ ist reflexiv und symmetrisch.

(b) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:
Aus $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$ folgt $a + c \equiv b + d \mod m$.

(c) Es seien $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$. Überlegen Sie warum $\overline{a} +_m \overline{b} := \overline{a + b}$ eine sinnvolle Definition ist.
Wo liegt überhaupt das Problem?

bitte wenden!

19. Wir betrachten den Quotientenraum $\mathbb{Z}_{11}$.

(a) Gegeben seien die Äquivalenzklassen $\overline{3}$ und $\overline{8}$ der Zahlen 3 bzw. 8 bezüglich der Äquivalenz-Relation „$\equiv \mod 11$“, sowie $a \in \overline{3}$ und $b \in \overline{8}$. Können Sie eine Vorhersage machen, in welchen Äquivalenzklassen die Ausdrücke

$$a+b, \quad a-b, \quad a \cdot b, \quad b^2, \quad a \cdot b - a, \quad a(b-1)$$

liegen? Hängt das von der speziellen Wahl der a, b ab? Was hat das mit (1.28.4) zu tun?

(b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente aus der Menge $R = \{0, 1, \dots, 10\}$. D.h. für alle $a \in R$ ist ein $b \in \mathbb{Z}$ gesucht mit $a \cdot b \equiv 1 \mod 11$.

20. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt (mit Beweis!) und vereinfachen Sie die Negation der Aussagen soweit möglich.

(a) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^3 = -27 \wedge x < 0$

(b) $\forall\, x \in \mathbb{Z} : x + 3 \in \mathbb{N} \implies x \geq -2$

(c) $\forall\, z \in \mathbb{Z} \, : \, z^2 \geq 25 \iff z \geq 5$