Grundlagen der Mathematik

Blatt 12 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt **Primzahl**, wenn n nur die *trivialen* Teiler $1, -1, n$ und $-n$ besitzt.

66. Notieren Sie die kleinsten 10 Primzahlen.

Welche der folgende Zahlen sind Primzahlen? $1,\ \pi,\ 101,\ 2^7 - 1,\ 2^8 + 1,\ 2021,\ 10^{20} - 1$

67. Für $u, v, n \in \mathbb{N}$ gelte $u \cdot v = n$. Zeigen Sie, dass $u \leq \sqrt{n}$ oder $v \leq \sqrt{n}$.

Folgern Sie, dass jede natürliche Zahl > 1, die keine Primzahl ist, einen Teiler t besitzt, mit $2 \leq t \leq \sqrt{n}$.

68. Es sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ und $t \geq 2$ der kleinste Teiler von a.

Beweisen Sie, dass t existiert und eine Primzahl ist.

69. * Es sei u keine Primzahl. Zeigen Sie, dass dann $2^u - 1$ keine Primzahl sein kann.

Hausaufgaben

70. ♡ Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie für alle $g \in G$

(a) g besitzt höchstens ein inverses Element.

(b) Für alle $k \in \mathbb{Z}$: $(g^k)^{-1} = g^{-k}$.

(c) Für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$: $(g^k)^\ell = g^{k\ell}$.

(d) Die Menge $\langle g \rangle := \{g^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Untergruppe von G.

(e) Ist $\langle g \rangle$ kommutativ? (2 Zusatzpunkte für Beweis/Gegenbeispiel)

bitte wenden!

71. Wir betrachten die „Uhr-Gruppe“ $U = \{0, 1, \ldots, 11\}$ mit folgender Verknüpfung: Für $a, b \in U$ sei $a \oplus b$ die Stunde, die sich ergibt, wenn man auf der Uhr von der Stunde a um b Stunden weiter geht; Beispiele: $9 \oplus 7 = 4$, $8 \oplus 4 = 0$ (nicht 12).

(a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für $(U, \oplus)$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass $(U, \oplus)$ eine Gruppe ist.

Hinweis: Das Assoziativgesetz soll nur exemplarisch für einige Werte überprüft werden.

(c) Ist $(U, \oplus)$ kommutativ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(d) Zeigen Sie $U = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle$. Für $\langle\, . \,\rangle$ vgl. Aufgabe 70(d).

(e) Kennen Sie eine andere Beschreibung für diese Gruppe (eine „isomorphe“ Gruppe)?

72. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ und die Menge $L := \{ax + by\,;\ x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $|a| \in L$, also $L \neq \varnothing$. Nach (4.15) existiert also $d := \min L$.

(b) Benutzen Sie eine Tabellenkalkulation um d im Fall $a = 182$ und $b = 286$ zu bestimmen.

Zeigen Sie

(c) $d|a$ und $d|b$. Man sagt „d ist ein **gemeinsamer Teiler** von a und b“.

Anleitung: Division mit Rest: $a = qd + r$. Falls $r \neq 0$, dann $r \in L$ ...

(d) Für alle gemeinsamen Teiler t von a und b gilt $t|d$.

(e) d ist der **größte gemeinsame Teiler** von a und b.