

Grundlagen der Mathematik

Blatt 11

WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

60. Rechnen im Dezimalsystem

- (a) Schreiben Sie die Zahlen 989 und 2112 als Summe mit Zehnerpotenzen aus.
- (b) Addieren Sie die beiden Zahlen schriftlich und begründen Sie warum dabei das richtige Ergebnis herauskommt.
- (c) Verfahren Sie analog mit den Produkten $123 \cdot 6$ und $123 \cdot 26$.

Die Zahl $a \in \mathbb{N}$ sei im Dezimalsystem dargestellt:

$$a = \sum_{i=0}^n z_i \cdot 10^i \quad \text{wobei die } z_i \in \{0, \dots, 9\} \text{ die „Ziffern“ sind.}$$

61. Zeigen Sie

- (a) $2|a \iff 2|z_0$
- (b) $5|a \iff 5|z_0$
- (c) $4|a \iff 4|(z_1 \cdot 10 + z_0)$

62. Wahr oder falsch?

- (a) $3|a \iff 3|\sum_{i=0}^n z_i$
- (b) $11|a \iff 11|\sum_{i=0}^n z_i$

Hausaufgaben

63. ♡ Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie (vgl. (4.28) und (4.29))

- (a) $a \cdot b = 0 \implies a = 0$ oder $b = 0$.
- (b) Aus $a \leq b$ folgt $ac \leq bc$.
- (c) Aus $a < b$ und $c \neq 0$ folgt $ac < bc$.
- (d) Aus $ac = bc$ und $c \neq 0$ folgt $a = b$.

bitte wenden!

64. *g-adische Arithmetik*

- (a) Schreibe die Dezimalzahl 2021 im Dual- und im 17-System.
- (b) Berechnen Sie ohne Rückgriff auf das Dezimalsystem $(257)_8 + (12)_8$ und $(257)_8 \cdot (12)_8$.
- (c) Für welches g gilt $(576)_g + (331)_g = (1127)_g$
- (d) Beweisen Sie die Eindeutigkeit der g -adischen Darstellung einer natürlichen Zahl.
Vgl. dazu (5.2); dort wurde der Beweis schon angefangen.

65. Wir untersuchen $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Nach Vorlesung sind $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ und (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) kommutative Halbgruppen mit neutralen Elementen $\bar{0}$ bzw. $\bar{1}$.

- (a) Jedes Element in $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ besitzt ein additives Inverses.
- (b) Es gilt das Distributivgesetz.
- (c) Studieren Sie die Körperaxiome aus Kapitel 2 und untersuchen Sie welche dieser Axiome für $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ gelten, und welches evtl. *nicht*.
Das eine(!) Axiom, das evtl. nicht gilt, sei hier $(*)$ genannt.
- (d) Zitieren Sie aus früheren Aufgaben: In den Fällen $m = 7$ und $m = 11$ gilt Axiom $(*)$.
- (e) Zeigen Sie, dass Axiom $(*)$ im Fall $m = 6$ nicht gilt.