

Übungen zur Codierungstheorie

Blatt 7

SoS 2023 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

Fortsetzung von Aufgabe 21

25. Wahr oder falsch?
- (a) Der $(7, 4)$ -Hamming-Code ist perfekt.
 - (b) Der $(8, 4)$ -Bauer-Code ist perfekt.
 - (c) Der $(7, 4)$ -Hamming-Code ist ein MDS-Code.
 - (d) Der $(8, 4)$ -Bauer-Code ist ein MDS-Code.
 - (e) Jeder Paritätskontroll-Code ist ein MDS-Code.

Hausaufgaben

26. Es sei $\gamma : \mathbb{Z}_q^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ die Gewichtsfunktion auf \mathbb{Z}_q^n . Zeigen Sie für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_q^n$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$:
- (a) $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma(x_1) + \dots + \gamma(x_n)$. (γ bezeichnet auch das Gewicht auf \mathbb{Z}_q .)
 - (b) γ erfüllt die Eigenschaften einer (verallgemeinerten) Norm:
 - (1) $\gamma(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
 - (2) $\gamma(\alpha\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})$;
 - (3) $\gamma(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \gamma(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{y})$.
 - (c) $\gamma(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{y}) \leq \gamma(\mathbf{x} + \mathbf{y})$.
 - (d) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.
 - (e) $q = 2$: Wenn $\gamma(\mathbf{x})$ und $\gamma(\mathbf{y})$ beide gerade oder beide ungerade sind, dann ist $\gamma(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ gerade; andernfalls ungerade.
27. Sei $C \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ ein linearer (n, k) -Code, und es sei C' die Teilmenge der Codewörter von geradem Gewicht, also $C' = \{\mathbf{x} \in C; \gamma(\mathbf{x}) \text{ ist gerade}\}$.
- (a) C' ist ein Untervektorraum von C und damit von \mathbb{Z}_2^n .
Nun gelte $C \neq C'$.
 - (b) $|C| = 2 \cdot |C'|$.
 - (c) C' ist ein $(n, k - 1)$ -Code.
 - (d) Es gilt
$$\begin{cases} d(C') > d(C) & \text{falls } d(C) \text{ ungerade} \\ d(C') = d(C) & \text{falls } d(C) \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bemerkung: Im Fall $C = \mathbb{Z}_2^n$ ist C' der binäre Paritätskontroll-Code der Länge n .