Übungen zur Codierungstheorie

Blatt 5 SoS 2023 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

17. Es seien $n, k, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Eine injektive Abbildung $\Gamma : \mathbb{Z}_q^k \to \mathbb{Z}_q^n$ heißt **Codierung**. Das Bild $\mathcal{C} = \vec{\Gamma}(\mathbb{Z}_q^k)$ heißt (n,k)-Code. Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_q^n$ bildet, und dass $\gamma_{\min}(\mathcal{C}) = d(\mathcal{C}) \geq 2$.

Bei der „Punktierung" wird eine (meist die letzte) Komponent eines jeden Codeworts weggelassen. So einsteht ein $(n-1,k)$-Code $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{Z}_q^{n-1}$.

(a) Bestimmen Sie $|\mathcal{C}'|$ im Vergleich zu $|\mathcal{C}|$.

(b) $\mathcal{C}'$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_q^{n-1}$.

(c) Bestimmen Sie den Minimalabstand von $\mathcal{C}'$ in Abhängigkeit von $d(\mathcal{C})$.

18. Wahr oder falsch?

(a) Jeder Code C ist $\left\lfloor \dfrac{d(C)-1}{2} \right\rfloor$-fehlerkorrigierend.

(b) Damit eine Code t-fehlererkennend ist, müssen die Hamming-Kugeln um Codewörter mit Radius t disjunkt sein.

(c) Damit eine Code t-fehlerkorrigierend ist, müssen die Hamming-Kugeln um Codewörter mit Radius t disjunkt sein.

Hausaufgaben

19. *F.-L.-Bauer-Codes* [16 Punkte]

Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$. Zu $x \in \mathbb{Z}_2^k$ definieren wir das **komplementäre** Wort x^* durch austauschen von 0 gegen 1 und umgekehrt; z.B. $(1001)^* = 0110$.

Wir betrachten die Codierung

$$\Gamma : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2^{2k};\ x \mapsto \begin{cases} xx & \text{wenn } \gamma(x) \text{ gerade} \\ xx^* & \text{wenn } \gamma(x) \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\mathcal{B} := \vec{\Gamma}(\mathbb{Z}_2^k)$ heißt $(2k,k)$-Bauer-Code.

(a) Was ist die Informationsrate von $\mathcal{B}$?

(b) Es sei $x \in \mathbb{Z}_2^k$. Was ist $x + x^*$? Wie hängen $\gamma(x)$ und $\gamma(x^*)$ zusammen?

(c) Was kann man über das Gewicht der Codewörter aussagen? Unterscheiden Sie die Fälle aus der Definition von Γ.

(d) Für $x, y \in \mathbb{Z}_2^k$ gilt $d(x,y) = d(x^*, y^*)$.

(e) Für $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}_2^k$ sind $xx', yy' \in \mathbb{Z}_2^{2k}$. Zeigen Sie $d(xx', yy') = d(x,y) + d(x',y')$.

(f) Zeigen Sie: $d(\mathcal{B}) = 4$.

20. Zeigen Sie: Durch Punktierung an der letzten Stelle entsteht aus dem $(8,4)$-Bauer-Codes der $(7,4)$-Hamming-Code. [8 Punkte]