Übungen zur Codierungstheorie

Blatt 4 SoS 2023 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

14. *Der Hamming-Code*

Wir definieren eine Abbildung (genannt *Codierung*).

$$\Gamma : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^7;\ x_1x_2x_3x_4 \mapsto x_1x_2x_3x_4y_1y_2y_3$$

mit $y_1 := x_2 + x_3 + x_4, y_2 := x_1 + x_3 + x_4$, und $y_3 := x_1 + x_2 + x_4$, und nennen $\mathcal{H} := \vec{\Gamma}(\mathbb{Z}_2^4) = \mathrm{Bild}(\Gamma)$ den $(7,4)$-Hamming-Code.

(a) Beschreiben Sie $\mathcal{H}$ ohne Rückgriff auf Γ als Teilmenge von $\mathbb{Z}_2^7$.

(b) Visualisieren Sie $\mathcal{H}$ am Würfel: Der Nullpunkt bleibt ausgespart, die Koordinatenachsen werden mit y_1, y_2, y_3 belegt. Nun sollen die übrigen Ecken so mit x_1, x_2, x_3, x_4 belegt werden, dass die Summen der Einträge auf den Würfelseiten, die den Nullpunkt nicht enthalten, jeweils Null ergeben.

(c) Codieren Sie das Wort 1010.

(d) Decodieren Sie die Wörter 1010111, 1010110, 1010010, unter der Annahme, dass höchstens ein Fehler aufgetreten ist.

(e) Zeigen Sie direkt, dass $\mathcal{H}$ 1-fehlerkorrigierend ist.

Hausaufgaben

15. Wir benutzen die Bezeichnungen aus Aufgabe 14.

(a) Zeigen Sie, dass Γ eine injektive, lineare Abbildung ist. Geben Sie insbesondere die darstellende Matrix an.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_2^7$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass das Minimalgewicht $\gamma_{\min}\mathcal{H} = 3$ ist.

(d) Folgern Sie, dass $\mathcal{H}$ 1-fehlerkorrigierend ist.

16. Gegeben sei ein genau 1-fehlerkorrigierender Code $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$. Zeigen Sie

(a) Für alle $c \in \mathcal{C}$ gilt $|K_1(c)| = n + 1$.

(b) $|\mathcal{C}| \cdot (n+1) \leq 2^n$.

(c) $\bigcup_{c\in\mathcal{C}} K_1(c) = \mathbb{Z}_2^n \iff |\mathcal{C}| \cdot (n+1) = 2^n$.

(d) Folgern Sie, dass es im Fall (c) ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, mit $|\mathcal{C}| = 2^k$ und $n + 1 = 2^{n-k}$.

(e) Untersuchen Sie die Situation beim $(7,4)$-Hamming-Code aus Aufgabe 14. Welche Konsequenzen hat das für den Decodierer.

bitte wenden!

Eine ergänzte Liste mit

Literatur

[1] A. Beutelspacher & U. Rosenbaum, *Projektive Geometrie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden 1992.

[2] A. Beutelspacher & M.-A. Zschiegner, *Diskrete Mathematik für Einsteiger*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011.

[3] W. Heise & P. Quattrocchi, *Informations- und Codierungstheorie*, 2. aufl ed. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1989.

[4] S. Ling & C. Xing, *Coding Theory: A First Course*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 2004.

[5] R.-H. Schulz, *Codierungstheorie: Eine Einführung*. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden 2003.