Übungen zur Codierungstheorie

Blatt 10 SoS 2023 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

35. *Binäre Hamming-Codes*

Es sei $r \geq 2$, $n := 2^r - 1$ und $k := n - r$. Wir nutzen die Matrix H aus Aufgabe 32, aber nun als Kontrollmatrix. So entsteht der binärer (n, k)-Hamming-Code $\mathcal{H}_r := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n \,;\, H\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}\}$. Zeigen Sie

(a) $\mathcal{H}_r = \mathcal{S}_r^{\perp}$.

(b) Es gilt tatsächlich $k = \dim \mathcal{H}_r$.

(c) $\gamma_{\min}(\mathcal{H}_r) = 3$; d.h. $\mathcal{H}_r$ ist 1-fehlerkorrigierend.

(d) $\mathcal{H}_r$ ist ein perfekter Code.

36. Wahr oder falsch?

(a) Ein Fehlervektor kann höchsten das Gewicht zwei haben.

(b) Wenn eine Kontrollmatrix eine Null-Spalte besitzt, dann hat der Code das Minimalgewicht 1.

(c) Wenn die Spalten einer Kontrollmatrix eines binären Codes alle verschieden sind, dann hat der Code mindestens das Minimalgewicht 3.

(d) Wenn die Spalten einer Kontrollmatrix eines q-nären Codes ($q \geq 3$) alle verschieden sind, dann hat der Code mindestens das Minimalgewicht 3.

(e) Bei einem 1-fehlerkorrigierenden Code sind die Sydrome aller Standardbasis-Vektoren verschieden.

Aufgaben (freiwillig, keine Abgabe)

37. Es sei $\mathcal{C}$ der binäre Code mit Kontrollmatrix $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Parameter des Codes. Wie viele Fehler kann $\mathcal{C}$ korrigieren?

(b) Erstellen Sie eine Decodiertabelle der Form

Anführer	000000 ...
Syndrom	...

Anleitung: Starten Sie mit Wörtern vom Gewicht 1 und bestimmen Sie deren Syndrom.

Wieviel Syndrome gibt es? Was müssen Sie tun, wenn ein Syndrom schon vorhanden ist.

(c) Nutzen Sie Ihre Tabelle um drei zufällig erzeugte Wörter zu decodieren. Erzeugen Sie die Wörter z.B. durch Münzwurf.

bitte wenden!

38. Schreiben Sie die Zahlen $1, 2, \ldots 15$ im Binärsystem als Spalten der Reihe nach in eine Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

dann entsteht eine Kontrollmatrix des $(15, 4)$-Hamming-Codes.

(a) Zeigen Sie, dass bei der Syndrom-Decodierung das Syndrom jeweils die Nummer der Spalte im Binärsystem angibt, in der der Fehler aufgetreten ist.

(b) Decodieren Sie $01010\,01010\,01000$, $11100\,01110\,00111$, $11001\,11001\,11000$, und ein zufällig gewähltes Wort.

39. Sei $m \geq 2$. Zeigen Sie

(a) Es gibt keinen binären linearen $(2^m, 2^m - m)$-Code mit $\gamma_{\min} = 3$.

(b) Es sei C binären linearen $(2^m, k)$-Code mit $\gamma_{\min} = 4$, dann gilt $k \leq 2^m - m - 1$

40. Es sei $\mathcal{C}$ eine binärer $(2n, n)$-Code mit Generatormatrix $G = (I_n \; A)$ in Standardform. Wenn $A = A^{\mathrm{T}}$, dann ist $\mathcal{C}^{\perp}$ äquivalent zu $\mathcal{C}$.

41. Bestimmen Sie eine Decodiertabelle für die Kreuzsicherung wie in Aufgabe 37.

42. *Verallgemeinerte Kreuzsicherung*

Es sollen Informations-Wörter $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_q^6$, q prim, wie folgt gesichert werde:

Bilde die Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y_4 \\ x_4 & x_5 & x_6 & y_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \end{pmatrix}$ und ergänze $\mathbf{x}$ zum Vektor $\mathbf{xy} \in \mathbb{Z}_q^{11}$ so, dass die Summen der Einträge spalten- und zeilenweise jeweils Null ergeben (vgl. (2.6.3)).

(a) Bestimmen Sie eine Generatormatrix G, die die Codierung bescheibt.

(b) Zeigen Sie, dass der Code $\mathcal{K}$ linear ist und bestimmen Sie die Parameter (n, k).

(c) Bestimmen Sie die Informationsrate.

(d) Geben Sie eine Kontrollmatrix an.

(e) Bestimmen Sie das Minimalgewicht. Wieviele Fehler kann der Code korrigieren?

43. Es sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ ein linearer Code mit Minimalgewicht d und $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_q^n$ mit $\gamma(\mathbf{x}) \leq \frac{d-1}{2}$. Zeigen Sie

(a) Für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt $\gamma(\mathbf{x} + \mathbf{c}) > \frac{d-1}{2}$.

(b) $\mathbf{x}$ ist der eindeutig bestimmte Anführer des affinen Unterraums $\mathbf{x} + \mathcal{C}$.