Geometrie II

Skript zur Vorlesung

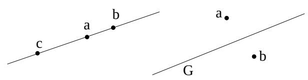
Hubert Kiechle

SoS 2007

Inhaltsverzeichnis

7 Anordnung

Problemstellung. Wann liegt ein Punkt a „zwischen“ b und c? Wann werden Punkte a und b durch eine Gerade G „getrennt“?



Das Teilverhältnis

Definition. Sei (V, K) ein Vektorraum und $(V, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V, K)$ die zugehörige affine Ableitung. Für kollineare $a, b, c \in A$, $a \neq b$, existiert genau ein $\lambda \in K$ mit $c - a = (b - a)\lambda$. Wir setzen $\mathrm{Tv}(a, b, c) := \lambda$ und nennen es das **Teilverhältnis** von a, b, c.

Bemerkung. 1. Für $K = \mathbb{R}$ gilt: a „liegt zwischen“ b und c genau dann, wenn $\mathrm{Tv}(a, b, c) < 0$.

2. Für das Doppelverhältnis aus §6 gilt: $\mathrm{DV}(a, b, c, d) = \dfrac{\mathrm{Tv}(c, a, b)}{\mathrm{Tv}(d, a, b)}$ (Übung!).

3. VORSICHT: Die Definitionen sind nicht einheitlich in der Literatur.

Es gelten folgende Rechenregeln:

(7.1) *Sei (V, K) ein Vektorraum und $(V, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V, K)$ die zugehörige affine Ableitung. Seien $a, b, c \in V$ kollinear mit $a \neq b$. Dann gilt:*

(1) *(Translationsinvarianz)* $\forall v \in V : \mathrm{Tv}(a + v, b + v, c + v) = \mathrm{Tv}(a, b, c)$.

(2) *Sei $\sigma : V \to V$ eine semilineare Bijektion mit Begleitautomorphismus $\widehat{\sigma}$, dann gilt* $\mathrm{Tv}(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)) = \widehat{\sigma}(\mathrm{Tv}(a, b, c))$. *Insbesondere ist* Tv *genau unter den linearen Affinitäten invariant.*

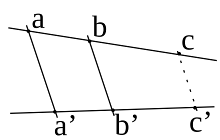
(3) *Seien a, b, c paarweise verschieden und $\lambda = \mathrm{Tv}(a, b, c)$. Dann gelten:*
$\mathrm{Tv}(a, c, b) = \lambda^{-1}$ $\quad$ $\mathrm{Tv}(b, a, c) = 1 - \lambda$ $\quad$ $\mathrm{Tv}(b, c, a) = (1 - \lambda)^{-1}$
$\mathrm{Tv}(c, a, b) = 1 - \lambda^{-1}$ $\quad$ $\mathrm{Tv}(c, b, a) = 1 - (1 - \lambda)^{-1} = (1 - \lambda^{-1})^{-1} = \lambda(\lambda - 1)^{-1}$.

(4) *Falls $a \neq c$ gilt für $d \in \overline{a, b}$:* $\mathrm{Tv}(a, b, c) \cdot \mathrm{Tv}(a, c, d) = \mathrm{Tv}(a, b, d)$.

(5) *Die Abbildung $\tau_{a,b} : \overline{a, b} \to K;\ x \mapsto \mathrm{Tv}(a, b, x)$ ist bijektiv.*

(6) *Seien $a', b', c' \in A$ kollinear, $a' \neq b'$ mit $a \neq a'$, $b \neq b'$ und $\overline{a, a'} \| \overline{b, b'}$, dann gilt:*

$$\mathrm{Tv}(a, b, c) = \mathrm{Tv}(a', b', c') \iff \left(c = c' \ \vee\ \overline{c, c'} \| \overline{a, a'}\right).$$



Insbesondere ist Tv *invariant unter Parallelperspektivität.*

Beweis. (1) ist trivial.

(2) Folgende Rechnung zeigt die Behauptung:

$$\begin{aligned} & (\sigma(b)-\sigma(a))\cdot \mathrm{Tv}(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)) = \sigma(c)-\sigma(a) = \sigma(c-a) \\ = \; & \sigma((b-a)\cdot \mathrm{Tv}(a,b,c)) = (\sigma(b)-\sigma(a))\cdot \widehat{\sigma}(\mathrm{Tv}(a,b,c)). \end{aligned}$$

(3) Übung.

(4) Es gilt: $(b-a)\cdot \mathrm{Tv}(a,b,c)\cdot \mathrm{Tv}(a,c,d) = (c-a)\,\mathrm{Tv}(a,c,d) = d-a$. Das ist die Behauptung.

(5) Injektivität: $\lambda = \mathrm{Tv}(a,b,x) = \mathrm{Tv}(a,b,y) \Rightarrow x-a = \lambda(b-a) = y-a \Rightarrow x=y$. Surjektivität: Zu $\lambda \in K$ setze $x := a+(b-a)\lambda$. Dann gilt $\mathrm{Tv}(a,b,x)=\lambda$.

(6) „$\Longrightarrow$“: Sei $\lambda = \mathrm{Tv}(a,b,c) = \mathrm{Tv}(a',b',c')$. Es gilt $c-a=(b-a)\lambda$ und $c'-a' = (b'-a')\lambda$, Subtrahieren ergibt $(c-c')-(a-a') = (b-b')\lambda-(a-a')\lambda$. Wegen $\overline{a,a'}\|\overline{b,b'}$ sind $(a-a')$ und $(b-b')$ linear abhängig, also auch $(a-a')$ und $(c-c')$, somit $(c=c' \vee \overline{a,a'}\|\overline{c,c'})$.

„$\Longleftarrow$“: Wegen (5) existiert $c'' \in \overline{a',b'}$ mit $\mathrm{Tv}(a,b,c)=\mathrm{Tv}(a',b',c'')$. Mit „$\Longrightarrow$“ folgt: $c=c''$ oder $\overline{a,a'}\|\overline{c,c''}$.

1. Fall: $c=c'$. Aus $c\neq c''$ folgte wegen $c,c''\in\overline{a',b'}$ der Widerspruch $\overline{a,a'} \nparallel \overline{c,c''}$. Also gilt $c'=c=c''$ und $\mathrm{Tv}(a,b,c)=\mathrm{Tv}(a',b',c')$ ist klar.

2. Fall: $c\neq c'$, also $\overline{c,c'}\|\overline{a,a'}$. Im Fall $c=c''$ (also $c,c'\in\overline{a',b'}$) folgte der Widerspruch $\overline{a,a'}\nparallel\overline{c,c'}$. Also $c\neq c''$ und $\overline{c,c''}\|\overline{a,a'}\|\overline{c,c'}$ zeigt die Behauptung $c''=c'$. ∎

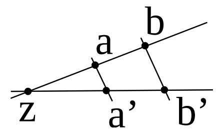
Bemerkung. Vergleiche dazu den Beweis von (4.1).

(7.2) Strahlensatz. *Seien $a,a',z\in V$, nicht kollinear, $b\in\overline{z,a}\setminus\{z,a\}$ und $b'\in V$. Äquivalent sind:*

(I) $b'\in\overline{z,a'}$ *und* $\overline{a,a'}\|\overline{b,b'}$.

(II) $b'-z=(a'-z)\cdot\mathrm{Tv}(z,a,b)$ *(d.h. $\mathrm{Tv}(z,a',b')=\mathrm{Tv}(z,a,b)$).*

(III) $b'-b=(a'-a)\cdot\mathrm{Tv}(z,a,b)$.



Beweis. (I) $\Longrightarrow$ (II): Der Spezialfall $c=c'$ in (7.1.6) zeigt $\mathrm{Tv}(z,a,b)=\mathrm{Tv}(z,a',b')$.

(II) $\Longleftrightarrow$ (III): Es gilt $b-z=(a-z)\cdot\mathrm{Tv}(z,a,b)$.

Subtrahieren von (II) ergibt (III), addieren zu (III) ergibt (II).

(II),(III) $\Longrightarrow$ (I): $b'\in\overline{z,a'}$ ergibt sich aus (II), $\overline{a,a'}\|\overline{b,b'}$ aus (III). ∎

Zwischenfunktion

Für nicht kollineare Punkte a,b,c eines Inzidenzraumes $(P,\mathfrak{G})$ schreiben wir $E := \overline{a,b,c}$ für den Schnitt über alle Unterräume, die a,b,c enthalten und sprechen von der von a, b, c aufgespannten **Ebene**. Die Menge E ist der kleinste Unterraum von P, der die Punkte a, b, c enthält. Wir schreiben $\mathfrak{G}(E)$ für die Menge aller Geraden, die in E enthalten ist. Mehr dazu in § 9.

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum mit (I3) und (E3). Setze

$$P^{(3)} := \big\{(a, b, c) \in P^3\,;\ a, b, c \text{ kollinear}, a \neq b, c\big\}\,.$$

Eine Abbildung $\zeta : P^{(3)} \to \{-1, 1\}$ (wir werden $(a|b, c)$ statt $\zeta(a, b, c)$ schreiben) heißt **Zwischenfunktion** (oder auch **Zwischenrelation**), wenn für alle $(a, b, c) \in P^{(3)}$ das folgende Axiom gilt:

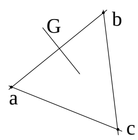
(A1) $\quad (a|b, c) = (a|c, b) \quad$ und $\quad (a|b, b) = 1\,.$

Wir sagen a „liegt zwischen" b und c, wenn $(a|b, c) = -1$.

Für $a, b \in P$, $a \neq b$, setze $\quad]a, b[\ := \big\{x \in \overline{a, b} \setminus \{a, b\}\,;\ (x|a, b) = -1\big\}$ (**offene Strecke**.)
Beachte: $]a, b[\ =\ ]b, a[\,.$

$(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ heißt **halbgeordneter Raum** (und ζ **Halbordnung**), wenn das folgende **Axiom von Pasch** gilt:

(PA) Für nicht kollineare $a, b, c \in P$, $p \in\ ]a, b[\,$, und $G \in \mathfrak{G}(\overline{a, b, c})$ mit $a, b, c \notin G$ gilt:
Aus $G \cap\ ]a, b[\ \neq \varnothing$ folgt entweder $G \cap\ ]a, c[\ \neq \varnothing$ oder $G \cap\ ]b, c[\ \neq \varnothing$.



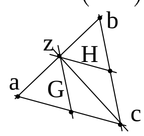
$(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ heißt **angeordneter Raum**, wenn darüber hinaus gilt:

(A2) Für alle $a, b, c \in P$, verschieden und kollinear, ist genau einer der Werte $(a|b, c)$, $(b|c, a)$, $(c|a, b)$ gleich -1.

(7.3) Beispiele. (1) $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ heißt **trivialer halbgeordneter Raum**, wenn $(\,\cdot\,|\,\cdot\,, \cdot) = 1$. (PA) ist dann „leer erfüllt".

(2) Sei $(P, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(2, \mathbb{Z}_3)$ und für $(a, b, c) \in P^{(3)}$ sei $(a|b, c) := \begin{cases} 1 & \text{falls } b = c \\ -1 & \text{falls } b \neq c \end{cases}$.
Dann ist $(P, \mathfrak{G})$ halbgeordneter Raum, aber nicht angeordnet.

Beweis. (A1) ist klar. (PA): Seien $a, b, c \in P$, nicht kollinear, und $z \in \overline{a, b} \setminus \{a, b\}$, also $(z|a, b) = -1$. Durch z gehen genau $|\mathbb{Z}_3| + 1 = 4$ Geraden, nämlich $\overline{a, b}$, $\overline{z, c}$, $G := \{z \| \overline{b, c}\}$ und $H := \{z \| \overline{a, c}\}$. Nur G und H erfüllen die Voraussetzungen von (PA) und müssen geprüft werden. Betrachte zunächst G: es gilt $G \cap \overline{a, c} \neq \varnothing$ und $a, c \notin G$, also $G \cap \overline{a, c} \in\ ]a, c[\,$. Natürlich gilt $G \cap \overline{b, c} = \varnothing$ und (PA) folgt für G. Entsprechend verfährt man für H.



(3) Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein kommutativer Körper mit $|K| > 2$, der angeordnet ist (d.h. es gelten die Monotoniegesetze, wie etwa für etwa $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$). Sei V ein K-Vektorraum und $(P, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V, K)$. Für $(a, b, c) \in P^{(3)}$ setze $(a|b, c) := \operatorname{sgn} \mathrm{Tv}(a, b, c)$ (wegen $a \neq c \implies \mathrm{Tv}(a, b, c) \neq 0$ ist das wohldefiniert!).

Dann ist $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein angeordneter Raum.

Beweis. (A1): klar wegen $\mathrm{Tv}(a, b, c) = \mathrm{Tv}(a, c, b)^{-1}$ und $\mathrm{Tv}(a, b, b) = 1$.

(PA): Seien a, b, c nicht kollinear und $G \in \mathfrak{G}(\overline{\{a, b, c\}})$ so, dass $x := G \cap \,]a, b[$ existiert und $a, b, c \notin G$. Wegen der Translationsinvarianz von Tv kann man oE. $c = 0$ annehmen. Es existiert ein $\lambda \in K$ mit $x = a + (b - a)\lambda$, d.h. $\mathrm{Tv}(a, b, x) = \lambda$, also $\mathrm{Tv}(x, a, b) = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Es gilt $\mathrm{Tv}(x, a, b) < 0$ nach Konstruktion, d.h. $0 < \lambda < 1$.

Betrachte zunächst den Fall $G \| \overline{0, a}$ oder $G \| \overline{0, b}$, oE. $G \| \overline{0, a}$. Dann existiert $z := G \cap \overline{0, b}$ und mit (7.2) folgt $\mathrm{Tv}(b, z, 0) = \mathrm{Tv}(b, x, a) = \frac{1}{1-\lambda}$, also $\mathrm{Tv}(z, b, 0) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} < 0$ und $(z|0, b) = -1$. Das zeigt $G \cap \,]0, b[\,\neq \varnothing$.

Es gelte also $\overline{0, a} \nparallel G \nparallel \overline{0, b}$, d. h. es existiert $\alpha \in K$ mit $y := a\alpha = G \cap \overline{0, a}$. Wir bestimmen $z := G \cap \overline{0, b}$. Da $G = \overline{x, y}$ gilt, existieren

$$\beta, \mu \in K \quad \text{mit} \quad z = b\beta = y + (x - y)\mu = a\alpha + (a + (b - a)\lambda - a\alpha)\mu.$$

Die Vektoren a und b sind linear unabhängig (da $0, a, b$ nicht kollinear), also erhält man durch einen Koeffizientenvergleich $\alpha + (1 - \lambda - \alpha)\mu = 0$ und $\lambda\mu = \beta$. Es gilt $1 - \lambda - \alpha \neq 0$ (sonst $\alpha = 0 \implies y = 0 = c \in G$ — ein Widerspruch), also $\mu = \frac{-\alpha}{1-\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda+\alpha-1}$. Wegen

$$1 - \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\lambda\mu} = 1 - \frac{\lambda + \alpha - 1}{\lambda\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

und

$$1 - \frac{1}{\lambda} < 0 \quad \text{folgt entweder} \quad 1 - \frac{1}{\beta} < 0 < 1 - \frac{1}{\alpha} \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{1}{\alpha} < 0 < 1 - \frac{1}{\beta}.$$

Wegen

$$G \cap \,]0, a[\,\neq \varnothing \iff (y|0, a) = -1 \iff \mathrm{Tv}(a\alpha, 0, a) = \frac{1 - \alpha}{-\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} < 0$$

und entsprechend $G \cap \,]0, b[\,\neq \varnothing \iff (z|0, b) = -1 \iff 1 - \frac{1}{\beta} < 0$ zeigt das (PA).

(A2): Übung. ∎

(4) Sei E der Einheitskreis (oder ein andere konvexe Menge) in $\mathbb{R}^2$. Die Geraden seien die Sekanten von E und die Anordnung wie in R^2 (vgl. (3)). Dann ist E ein angeordneter Raum.
Insbesondere trägt das Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene eine Anordnung.

(7.4) Bemerkung. 1. Um (A1) für das Beispiel (3) zu zeigen, genügt die Eigenschaft $\alpha > 0 \implies \alpha^{-1} > 0$. Für (PA) genügt

$$\alpha < 0 < \beta \implies \alpha\beta < 0 \quad \text{und} \quad \alpha, \beta < 0 \implies \alpha\beta > 0$$

Man hätte also auf Teile der geforderten Monotonie-Eigenschaften des Körpers verzichten können.

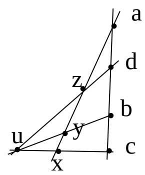
2. Die Menge $\{-1, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$ ist eine (multiplikative) Gruppe, die die Eigenschaft $a^2 = 1$ für alle Elemente a hat. Diese Tatsache wird im folgenden Satz ausgenutzt.

(7.5) Kürzregel. *Sei $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein halbgeordneter Raum. Dann gilt für alle kollinearen $a, b, c, d \in P$, $a \neq b, c, d$:* $\quad (a|b,c) \cdot (a|c,d) = (a|b,d)$.

Beweis. Die drei Fälle $b = c$, $b = d$ und $c = d$ sind wegen (A1) trivial (z.B. $b = d$: $(a|b,c) \cdot (a|c,b) = (a|b,c)^2 = 1 = (a|b,b)$). Seien also a, b, c, d paarweise verschieden, $u \in P \setminus \overline{a,b}$ und $x \in \overline{u,c} \setminus \{u, c\}$ zwei weitere Punkte. Es bezeichne $y := \,]u, b[\, \cap \overline{a,x}$ und $z := \,]u, d[\, \cap \overline{a,x}$, falls diese existieren. Alle Fälle sind in der unten stehenden Tabelle abzulesen, z.B. liest sich der Fall $(a|b,c) = (a|c,d) = 1, (x|u,c) = -1$ wie folgt:

Betrachte zunächst die drei Punkte u, b, c und die Gerade $\overline{a,x}$. Wegen $(x|u,c) = -1$ und $(a|b,c) = 1$ folgt mit (PA) die Existenz von y. Entsprechend die von z am „Dreieck" u, d, c. Wendet man (PA) nun auf u, b, d an, so folgt $(a|b,d) = 1$.

		$(x\|u,c) = -1$		$(x\|u,c) = 1$		
$(a\|b,c)$	$(a\|c,d)$	y ex.	z ex.	y ex.	z ex.	$(a\|b,d)$
1	1	ex.	ex.	ex. n.	ex. n.	1
1	-1	ex.	ex. n.	ex. n.	ex.	-1
-1	1	ex. n.	ex.	ex.	ex. n.	-1
-1	-1	ex. n.	ex. n.	ex.	ex.	1
(PA) mit Dreieck:		u, b, c	u, d, c	u, b, c	u, d, c	u, b, d



In allen Fällen ergibt sich die Behauptung. ∎

Bemerkung. Aus der Kürzregel folgt (A1): etwa $(a|b,b) = (a|b,b) \cdot (a|b,b) = 1$ und $(a|b,c) \cdot (a|c,b) = (a|b,b) = 1 \implies (a|b,c) = (a|c,b)$. Man hätte also auch die Kürzregel als Axiom an Stelle von (A1) fordern können!

<u>**(7.6)**</u> *Im halbgeordneten Raum $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ seien $(a, b, c), (a', b', c') \in P^{(3)}$, $b \neq b'$, und $\overline{a, b, a', b'}$ ist eine Ebene, d.h. insbesondere $\overline{a,b} \neq \overline{a',b'}$.*

(1) *Im Fall $a \neq a'$ und $\overline{a,a'} \cap \overline{b,b'} = \varnothing$ gelte $c = c'$ oder $\overline{a,a'} \cap \overline{c,c'} = \varnothing$, dann ist $(a|b,c) = (a'|b',c')$.*

(2) *Sei $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein angeordneter Raum und gelte $a = a'$ und $\overline{b,b'} \cap \overline{c,c'} = \varnothing$. Dann hat man ebenfalls* $\quad (a|b,c) = (a|b',c')$.

Beweis. Übung! ■

(7.7) *Seien $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein angeordneter Raum und $a, b \in P$, $a \neq b$.*

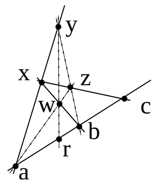
(1) *Für $b' \in\ ]a,b[$ gilt $]a,b'[\ \subsetneq\ ]a,b[$.*

(2) $|\ ]a,b[\ | = \infty$.

Beweis. (1) Es gilt $(b'|a,b) = -1$. Sei $b'' \in\ ]a,b'[$, dann ist $b'' \in\ ]a,b[$ zu zeigen. Es gilt $(b''|a,b') = -1 \overset{\text{(A2)}}{\Longrightarrow} (b'|a,b'') = 1$ und mit (7.5) folgt $(b'|b,b'') = (b'|a,b'') \cdot (b'|a,b) = -1$. Mit (A2) und (7.5) gilt weiter $(b''|b',b) = 1$ und $(b''|a,b) = (b''|a,b') \cdot (b''|b',b) = -1$, d.h. $b'' \in\ ]a,b[$. Wegen $b' \in\ ]a,b[$ aber $b' \notin\ ]a,b'[$ gilt „$\neq$“.

(2) Wir zeigen zunächst $]a,b[\ \neq \varnothing$. Sei $c \in \overline{a,b} \setminus \{a,b\}$. Nur im Fall $(c|a,b) = 1$ ist etwas zu zeigen, es kann also wegen (A2) oE. $(b|a,c) = -1$ angenommen werden. Sei $x \in P \setminus \overline{a,b}$ und $y \in \overline{a,x} \setminus \{a,x\}$. Wegen (A2) gilt oE. $(y|x,a) = 1$ (sonst x und y vertauschen!). Dreimal (PA) angewendet zeigt die Existenz eines Punktes $r \in\ ]a,b[$:

Dreieck	Gerade	Folgerung
a, x, c	$\overline{y,b}$	$\exists z = \overline{y,b} \cap\ ]x,c[$
x, b, c	$\overline{a,z}$	$\exists w = \overline{a,z} \cap\ ]x,b[$
a, b, x	$\overline{y,w}$	$\exists r = \overline{y,w} \cap\ ]a,b[$



Setze nun $b_0 := b$. Wir können rekursiv $b_{i+1} \in\ ]a,b_i[$ wählen. Die Transitivität von $\subsetneq$ zeigt $\forall j > i :\ ]a,b_j[\ \subsetneq\ ]a,b_i[$, also $i \neq j \implies b_i \neq b_j$ und die unendliche Menge $\{b_i\,;\ i \in \mathbb{N}\}$ liegt in $]a,b[$. ■

(7.8) *Sei (V, K) ein Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Dann ist jede Halbordnung auf dem affinen Raum $\mathrm{AG}(V,K)$ translationsinvariant.*

D. h.: Für alle $(a,b,c) \in V^{(3)}$ und $v \in V$ gilt $(a|b,c) = (a+v|b+v, c+v)$.

Beweis. Wegen Symmetrie genügt es

$$(a|b,c) = -1 \implies (a+v|b+v, c+v) = -1$$

zu zeigen. Sei zunächst $a + v \notin \overline{a,b}$, also $\overline{a+v, b+v} \neq \overline{a,b}$. Dann sind die Geraden $\overline{a,a+v}$, $\overline{b,b+v}$ und $\overline{c,c+v}$ parallel und verschieden. Auch liegen sie alle in einer Ebene, daher zeigt (7.6) die Behauptung.

Im Fall $a + v \in \overline{a,b}$ wähle Hilfspunkt $d \notin \overline{a,b}$ und $v' := d - a$ und wende vorigen Fall zweimal an. ■

Exkurs: Halb- und Anordnungen auf kommutativen Körpern

Sei K ein kommutativer Körper. Eine Menge $P \subseteq K^*$ heißt **Halbordnung** (und (K, P) **halbgeordneter Körper**), wenn die Axiome (P1) und (P2) erfüllt sind:

(P1) $P \cdot P = \{pq\,;\ p, q \in P\} \subseteq P$

(P2) $\exists g \in K^*$ mit $K^* = P \,\dot{\cup}\, gP$

Eine Halbordnung P heißt **Anordnung** oder **Positivitätsbereich** (und (K, P) **angeordneter Körper**), wenn darüber hinaus (P3) gilt:

(P3) $P + P \subseteq P$.

(7.9) Bemerkung. 1. Sei P eine Halbordnung. Natürlich gilt $g \notin P$ (vgl. (7.10.1)). Die Abbildung $P \to gP$; $p \mapsto gp$ ist offenbar eine Bijektion, also folgt $|P| = |gP|$. Ist K endlich, so gilt insbesondere $|P| = \frac{1}{2}(|K| - 1)$. In endlichen Körpern gerader Mächtigkeit existieren also keine Halbordnungen.

2. Beispiele finden sich in (7.14) unten.

(7.10) *Sei (K, P) ein halbgeordneter Körper. Dann gelten:*

(1) $\forall a \in K^* : a^2 \in P$ *(insbesondere folgt $1 = 1^2 \in P$)*

(2) $P^{-1} \subseteq P$

(3) *Ist P ein Positivitätsbereich, dann gilt:* $gP = -P$.

Beweis. (1) Sei $a \in K^*$. Im Fall $a \in P$ folgt $a^2 \in P$ mit (P1). Sei also $a \in gP$, d. h. $a = gp$ für ein $p \in P$. Wegen $g \notin P \implies gg \notin gP \implies g^2 \in P$ ergibt sich $a^2 = g^2p^2 \in PPP \subseteq P$.

(2) Sei $a \in P$. Wäre $a^{-1} \in gP$, dann wäre $1 = a^{-1}a \in gPP \subseteq gP$, ein Widerspruch. Also gilt $a^{-1} \in P$.

(3) Wegen $1 + (-1) = 0 \notin P$ folgt $-1 \notin P$, also $-1 \in gP$.

„$\supseteq$“: $-P \subseteq gPP \subseteq gP$.

„$\subseteq$“: Wegen $-1 \in gP$ existiert $p \in P$ mit $gp = -1$, also $g = -p^{-1} \in -P$. Die Inklusion $gP \subseteq -PP \subseteq -P$ zeigt die Behauptung. ∎

Bemerkung. Wegen (7.10) und (P1) ist $(P, \cdot)$ also eine Untergruppe von K^* vom Index 2. Die beiden Nebenklassen sind P und gP.

(7.11) Satz. *Sei K ein kommutativer Körper. Dann gilt:*

(1) *Ist P ein Positivitätsbereich und $P_0 := P \cup \{0\}$, so wird durch*

$$\forall a, b \in K : a \leq b :\iff b - a \in P_0$$

eine totale Ordnung auf K definiert, für die die Monotoniegesetze gelten.
Es ist $P = \{x \in K^* \,;\, x \geq 0\}$.

(2) *Ist „$\leq$" eine totale Ordnung auf K, die die Momotoniegesetze erfüllt, so ist $P_{\leq} := \{a \in K^* \,;\, a \geq 0\}$ ein Positivitätsbereich. Es gilt $a \leq b \iff b - a \in P_{\leq} \cup \{0\}$.*

(3) *Falls K eine Anordnung erlaubt, dann gilt „$\mathbb{Q} \subseteq K$" (d. h. $\operatorname{char} K = 0$).*

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst, dass „$\leq$" eine Ordnungsrelation ist. Reflexivität ist klar.

Antisymmetrie: Seien $a \leq b$ und $b \leq a$, d. h. $b - a, a - b \in P_0$. Dann folgt
$a - b = -(b - a) \in -P_0 \cap P_0 = \{0\} \implies a = b$.

Transitivität: Seien $a \leq b$, $b \leq c$, d. h. $b - a$, $c - b \in P_0$. Es folgt
$c - a = (c - b) + (b - a) \in P_0 + P_0 \subseteq P_0 \implies a \leq c$.

„$\leq$" ist eine totale Ordnung: Seien $a, b \in K$, $a \neq b$. Falls $b - a \in P$ ist $a \leq b$ klar. Falls $b - a \in -P$ folgt $a - b = -(b - a) \in P$ und $b \leq a$.

Monotoniegesetze: (M1) ist klar.

(M2): seien $a, x, y \in K$ mit $a \geq 0$ und $x \leq y$ gegeben, d. h. $a, y - x \in P_0$. Wegen $ay - ax = a(y - x) \in P_0 P_0 \subseteq P_0$ folgt $ax \leq ay$.

$P = \{x \in K^* \,;\, x \geq 0\}$ ist klar.

(2) (P1): Seien $a, b \in P_{\leq}$, also $a, b > 0$. Mit (M2) folgt $0 < ab$, also $ab \in P_{\leq}$. Das zeigt $P_{\leq} \cdot P_{\leq} \subseteq P_{\leq}$.

(P3) gilt wegen $0 < a, b \implies b < a + b \implies 0 < a + b \implies a + b \in P_{\leq}$ aus (M1).

(P2): Wegen $0 < a \overset{(M1)}{\iff} -a < 0$ folgt $P \cap -P = \varnothing$ und $P \cup -P = K^*$. Das ist gerade (P2) mit $g = -1$.

$a \leq b \iff 0 \leq b - a \iff b - a \in P_{\leq} \cup \{0\}$ ist klar.

(3) Wegen (1) existiert zu K eine totale Ordnung „$\leq$" mit (M1) und (M2). Wegen $1 > 0$ (vgl. (7.10.1)) gilt mit Induktion und (P3)

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}} > 0.$$

Insbesondere ist $1 \cdot n \neq 0$. Genauso erkennt man, dass sogar $1 \cdot k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Also ist $\mathbb{Z} \to K$; $n \mapsto 1 \cdot n$ ein injektiver Ring-Homomorphismus und „$\mathbb{Z} \subseteq K$". Daraus folgt auch „$\mathbb{Q} \subseteq K$". ∎

Angeordnete affine Ableitungen

(7.12) Satz. *Sei K ein kommutativer Körper und (V, K) ein Vektorraum mit* $\dim V \geq 2$. *Der affine Raum* $(V, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V, K)$ *trage eine nicht-triviale Halbordnung. Setze* $P := \{\mathrm{Tv}(a, b, c)\,;\ (a, b, c) \in V^{(3)}$ *mit* $(a|b, c) = 1\}$.

(1) (K, P) *ist halbgeordneter Körper und für alle* $(a, b, c) \in V^{(3)}$ *gilt:*

$$(a|b, c) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \mathrm{Tv}(a, b, c) \in P \\ -1 & \textit{falls } \mathrm{Tv}(a, b, c) \notin P \end{cases}$$

(2) $(V, \mathfrak{G})$ *ist angeordnet* $\iff$ P *ein Positivitätsbereich (d. h. K ist angeordnet).*

Beweis. Wir zeigen zunächst

(a) Seien $(a, b, c), (a', b', c') \in V^{(3)}$ mit $\mathrm{Tv}(a, b, c) = \mathrm{Tv}(a', b', c')$. Dann gilt $(a|b, c) = (a'|b', c')$.

Sei $v = c - c'$, also $c' + v = c$, dann gilt wegen (7.1.1) $\mathrm{Tv}(a', b', c') = \mathrm{Tv}(a' + v, b' + v, c' + v)$, d. h. wegen (7.8) kann oE. $c = c'$ angenommen werden.

Falls b, b', c nicht kollinear, so folgt $\overline{a, a'} \| \overline{b, b'}$ aus dem Strahlensatz (7.2) und $(a|b, c) = (a'|b', c')$ aus (7.6).

Falls b, b', c kollinear, d.h. $\overline{a, b} = \overline{a', b'}$, wähle eine Hilfsgerade $G \neq \overline{a, b}$ durch c und einen Punkt $a'' \in G \setminus \{c\}$. Wegen (7.1.5) existiert $b'' \in G$ mit $\mathrm{Tv}(a'', b'', c) = \mathrm{Tv}(a, b, c)$. Wie oben zeigt man $(a|b, c) = (a''|b'', c) = (a'|b', c')$.

(1) Aus (a) ergibt sich bereits die Beschreibung von $(a|b, c)$ mit $\mathrm{Tv}(a, b, c)$.

(P1): Seien $\alpha, \beta \in P$, dann ist $\alpha\beta \in P$ zu zeigen. Wegen (7.1.5) existieren $(a, b, c) \in V^{(3)}$ mit $\mathrm{Tv}(a, b, c) = \alpha$ und $d \in \overline{a, b}$ mit $\mathrm{Tv}(a, c, d) = \beta$. Es folgt $(a|b, c) = 1$ und $(a|c, d) = 1$. Wegen $(a|b, d) = (a|b, c)(a|c, d) = 1$ folgt $\alpha\beta = \mathrm{Tv}(a, b, c)\,\mathrm{Tv}(a, c, d) = \mathrm{Tv}(a, b, d) \in P$.

(P2): Da $(\,\cdot\,|\,\cdot\,, \cdot)$ nicht trivial ist, existiert $(a, b, c) \in V^{(3)}$ mit $(a|b, c) = -1$. Wegen (a) gilt $g := \mathrm{Tv}(a, b, c) \notin P$. Für $\beta \in P$ und $d \in \overline{a, b}$ mit $\mathrm{Tv}(a, c, d) = \beta$ erkennt man wie oben $g\beta = \mathrm{Tv}(a, b, d) \notin P$ und es folgt $gP \cap P = \varnothing$. Zu jedem $k \in K^*$ existiert $e \in \overline{a, b}$, $e \neq a$, mit $\mathrm{Tv}(a, b, e) = k$. Im Fall $(a|b, e) = 1$ folgt $k \in P$. Im Fall $(a|b, e) = -1$ folgt $g^{-1}k = \mathrm{Tv}(a, c, b)\,\mathrm{Tv}(a, b, e) = \mathrm{Tv}(a, c, e) \in P$ wegen $(a|c, e) = (a|b, c)(a|b, e) = 1$, also $g^{-1}k \in P$ und $k \in gP$. Das zeigt $K^* = gP \cup P$.

(2) „$\Longleftarrow$“ wurde in (7.3.3) gezeigt.

„$\Longrightarrow$“: Wir zeigen zunächst $\gamma \in P \implies \gamma + 1 \in P$. Zusammen mit (7.1.3) besagt (A2) gerade, dass für $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ genau einer der Werte λ, $(1 - \lambda^{-1})$, $(1 - \lambda)^{-1}$ nicht in P liegt. Aus

$$\lambda \cdot (1 - \lambda^{-1}) \cdot (1 - \lambda)^{-1} = (\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda) = -1$$

folgt daher $-1 \notin P$, und somit $\mu := -\gamma^{-1} \notin P$. Also liegen $(1-\mu)^{-1}$ und $(1-\mu^{-1})$ in P (da $\mu \neq 0, 1$), und es gilt $1 + \gamma = 1 - \mu^{-1} \in P$.

Für $\alpha, \beta \in P$ folgt jetzt $\alpha + \beta = (\alpha\beta^{-1} + 1)\beta \in P$ — die Behauptung. ∎

(7.13) Bemerkung. (1) Auch (7.12.1) besitzt (wie (2)) eine Umkehrung. (PA) zeigt man wie in (7.3.3), vgl. auch Übung.

(2) (7.12) ist der Darstellungssatz für desarguessche affine Räume mit Halbordnung bzw. Anordnung. Insbesondere sind angeordnete affine Räume (mit „Dimension" größer als zwei) genau die über angeordneten Körpern koordinatisierten affinen Räume. Das wird später genauer begründet.

Definition. In einem kommutativen Körper sei $K^\square := \{x^2\,;\ x \in K^*\}$ die Menge der Quadrate aus K^*. Man prüft leicht, dass $(K^\square, \cdot)$ eine Untergruppe von K^* ist.

(7.14) Beispiele. (1) $\mathbb{Z}_3^\square = \{1\}$ ist eine Halbordnung (vgl. das Beispiel (7.3.2)), wähle $g = 2 = -1$.

$\mathbb{Z}_5^\square = \{1, -1\}$ ist eine Halbordnung von $\mathbb{Z}_5$ (z. B. $g = 2$).

(2) Allgemeiner: Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$ ungerade (d. h. $\operatorname{char} K \neq 2$). Wegen ($x^2 = y^2 \iff x = \pm y$) und $y \neq -y$ folgt $|K^\square| = \frac{q-1}{2}$. Sei $g \in K^* \setminus K^\square$. Da $K^\square \to gK^\square;\ x \mapsto g \cdot x$ bijektiv ist, folgt $|gK^\square| = |K^\square| = \frac{q-1}{2}$. Offenbar gilt $gK^\square \cap K^\square = \varnothing$, also ist $K^\square$ eine Halbordnung in K. Wegen (7.10.1) ist $K^\square$ sogar die einzige.

$K^\square$ ist keine Anordnung — da K endlich ist, ist $\mathbb{Q} \subseteq K$ nicht möglich (vgl. (7.11.3)).

(3) Ein endlicher Körper mit $\operatorname{char} K = 2$ besitzt *keine* Halbordnung, denn die Abbildung $K^* \to K^*;\ x \mapsto x^2$ ist injektiv (denn $x = -x$), also auch surjektiv, d. h. $K^\square = K^*$. Aber $K^\square$ müsste nach (7.10.1) in jeder Halbordnung enthalten sein — ein Widerspruch.

(4) Jedes $q \in \mathbb{Q}^*$ kann in eindeutiger Weise geschrieben werden als $q = 2^\alpha \cdot \frac{a}{b}$ mit $\alpha, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, und $2 \nmid a, b$. Wir setzen

$$P := \left\{2^{2\alpha} \cdot \frac{a}{b}\,;\ \alpha, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 \text{ und } 2 \nmid a, b\right\}$$

und erkennen $2P \cap P = \varnothing$ und $2P \cup P = \mathbb{Q}^*$. Offenbar ist P eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Somit ist P eine Halbordnung auf $\mathbb{Q}$, die aber keine Anordnung ist, denn $1 \in P$, aber $1 + 1 = 2^1 \cdot \frac{1}{1} \notin P$. Statt 2 hätte man auch -1 oder eine beliebige Primzahl verwenden können.

(5) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ besitzen je genau eine Anordnung: Sei P eine solche Anordnung. Aus (7.10.1) folgt $1 \in P$, mit (P3) weiter $\forall n \in \mathbb{N} : n \in P$. Mit (7.10.2) gilt $P^{-1} \subseteq P$ also $\mathbb{Q}^{>0} \subseteq P$. Es ist $P = \mathbb{Q}^{>0}$ die gewöhnliche Anordnung von $\mathbb{Q}$. Schließlich gilt $\mathbb{R}^\square = \mathbb{R}^{>0}$, daher besitzt $\mathbb{R}$ genau eine Anordnung.

(6) (ohne Beweis) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2}\,;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ besitzt genau zwei verschiedene Anordnungen: Eine mit $\sqrt{2} > 0$ und eine mit $\sqrt{2} < 0$.

(7) (ohne Beweis) Betrachte

$$\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j t^j}\,;\ a_i, b_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{m} b_j t^j \neq 0 \right\},$$

den Körper der rationalen Funktionen in der Variablen t. Die Menge

$$P = \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j t^j}\,;\ a_i, b_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{m} b_j t^j \neq 0, \frac{a_n}{b_m} > 0 \right\}$$

ist eine Anordnung. Es gilt $\forall k \in \mathbb{Z} : t - k \in P$, also $\forall n \in \mathbb{N} : t > n$, dieser Körper ist somit nicht archimedisch angeordnet.

Wir betrachten nun noch den Fall eines affinen Raumes über den reellen Zahlen genauer. Tatsächlich gelingt eine geometrische Kennzeichnung.

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein angeordneter Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq P$ heißt

Strecke, wenn es $x, y \in P$ mit $A \setminus \{x, y\} = \,]x, y[$ gibt (dabei sei $]x, x[\, = \varnothing$);

beschränkt, wenn es $x, y \in P$ mit $A \subseteq \,]x, y[$ gibt (insbesondere gilt dann $x, y \notin A$);

konvex, wenn für alle $x, y \in A$ gilt $]x, y[\, \subseteq A$.

$(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ heißt **stetig** (besser: **vollständig**), wenn jede kollineare, beschränkte, konvexe Menge eine Strecke ist.

(7.15) Satz. *Sei K ein angeordneter Körper, (V, K) ein Vektorraum mit $\dim V \geq 2$, und $(V, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(V, K)$ trage die von K induzierte Anordnung.*

(1) *Für alle $x, y \in V$ mit $x \neq y$ erhält die Abbildung $\tau_{x,y} : \overline{x, y} \to K\,;\ z \mapsto \mathrm{Tv}(x, y, z)$ die Relation „zwischen“. Genauer: Für $a, b, c \in \overline{x, y}$, $a \neq b, c$, gilt*

$$(a|b, c) = -1 \iff \tau_{x,y}(b) < \tau_{x,y}(a) < \tau_{x,y}(c) \quad \textit{oder} \quad \tau_{x,y}(c) < \tau_{x,y}(a) < \tau_{x,y}(b).$$

(2) *Diese Anordnung ist genau dann stetig, wenn K vollständig ist (d.h. $K \cong \mathbb{R}$, siehe Analysis).*

Beweis. (1) $(a|b,c) = -1$ ist nur möglich, wenn a, b, c paarweise verschieden sind. Genau dann sind auch $\alpha := \tau_{x,y}(a)$, $\beta := \tau_{x,y}(b)$, $\gamma := \tau_{x,y}(c)$ paarweise verschieden. Wir können also beides oE annehmen.

1. Fall: $x \notin \{a, b, c\}$, dann erhält man mit (7.1)

$$\mathrm{Tv}(x, a, b) = \mathrm{Tv}(x, a, y)\,\mathrm{Tv}(x, y, b) = \alpha^{-1}\beta \quad \text{und} \quad \mathrm{Tv}(x, a, c) = \alpha^{-1}\gamma.$$

Weiter gilt

$$\mathrm{Tv}(a, b, c) = \mathrm{Tv}(a, b, x)\,\mathrm{Tv}(a, x, c) = (1 - \alpha^{-1}\beta)^{-1}(1 - \alpha^{-1}\gamma) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta}.$$

Wegen $(a|b,c) = -1 \iff \mathrm{Tv}(a, b, c) < 0$ ergibt sich daraus leicht die Behauptung.

Die weiteren Fälle sind zur Übung empfohlen.

(2) „$\Longrightarrow$“: Sei $B \subseteq K$ eine nicht leere, nach oben beschränkte Menge. Wir werden zeigen, dass B ein Supremum besitzt. Sei $\alpha_0 \in B$, dann können wir statt B auch die Menge $\{x \in B\,;\ x \geq \alpha_0\}$ betrachten — sie besitzen genau dieselben oberen Schranken. Daher ist es keine Einschränkung, wenn wir B beschränkt annehmen. Der Fall, dass B endlich ist, ist trivial, also dürfen wir B unendlich voraussetzen.

Wir definieren $\tilde{B} := \{x \in K\,;\ \exists \alpha, \beta \in B : \alpha \leq x \leq \beta\}$ (die „konvexe Hülle“ von B) und setzen $A := \tau_{0,u}^{-1}(\tilde{B})$ für ein festes $u \in V \setminus \{0\}$. Dann gilt $B \subseteq \tau_{0,u}(A)$.

Offenbar ist A kollinear und wegen (1) auch beschränkt.

A ist konvex: Seien $x, y \in A$, $x \neq y$ und $z \in \,]x, y[\,$. Mit (1) und der Definition von $\tilde{B}$ ergibt sich sofort $\tau_{0,u}(z) \in \tilde{B}$, also $z \in A$.

Nach Voraussetzung existieren $a, b \in P$ mit $A \setminus \{a, b\} = \,]a, b[\,$. OE dürfen wir $\alpha := \tau_{0,u}(a) < \beta := \tau_{0,u}(b)$ annehmen (der Fall $\alpha = \beta$ führte auf $a = b$ und B wäre nicht unendlich).

Für $\gamma \in B \setminus \{\alpha, \beta\}$ gilt $\tau_{0,u}^{-1}(\gamma) \in \,]a, b[\,$, also mit (1) $\alpha < \gamma < \beta$ und β ist obere Schranke von B.

Angenommen es existiert eine weitere obere Schranke σ mit $\sigma < \beta$. Dann gilt

$$\alpha < \sigma < \beta_0 := \frac{\sigma + \beta}{2} < \beta.$$

Wieder mit (1) ergibt sich $\tau_{0,u}^{-1}(\beta_0) \in \,]a, b[\,$, also $\beta_0 \in \tilde{B}$. Nach Konstruktion von $\tilde{B}$ existiert ein $\beta_1 \in B$ mit $\beta_0 \leq \beta_1$ — ein Widerspruch zu $\sigma < \beta$.

Daher ist β das gesuchte Supremum.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $A \subseteq V$ kollinear, beschränkt und konvex. Der Fall $|A| \leq 1$ ist trivial. Somit können wir annehmen, dass es $x, y \in A$ mit $x \neq y$ gibt. Insbesondere gilt dann $A \subseteq \overline{x, y}$. Wegen (1) ist $B := \tau_{x,y}(A)$ eine beschränkte Menge in K. Nach Voraussetzung existieren ein Infimum α und ein Supremum β von B. Für $a = \tau_{x,y}^{-1}(\alpha)$ und $b = \tau_{x,y}^{-1}(\beta)$ werden wir zeigen, dass $A \setminus \{a, b\} = \,]a, b[\,$. Mit (1) ist klar, dass $A \setminus \{a, b\} \subseteq \,]a, b[\,$. Sei also $c \in \,]a, b[\,$, dann existieren $\delta, \varepsilon \in B$ mit

$$\alpha \le \delta \le \tau_{x,y}(c) \le \varepsilon \le \beta,$$

denn α ist Infimum und β ist Supremum. Die Fälle $\tau_{x,y}(c) = \delta$ bzw. $\tau_{x,y}(c) = \varepsilon$ sind trivial. Andernfalls folgt $c \in \left]\tau_{x,y}^{-1}(\delta), \tau_{x,y}^{-1}(\varepsilon)\right[\subseteq A$, weil A konvex ist. ∎

(7.16) Bemerkung. 1. Der Beweis zeigt auch, dass die Abbildungen $\tau_{x,y}$ konvexe Teilmengen von $\overline{x, y}$ auf konvex Teilmengen in K abbilden und umgekehrt.

2. Man kann die Punkte jeder Geraden G in einem angeordneten Raum auf genau zwei Weisen total anordnen, so dass die Ordnungsrelation mit der Zwischenfunktion verträglich ist, d. h. $(u|v, w) = -1 \iff v < u < w \vee w < u < v$. Genauer: Für feste $a, b \in G$, $a \neq b$, und alle $x, y \in G$ sei

$$a < b \quad \text{und} \quad x < y :\iff x \neq y \quad \text{und} \quad \begin{cases} (x|a, y)(a|b, x) = -1 & \text{falls } x \neq a \\ (a|b, y) = 1 & \text{falls } x = a \end{cases}$$

Die Wahl $b \prec a$ ergibt die andere, dazu duale Ordnungsrelation („dual“ bedeutet: $a < b \iff b \prec a$).

3. Ist der angeordnete Raum aus der vorigen Bemerkung ein $\mathrm{AG}(V, K)$, so ist die beschriebene Anodnung genau die mittels $\tau_{a,b}$ von K auf G übertrage. Die duale Anordnung ergibt sich, wenn man statt dessen $\tau_{b,a}$ benutzt.

Halbgeraden und Winkel

Dieser Abschnitt dient der Vorbereitung des folgenden Kapitels. Es sei ein angeordneter Raum $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ gegeben.

Definition. Für $a, b, c \in P$, $a \neq b, c$ heißt

$\overrightarrow{a, b} := \left\{x \in \overline{a, b};\ (a|b, x) = 1\right\}$ **Halbgerade**;

$\overset{\wedge}{\overrightarrow{a, b}} := \left\{x \in \overline{a, b};\ (a|b, x) = -1\right\}$ die dazu **komplementäre Halbgerade**;

$\angle(b, a, c) := (\overrightarrow{a, b}, \overrightarrow{a, c})$ **Winkel**;

und im Fall $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a, b}} \neq \varnothing \neq \overset{\wedge}{\overrightarrow{a, c}}$

$(\overset{\wedge}{\overrightarrow{a, b}}, \overset{\wedge}{\overrightarrow{a, c}})$ **Scheitelwinkel** von $\angle(b, a, c)$;

$(\overrightarrow{a, b}, \overset{\wedge}{\overrightarrow{a, c}})$ und $(\overset{\wedge}{\overrightarrow{a, b}}, \overrightarrow{a, c})$ **Nebenwinkel** von $\angle(b, a, c)$.

Beide sind in der Tat Winkel, denn es gilt

(7.17) *Es seien $a, b, c \in P$, $a \neq b, c$.*

(1) *Für alle $d \in \overrightarrow{a,b}$ ist $\overrightarrow{a,d} = \overrightarrow{a,b}$.*

(2) *Falls es ein $d \in \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$ gibt, dann ist $\overrightarrow{a,d} = \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$.*

(3) $\overline{a,b} = \overrightarrow{a,b} \,\dot\cup\, \{a\} \,\dot\cup\, \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$.

(4) *Für alle $b' \in \overrightarrow{a,b}$ und $c' \in \overrightarrow{a,c}$ gilt $\angle(b,a,c) = \angle(b',a,c')$.*

(5) *Ist $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}} \neq \varnothing \neq \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,c}}$, dann ist $(\overrightarrow{a,b}, \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,c}})$ Scheitelwinkel von $(\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}, \overrightarrow{a,c})$.*

Beweis. (1) Wir erhalten aus der Definition und der Kürzregel (7.5)

$$x \in \overrightarrow{a,d} \iff (a|d,x) = 1 \iff (a|b,x) = (a|d,x)(a|b,d) = 1 \iff x \in \overrightarrow{a,b}.$$

(2) $x \in \overrightarrow{a,d} \iff (a|d,x) = 1 \iff (a|b,x) = (a|d,x)(a|b,d) = -1 \iff x \in \overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$. (3) ist klar, (4) folgt direkt aus (1), und (5) folgt aus (2). ∎

(7.18) Bemerkung. 1. In dem angeordneten Raum $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ gebe es zu allen $a, b \in P$, $a \neq b$, ein Element c mit $(a|b,c) = -1$. Dann zerfällt jede Gerade G bezüglich jeden Punktes $a \in G$ gemäß (3) in drei disjunkte Teilmengen.

2. Die Voraussetzung in (2) (bzw. in 1.) ist wirklich nötig. Ein einfaches Beispiel erhält man indem man im $\mathbb{R}^2$ den abgeschlossenen Einheitskreis E (oder eine beliebige andere konvexe, abgeschlossene Teilmenge) betrachtet. Die Geraden seien die mit E geschnittenen Sekanten im $\mathbb{R}^2$ und die Anordnung sei vererbt. (Vgl. (7.3.4).)

   Für jeden Punkt a auf dem Rand und alle $b \neq a$ ist $\overrightarrow{a,b} = \overline{a,b} \cup \{a\}$ und $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}} = \varnothing$.

3. Für $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$ gibt es mit (2) also zwei Möglichkeiten $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}} = \varnothing$ oder $\overset{\wedge}{\overrightarrow{a,b}}$ ist eine Halbgerade.

8 Absolute Ebenen

Wir ergänzen §6 „Ebenen mit Kongruenz“ indem wir eine Anordnung einführen. Wir sprechen dann von „angeordneten Ebenen mit Kongruenz“. Gelegendlich betrachten wir auch „halbgeordneten Ebenen mit Kongruenz“. Vorweg sei bemerkt, dass jeder halbgeordnete Raum die in §6 mehrfach erwähnte „Austauscheigenschaft“ (siehe §9) besitzt. Daher können (und werden) wir die Resultate aus §6 benutzen.

Der Bequemlichkeit halber schreiben wir ab jetzt statt $\tilde{G}$ häufig schlicht G.

Es ist bemerkenswert, dass keine Vertäglichkeit mit der Anordnung gefordert werden muss. Sie ergibt sich über die Inzidenz gewissermaßen automatisch.

(8.1) *In jeder angeordneten Ebene mit Kongruenz* $(E, \mathfrak{G}, \equiv, \zeta)$ *gilt*

(WA) *Seien* $a, b, x \in E$ *nicht kollinear und* $x' \in E \setminus \{x\}$ *mit* $(a, b, x) \equiv (a, b, x')$, *so ist* $\overline{a, b} \cap\ ]x, x'[\ \neq \varnothing$.

Beweis. Sei $G = \overline{a, b}$ und $H = \overline{x, x'}$, dann gilt $G(x) = x'$. Setze $a' = H(a)$. Aufgabe 15 zeigt

$$\overline{a, x} \cap \overline{a', x'} = \varnothing \quad \text{und} \quad \overline{a, x'} \cap \overline{a', x} = \varnothing.$$

Nach (7.7.2) existiert $p \in\ ]a, a'[\ \setminus \overline{x, x'}$. Nach (PA) existiert oE $v = \overline{p, x} \cap\ ]a, x'[$ (sonst a und a' vertauschen). Wäre $(x|p, v) = -1$, so müsste die Gerade $\overline{a', x}$ das Dreieck a, v, p in einer weiteren Seite innerhalb schneiden. Es gilt aber $(a'|p, a) = 1$ und $\overline{a', x} \cap \overline{a, v} = \varnothing$. Das widerspricht dem Axiom von Pasch, und zeigt $(x|p, v) = 1$.

Analog findet man $(v|p, x) = 1$ indem man das Dreieck x, p, a' und die Gerade $\overline{a, x'}$ betrachtet.

Das zeigt $(p|x, v) = -1$. Wendet man nun (PA) auf das Dreieck x, x', v mit der Geraden $G = \overline{a, p}$ an, so folgt die Behauptung. ■

Definition. Eine angeordnete Ebene mit Kongruenz $(E, \mathfrak{G}, \equiv, \zeta)$ heißt **absolute Ebene**, wenn gilt

(WF) Seien $a, b, x \in E$, dann gibt es ein $c \in \overline{a, x}$ mit $(a, b) \equiv (a, c)$.

(8.2) Bemerkung. 1. Die Tatsache, dass (WA) (das Axiom regelt die Verträglichkeit von Kongruenz und Anordnung) für angeordnete Ebenen mit Konguenz aus den anderen Axiomen folgt wurde von Kreuzer 2006 entdeckt.

In halbgeordneten Ebenen mit Kongruenz ist das nicht der Fall (Ünung).

2. Mit den in §6 eingeführten Geradenspiegelungen kann man (WA) auch so formulieren: Für $G \in \mathfrak{G}$ und $x \in E \setminus G$ gilt $G \cap\ ]x, G(x)[\ \neq \varnothing$.

3. (WF) nennt man „Axiom von der freien Beweglichkeit“. Es erlaubt das Abtragen von „Strecken“ und kann — offenbar — ohne Bezug auf Anordnung formuliert werden. Vgl. auch die Übungen und das folgende Lemma.

4. (WF) ist nur für nicht kollinear a, b, x eine nicht triviale Forderung. Vgl. dazu die Übungen.

(8.3) *Sei* $(E, \mathfrak{G}, \equiv, \zeta)$ *eine absolute Ebene und* $a, b \in E$, $a \neq b$.

(1) *Es existiert genau ein* $b' \in \overline{a,b} \setminus \{b\}$ *mit* $(a, b) \equiv (a, b')$. *Es gilt dann* $(a|b, b') = -1$.

(2) *Es existiert genau ein Lot* $L \perp \overline{a,b}$ *mit* $a \in L$ ***(Lote errichten)****.*

(3) *Es seien* $c, d \in E$, $c \neq d$. *Dann existieren genau ein* $d' \in \overrightarrow{c,d}$ *und genau ein* $d'' \in \hat{\overrightarrow{c,d}}$ *mit* $(a, b) \equiv (c, d') \equiv (c, d'')$.

(4) *Es existiert ein Mittelpunkt* m *von* a, b.

(5) *Es existiert ein Mittellot* M *von* a, b*, d.h.* $M \perp \overline{a,b}$ *und* $\tilde{M}(a) = b$.

Beweis. Nach Aufgabe I.50 gilt folgender

Hilfssatz: Sind $a, b, b' \in E$ kollinear und verschieden mit $(a, b) \equiv (a, b')$, dann existiert ein Mittellot M von b, b' und $a \in M$.

(1) Es sei $G \in \mathfrak{G}$ und $x \in E \setminus G$. Nach (WA) gibt es $u = G \cap \overline{x, G(x)}$ und $(u|x, G(x)) = -1$. Weiter gilt $(u, x) \equiv (u, G(x))$. Sei $x' \in \overline{x, G(x)}$ ein weiterer Punkt mit $(u, x) \equiv (u, x')$. Nach dem Hilfssatz existieren Mittellote M, M' von x, x' und $G(x), x'$. Dabei gilt $u \in M \cap M'$. Somit folgt aus (WA) $(u|x, x') = (u|G(x), x') = -1$ und aus der Kürzregel (7.5) $(u|x, G(x)) = (u|x, x') \cdot (u|G(x), x') = 1$ — ein Widerspruch.

Somit ist $\mathcal{E}(u, x)$ aus Aufgabe I.52 gezeigt. Diese Aufgabe liefert jetzt auch die erste Behauptung. Die Zweite ergibt sich aus dem Hilfssatz und (WA).

(2) Wie in (1) existiert b', und nach dem Hilfssatz existiert ein Mittellot von b und b'. Wieder mit (1) und (6.22.2) ist es eindeutig.

(3) Aufgabe 1, (1) und (7.17.2).

(4) Sei $G = \overline{a,b}$. Wegen (2) und (3) existieren $x, y \in E \setminus G$ mit $\overline{a,x}, \overline{b,y} \perp G$ und $(a, x) \equiv (b, y)$.

(PA) mit dem Dreieck $x, \tilde{G}(x), y$ und der Geraden G liefert $G \cap \,]x, y[\, \neq \varnothing$ oder $G \cap \left]\tilde{G}(x), y\right[\neq \varnothing$. Wir können also oE die Existenz von $m := G \cap \,]x, y[$ annehmen. Nach (W1) gibt es genau ein $m' \in G$ mit $(a, b, m) \equiv (b, a, m')$.

Nach Aufgabe 13 gilt $(a, y) \equiv (b, x)$. Daher folgt mit (W2) $(x, m) \equiv (y, m')$ und $(x, m') \equiv (y, m)$. Zusammengefasst bedeutet das $(x, m, y) \equiv (y, m', x)$. Wegen (6.7.1) sind daher x, m', y kollinear. Das erzwingt aber $m = m'$ und die Behauptung folgt.

(5) Errichte das Lot M auf G in m. ■

Bemerkung. 1. Für die ersten beiden Aussagen ist nur (WA) nötig, nicht aber (WF).

2. Die Aussage (1) stellt sicher, dass komplementäre Halbgeraden stets nicht leer, also wirklich Halbgeraden sind, vgl. (7.17.2) und (7.18.1).

(8.4) Beispiele. Sei (E, K) eine quadratische Körpererweiterung mit einem involutorischen Automorphismus $^- : E \to E$ dessen Fixkörper K ist (vgl. (§6)). Weiter trage K eine Halbordnung P, so dass die euklidische Ebene $(E, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(E, K)$ halbgeordnet ist.

1. $(E, \mathfrak{G})$ erfüllt (WA) genau dann, wenn $-1 \notin P$. Das erkennt man wie in Aufgabe 11.

   Insbesondere ist (WA) für alle angeordneten Körper erfüllt (das gilt auch schon wg. (8.1)).

2. $(E, \mathfrak{G})$ ist eine absolute Ebene genau dann, wenn $E = K(i)$ und wenn K pythagoräisch ist (d. h. für alle $a \in K$ gilt $1 + a^2 \in K^\square$).

   Wir *begründen* hier nur „$\Longleftarrow$“ — dazu genügt es (WF) zu zeigen: Seien $a, b, x \in E$. Wegen der Translationsinvarianz aller beteiligten Relationen, kann man oE $a = 0$ annehmen. Nach Voraussetzung gilt $b = b_1 + ib_2, b_\ell \in K$, und

   $$b\bar{b} = b_1^2 + b_2^2 = b_1^2\big(1 + (b_1^{-1}b_2)^2\big) \in K^\square, \quad \text{etwa} \quad b\bar{b} = \beta^2 \quad (\beta \in K).$$

   Gesucht ist $\lambda \in K$ bzw. $c = \lambda x$ mit $(b, 0) \equiv (c, 0) \iff c\bar{c} = b\bar{b} = \beta^2$. Es gibt $\xi \in K$ mit $x\bar{x} = \xi^2$. Somit gilt

   $$c\bar{c} = \lambda^2 x\bar{x} = \lambda^2\xi^2 \overset{!}{=} \beta^2 = b\bar{b} \iff \lambda^2 = (\beta\xi^{-1})^2.$$

   Offenbar ist $\lambda = \beta\xi^{-1}$ eine Lösung und (WF) ist gezeigt.

   Dass es genau eine weitere Lösung $\lambda = -\beta\xi^{-1}$ gibt, entspricht der Aussage (8.3.3).

3. Ist $(E, \mathfrak{G})$ eine stetige absolute Ebene (vgl. (7.15)), so gibt es genau zwei Beispiele:

   - die reelle euklidische Ebene (Anschauungsebene), gebildet wie oben mit $E = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$.
   - die reelle hyperbolische Ebene wie in §6 beschrieben.

(8.5) *In einer absolute Ebene $(E, \mathfrak{G})$ lässt jede Geradenspiegelung die Zwischenfunktion invariant. Genauer:*

$$\forall G \in \mathfrak{G},\ \forall (a, b, c) \in E^{(3)} \quad \textit{gilt} \quad \big(G(a)|G(b), G(c)\big) = (a|b, c).$$

Weiter gilt für alle $a, b \in E,\ a \neq b,\ G \in \mathfrak{G}$

(1) $G\big(\overrightarrow{a,b}\big) = \overrightarrow{G(a), G(b)}$;

(2) $G\big(\,]a,b[\,\big) = \,]G(a), G(b)[\,.$

Beweis. Sei $A := \overline{a,b}$.

Der Fall $A = G$ ist trivial. Wegen Symmetrie kann daher oE $b \notin G$, also $G(b) \neq b$ angenommen werden.

Im Fall $A \not\perp G$ gilt $G(A) \neq A$.

Ist $a \notin G$ gilt $\overline{a, G(a)} \cap \overline{b, G(b)} = \varnothing$ nach (6.22.1). Entsprechend erhält man $c \in G$ oder $\overline{a, G(a)} \cap \overline{c, G(c)} = \varnothing$. Daher liefert (7.6) die Behauptung.

Der Fall $a \in G$ führt auf $\overline{b, G(b)} \cap \overline{c, G(c)} = \varnothing$ (außer im trivialen Fall $b = c$) und mit (7.6) ebenfalls auf die Behauptung.

Im Fall $A \perp G$ gilt nach (WA) $\varnothing \neq A \cap G =: x$. Nach (WF) existiert $b' \in G$ mit $(b,x) \equiv (b',x) \equiv \big(G(b), x\big)$. Nach (6.22) sind die Geraden $L := \{x \perp \overline{b,b'}\}$ und $L' := \{x \perp \overline{G(b), b'}\}$ Mittellote von b, b' bzw. $G(b), b'$. Es gilt $L'LA(b) = G(b)$ und nach dem Dreispiegelungssatz (6.27) folgt daraus $L'LA = G$. Nach den vorigen Fällen gilt

$$(a|b,c) = \big(LA(a)|LA(b), LA(c)\big) = \big(L'LA(a)|L'LA(b), L'LA(c)\big) = \big(G(a)|G(b), G(c)\big).$$

Das zeigt die Behauptung.

(1) und (2) sind jetzt offensichtlich. ■

Wie wir das schon für euklidische Ebenen bezeigt haben, kann man auch bei absoluten Ebenen jede Bewegung als Produkt von Geradenspiegelungen darstellen. Insbesondere lassen Bewegungen damit die Zwischenfunktion invariant.

(8.6) Satz. *Sei $(E, \mathfrak{G})$ eine absolute Ebene mit Bewegungsgruppe $\mathcal{B}$.*

(1) *$\mathcal{B}$ operiert transitiv auf der Menge kongruenter Punktepaare.*

Genauer: Zu je zwei Paaren von Punkten (a,b) und (c,d) mit $(a,b) \equiv (c,d)$ existiert ein $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$.

(2) *Die Abbildung φ aus (1) ist das Produkt von höchstens zwei Geradenspiegelungen.*

(3) *Jedes Element aus $\mathcal{B}$ ist das Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen.*

(4) *Jede Bewegung $\varphi \in \mathcal{B}$ lässt die Zwischenfunktion invariant.*

Beweis. (1) Sei G das Mittellot von a, c. Es gilt dann $(c, G(b)) \equiv (c,d)$. Daher existiert ein Mittellot H von $G(b), d$ und $c \in H$. Im Fall $G(b) = d$ gilt $H = \overline{c,d}$. Die Behauptung folgt mit $\varphi = HG$. Zugleich ist (2) gezeigt.

(3) Übung und (4) aus (3) und (8.5). ■

(8.7) Bemerkung. 1. Im Unterschied z. B. zur „Orientierung" schränkt die Anordnung die Menge der verträglichen Bewegungen nicht ein.

2. Die Aussage (1) kann man auch so ausdrücken:

   Die Bahnen der von $\mathcal{B}$ auf $E \times E$ induzierten Wirkung sind genau die Äquivalenzklassen der Relation „$\equiv$". D. h., dass die Kongruenzrelation durch die Gruppe $\mathcal{B}$ eindeutig festgelegt ist.

Es folgen noch einige klassische Aussagen, die zumindest implizit schon in ihrer Formulierung Anordnung voraussetzen.

(8.8) *Sei $(E, \mathfrak{G})$ eine absolute Ebene und $a, b, a', b' \in E$, $a \neq b, a' \neq b'$. Für $c \in \overrightarrow{a, b}$, $c' \in \overrightarrow{a', b'}$ mit $(a, b) \equiv (a', b')$ und $(a, c) \equiv (a', c')$ gilt $(b, c) \equiv (b', c')$.*

Beweis. Übung! ■

Definition. Für $a, b, c, a', b', c' \in E$, $a \neq b, c$, $a' \neq b', c'$, heißen die zwei Winkel $\angle(b, a, c)$ und $\angle(b', a', c')$ **kongruent**, i. Z. $\angle(b, a, c) \equiv \angle(b', a', c')$, wenn für $b_0 \in \overrightarrow{a, b}$, $c_0 \in \overrightarrow{a, c}$, $b'_0 \in \overrightarrow{a', b'}$, $c'_0 \in \overrightarrow{a', c'}$ gilt

$$(a, b_0) \equiv (a, c_0) \equiv (a', b'_0) \equiv (a', c'_0) \implies (b_0, c_0) \equiv (b'_0, c'_0).$$

(8.9) *Es seien $a, b, c, a', b', c' \in E$ mit $(a, b) \equiv (a, c) \equiv (a', b') \equiv (a', c')$ und $(b, c) \equiv (b', c')$, also $\angle(b, a, c) \equiv \angle(b', a', c')$. Dann gilt für alle $b_0 \in \overrightarrow{a, b}$, $c_0 \in \overrightarrow{a, c}$, $b'_0 \in \overrightarrow{a', b'}$, $c'_0 \in \overrightarrow{a', c'}$ mit $(a, b_0) \equiv (a, c_0) \equiv (a', b'_0) \equiv (a', c'_0)$ auch $(b_0, c_0) \equiv (b'_0, c'_0)$.*

D. h. die Kongruenz von Winkeln ist unabhängig von der Wahl der b_0, c_0, b'_0, c'_0.

Beweis. Übung! ■

(8.10) *Scheitelwinkel und Nebenwinkel sind jeweils kongruent.*

Beweis. Übung! ■

Ein Tripel (a, b, c) nicht kollinearer Punkte heißt **Dreieck**.

(8.11) Kongruenzsätze. *Für zwei Dreiecke (a, b, c) und (a', b', c') in der absoluten Ebene $(E, \mathfrak{G}, \equiv, \zeta)$ sind folgende Aussagen äquivalent*

(BW) *Es existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $\varphi(c) = c'$.*

(SSS) $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$

(SWS) $(a, b) \equiv (a', b')$, $(a, c) \equiv (a', c')$, *und* $\angle(b, a, c) \equiv \angle(b', a', c')$

(WSW) $(a,b) \equiv (a',b')$, $\angle(b,a,c) \equiv \angle(b',a',c')$ *und* $\angle(a,b,c) \equiv \angle(a',b',c')$.

Beweis. Wegen (8.3.1) und (WF) existieren je genau ein $c_0 \in \overrightarrow{a,c}$ und $c_0' \in \overrightarrow{a',c'}$ mit $(a,b) \equiv (a,c_0) \equiv (a',c_0')$. Nach (8.8) gilt dann sogar $(a,c,c_0) \equiv (a',c',c_0')$.

Daher zeigt (W2) beide Richtungen von (SSS) $\Longleftrightarrow$ (SWS).

Genauso erhält man (SSS) $\Longrightarrow$ (WSW).

(WSW) $\Longrightarrow$ (SWS): Nach (8.3.3) existiert genau ein $c'' \in \overrightarrow{b',c'}$ mit $(b,c) \equiv (b',c'')$. Wegen (SSS) $\Longleftrightarrow$ (SWS) folgt $\angle(b',a',c'') \equiv (b,a,c)$. Für $c_0'' \in \overrightarrow{a',c''}$ mit $(a,b) \equiv (a',c_0'')$ gilt also $(b',c_0') \equiv (b,c_0) \equiv (b',c_0'')$. Nach (W3) muss $c_0' = c_0''$ oder $G := \overline{a',b'} \cap \,]c_0',c_0''[\, \neq \varnothing$ gelten.

Wir führen die zweite Möglichkeit zum Widerspruch.

(PA) für das Dreieck (c_0',c_0'',c'') liefert $G \cap \,]c_0',c''[\, \neq \varnothing$, denn $(a'|c_0'',c'') = 1$.

(PA) für das Dreieck (c_0',c'',c') liefert $G \cap \,]c',c''[\, \neq \varnothing$, denn $(a'|c_0',c') = 1$.

Es gilt aber $G \cap \overline{c',c''} = b'$ und $(b'|c',c'') = 1$ — ein Widerspruch. Daher ist nur $c_0' = c_0''$ möglich. Dann gilt aber auch $c' = c''$ und (SWS) gilt mit dem Winkel $\angle(a,b,c) \equiv \angle(a',b',c')$.

(BW) $\Longrightarrow$ (SSS) ist trivial.

(SSS) $\Longrightarrow$ (BW): Nach (8.6.1) gibt es eine Bewegung ψ mit $\psi(a) = a'$, $\psi(b) = b'$. Setze $c'' = \psi(c)$. Im Fall $c' = c''$ sind wir fertig. Gilt $c' \neq c''$, so ist $G = \overline{a',b'}$ nach (6.17) ein Mittellot von c',c''. Daher leistet $\varphi = G\psi$ das Gewünschte. ∎

Wenn eine und damit alle dieser Aussagen erfüllt sind, dann sagt man die Dreiecke sind **kongruent**.

(8.12) Bemerkung. 1. φ aus (BW) ist nach (6.20.3) eindeutig bestimmt. Die Aussage entspricht der in Schulen üblichen Definition von „kongruent“ als „deckungsgleich“.

2. In einer absoluten Ebene gibt es zu jeder Geraden G und jedem Punkt $x \notin G$ eine „Nichtschneidende“ durch x; nämlich $H = \{x \perp \{x \perp G\}\}$ (für $z = G \cap H$ wären G und H Lote durch z auf $\{x \perp G\}$, ein Widerspruch zu (6.22.1)).

3. Bereits ca. 300 v.Chr. wurden (erstmals in der bekannten Geschichte!) Axiome für die Geometrie formuliert und in Euklids „Elemente der Mathematik“ veröffentlicht. Dieses Buch diente bis ins 19. Jahrhundert als Lehrbuch (nicht nur für Geometrie). Es gehört zu den meistgedruckten Büchern überhaupt.

4. Bis ins 19. Jahrhundert wurde versucht, das Parallelenaxiom aus den anderen Euklidischen Axiomen abzuleiten. Erst die Entdeckung der „nicht-Euklidischen“ Geometrie durch Bolyai und Lobatschevski zeigte, dass dies nicht möglich ist.

5. Eine erste moderne Ergänzung und Vervollständigung (z.B. mit Anordnung) der Euklidischen Axiome erfolgte durch Pasch, Hilbert, u. a. gegen Ende des 19. Jahrhunderts. Diese Entwicklung stand im Kontext einer umfassenden Diskussion über die Grundlagen der Mathematik.

6. Die hier präsentierten Axiome gehen auf Sörensen ca. 1996 zurück.

7. Die Axiome für die absoluten Ebenen verzichten auf ein Axiom über die Existenz von „Nichtschneidenden". Dabei gibt es grundsätzlich drei Möglichkeiten:
   Sei $G \in \mathfrak{G}$, $x \in E \setminus G$

   (i) $\exists_1 H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \varnothing$ (Euklidischer oder parabolischer Fall)

   (ii) $\exists H, H' \in \mathfrak{G}$ mit $x = H \cap H'$ und $G \cap H = G \cap H' = \varnothing$ (hyperbolischer Fall)

   (iii) $\nexists H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \varnothing$ (elliptischer Fall)

   Wegen 2. entfällt der Fall (iii) für die absolute Geometrie. Als diese Dinge im 19. Jahrhundert untersucht wurden, gab es aber noch keine vollständige Axiomatik für die absolute Geometrie; insbesondere stand die Untersuchung der Anordnung erst am Anfang.

8. Offenbar bedeutet (iii), dass eine projektive Ebene vorliegt.

9. Die Bezeichnungen parabolisch, hyperbolisch und elliptisch stammen von Felix Klein.

9 Austauschräume

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Eine Teilmenge $U \subseteq P$ heißt **Unterraum** (**Teilraum**), wenn gilt $\forall x, y \in U, x \neq y : \overline{x, y} \subseteq U$. Für $\mathfrak{G}(U) := \{G \in \mathfrak{G} \mid G \subseteq U\}$ ist $(U, \mathfrak{G}(U))$ dann selbst ein Inzidenzraum.

Es bezeichne $\mathfrak{U}$ die Menge aller Unterräume von P.

(9.1) Beispiele. (1) Minimalmodell der affinen Ebene (vgl. (1.1.1)): Es gilt $\mathfrak{U} = \mathcal{P}(P)$.

(2) Für jeden Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ gilt

$$\varnothing \in \mathfrak{U}, \quad \forall x \in P : \{x\} \in \mathfrak{U}, \quad \forall G \in \mathfrak{G} : G \in \mathfrak{U}, \quad P \in \mathfrak{U}.$$

(3) Betrachte den near-pencil für $n = 4$ (also $P = \{x_0, \ldots, x_4\}$).
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathfrak{U}$, aber $\{x_0, x_1, x_2\} \notin \mathfrak{U}$.

(9.2) *Sei $\mathfrak{U}$ die Menge der Unterräume eines Inzidenzraums und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$, dann gilt $\bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U \in \mathfrak{U}$. D. h. der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume ist wieder ein Unterraum.*

Beweis. Sei $T := \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U$ und $x, y \in T$ mit $x \neq y \implies \forall U \in \mathfrak{A}$ gilt

$$x, y \in U \implies \forall U \in \mathfrak{A} : \overline{x, y} \subseteq U \implies \overline{x, y} \subseteq T \implies T \in \mathfrak{U}.$$

∎

Man sagt, die Menge $\mathfrak{U}$ der Unterräume eines Inzidenzraums P sei $\cap$-abgeschlossen:

Definition. Ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ von Teilmengen einer Menge P heißt **durchschnitts-abgeschlossen** (auch **$\cap$-abgeschlossen**), wenn für alle $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ gilt $\bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U \in \mathfrak{U}$. Das Paar $(P, \mathfrak{U})$ heißt dann **$\cap$-abgeschlossener Raum**.

(9.3) Beispiele. (1) Die Menge aller Untergruppen (und die Menge aller Normalteiler) einer Gruppe ist $\cap$-abgeschlossen.

(2) Die Menge aller Untervektorräume eines Vektorraums ist $\cap$-abgeschlossen.

(3) Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes ist $\cap$-abgeschlossen.

(4) Die Menge aller konvexen Teilmengen in $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ ist $\cap$-abgeschlossen.

Definition. Für $\cap$-abgeschlossene Räume $(P, \mathfrak{U})$ kann man eine **Hülle** von $X \subseteq P$ definieren durch $\overline{X} := \bigcap_{U \in \mathfrak{U}, X \subseteq U} U \in \mathfrak{U}$. Man sagt auch „$X$ erzeugt $\overline{X}$“.

Bemerkung. 1. Es gilt $X \in \mathfrak{U} \iff X = \overline{X}$.

2. Man spricht vom „erzeugten“ Untervektorraum, von der „erzeugten“ Untergruppe, und vom „erzeugten“ Unterraum eines Inzidenzraums.

3. Ziel ist eine präzise Fassung des Dimensionsbegriffs.

   Eine Teilmenge B von P werden wir **Basis** nennen, wenn sie ein „unabhängiges“ Erzeugendensystem ist. Dann kann man definieren: $\dim \overline{B} = |B| - 1$.

   Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

   (i) Die Existenz von Basen muss gesichert sein

   (ii) Je zwei Basen müssen „gleichmächtig“ sein.

4. Bei Vektorräumen, affinen und projektiven Räumen gelten (i) und (ii).

5. In allgemeinen Inzidenzräumen gelten weder (i) noch (ii).

6. Gesucht ist eine einfache Eigenschaft, die (i) und (ii) sicher stellt — das ist die Austauschbedingung.

(9.4) *Sei $(P, \mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum. Die Abbildung*

$$\overline{} : \mathcal{P}(P) \to \mathfrak{U};\ X \mapsto \overline{X} := \bigcap_{X \subseteq U \in \mathfrak{U}} U$$

ist ein ***Hüllenoperator****, d.h. es gilt für alle $X, Y \subseteq P$*

(H1) $X \subseteq \overline{X}$

(H2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

(H3) $X \subseteq Y \implies \overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Beweis. Übung. ∎

Definition. Sei $(P, \mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum und $\overline{}$ der induzierte Hüllenoperator. Dann ist für $U \in \mathfrak{U}$ die **Dimension** von U definiert durch

$$\dim U := \inf \left\{ |X|\,;\ X \subseteq P \wedge \overline{X} = U \right\} - 1.$$

$X \subseteq P$ heißt **unabhängig**, falls $\forall Y \subsetneq X : \overline{Y} \subsetneq \overline{X}$.

$X \subseteq U \in \mathfrak{U}$ heißt **Erzeugendensystem** von U, falls $\overline{X} = U$.

$X \subseteq U \in \mathfrak{U}$ heißt **Basis** von U, falls X unabhängig und Erzeugendensystem von U ist.

(9.5) Bemerkung. (0) Aus $Y \subseteq \overline{X}$ folgt $\overline{Y \cup X} = \overline{X}$ (Definition von $\overline{}$!). Insbesondere gilt für $X \subseteq P$, unabhängig und $x \in X$ stets $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$ (denn $x \in \overline{X \setminus \{x\}} \implies \overline{X} = \overline{X \setminus \{x\}}$ — ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von X!).

(1) Es gilt $\mathfrak{U} = \{\overline{X}\,;\, X \subseteq P\}$. Auf diese Weise kann man einen $\cap$-abgeschlossenen Raum auch mit Hilfe einer Hüllenoperation definieren. Übung.

(2) Wir werden im Folgenden stets ohne viel Aufhebens zwischen dem Mengensystem $\mathfrak{U}$ und dem Hüllenoperator hin und her springen.

(3) Im Allgemeinen ist in $(P, \mathfrak{U})$ die Existenz von Basen nicht gegeben.

(4) Im Allgemeinen sind verschiedene Basen, sofern existent, nicht gleichmächtig.

(5) Gibt es ein endliches $Y \subseteq P$ mit $\overline{Y} = P$, dann ist die Menge $B \subseteq P$ mit $|B|$ minimal und $\overline{B} = P$ eine Basis von P. In diesem Fall existieren also Basen.

Beweis. Wäre B abhängig, dann gäbe es ein $x \in B$ mit $\overline{B \setminus \{x\}} = \overline{B}$, im Widerspruch zu Minimalität. ∎

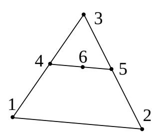
(6) Es gibt Inzidenzräume in denen jede unabhängige Menge endlich, und jedes Erzeugendensystem unendlich ist. Dann gibt es also weder Basen, noch minimale Erzeugendensysteme.

(9.6) Beispiele. (0) Natürlich sind Untermengen unabhängiger Mengen wieder unabhängig.

(1) Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Dann ist $\varnothing$ eine Basis von $\varnothing \in \mathfrak{U}$ (und $\dim \varnothing = -1$), $\{x\}$ ist Basis von $\{x\} \in \mathfrak{U}$ (und $\dim\{x\} = 0$), $\{x, y\}, x \neq y$, ist Basis von $G \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{U}$, wenn $x, y \in G$ (und $\dim G = 1$).

(2) Minimalmodell der projektiven Ebene (vgl. (1.1.4)): Unabhängige Teilmengen sind $\varnothing$, $\{x\}$, $\{x, y\}$ (mit $x \neq y$) und $\{x, y, z\}$ mit nicht kollinearen x, y, z. Die $\{x, y, z\}$ sind sogar Basen, und alle Basen in diesem Fall gleichmächtig. Also $\dim P = 2$.

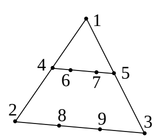
(3) Ergänze die abgebildete Figur durch Verbinden aller Paare von unverbundenen Punkten mit zwei-punktigen Geraden (also sind z. B. 1 und 6 zu verbinden). Dann ist $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Es ist $\{1, 2, 3\}$ eine Basis von P, aber $\{1, 2, 6\}$ ist nur Basis von $\{1, 2, 6\}$ und kann nicht zu einer Basis von P ergänzt werden.



(4) Vgl. Beispiel (1.1.2): $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{G} = \{\{x_i, x_j\}\,;\, i \neq j\}$. Jede Teilmenge $U \subseteq P$ ist ein Unterraum mit U als Basis, also $\dim P = n$.

Im Fall $n = 3$ ergibt sich das Minimalmodell der affinen Ebenen (mit der Dimension 3). Es handelt sich um das einzige Beispiel einer affinen Ebene mit $\dim \neq 2$.

(5) Ergänze die Figur wieder zu einem Inzidenzraum, wie oben beschrieben. Dann gilt: $|P| = 9$, $|\mathfrak{G}| = 22$, $\overline{\{1, 2, 3\}} = P$ und $\{1, 2, 3\}$ ist Basis von P ($\implies \dim P = 2$).



$\overline{\{6,7,8,9\}} = P$, $\overline{\{6,7,8\}} = \{4,5,6,7,8\}$, $\overline{\{6,7,9\}} = \{4,5,6,7,9\}$, $\overline{\{6,8,9\}} = \{6,2,3,8,9\}$, $\overline{\{7,8,9\}} = \{7,2,3,8,9\}$. Da also keine echte Untermenge von $\{6,7,8,9\}$ ganz P erzeugt, ist auch $\{6,7,8,9\}$ eine Basis von P.

(9.7) *In jedem Inzidenzraum $(P,\mathfrak{G})$ gilt die **Endlichkeitsbedingung**:*
Sei $X \subseteq P$ und $x \in \overline{X}$, dann existiert $R \subseteq X$ mit $|R| \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{R}$.

Beweis. Sei $X \subseteq P$ und

$$Q := \{x \in P\,;\ \exists R \subseteq X \text{ mit } |R| \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \overline{R}\} = \bigcup_{R \subseteq X, |R| \in \mathbb{N}} \overline{R}$$

Offensichtlich gilt $X \subseteq Q \subseteq \overline{X}$. Wenn wir zeigen, dass Q ein Unterraum ist, dann erhält man $X \subseteq Q \implies \overline{X} \subseteq \overline{Q} = Q \implies \overline{X} = Q$. Insbesondere gilt

$$x \in \overline{X} \implies x \in Q \implies x \in \overline{R} \quad \text{für ein} \quad R \subseteq X \quad \text{mit} \quad |R| \in \mathbb{N},$$

was die Behauptung zeigt.
Seien also $x, y \in Q, x \neq y$. Zu x, y existieren dann $R_x, R_y \subseteq X$ mit $|R_x|, |R_y| \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{R_x}$, $y \in \overline{R_y}$. Dann gilt

$$|R_x \cup R_y| \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \overline{R_x}, \overline{R_y} \subseteq \overline{R_x \cup R_y}, \quad \text{also} \quad \overline{x,y} \subseteq \overline{R_x \cup R_y} \subseteq Q.$$

Somit ist Q Unterraum. ■

Definition. Sei $(P,\mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum, der die Endlichkeitsbedingung erfüllt. Dann heißt $(P,\mathfrak{U})$ **Austauschraum**, wenn das folgende **Austauschaxiom** gilt:

(AA) Für alle $S \subseteq P$ und $x, y \in P$ gilt: $\quad x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S} \implies y \in \overline{S \cup \{x\}}$.

Ist $(P,\mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum, so nennen wir auch $(P,\mathfrak{G})$ einen **Austauschraum**.

(9.8) Beispiele. 1. Unterräume von Austauschräumen sind Austauschräume.

2. Affine und projektive Ebenen sind Austauschräume. Beweis später.

3. Jeder nicht-triviale halbgeordnete Raum ist ein Austauschraum (Kreuzer, ca. 1990).

4. Vgl. Beispiel (9.6.3): $(P,\mathfrak{G})$ ist kein Austauschraum. Gegenbeispiel: $S = \{1,6\}$, $x = 2$, $y = 5$. Dann $x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S} = P \setminus S$, aber $y \notin \overline{S \cup \{x\}} = \{1,2,6\}$.

5. Auch Beispiel (9.6.5) ist kein Austauschraum.

6. Jeder Vektorraum ist ein Austauschraum (wie ist das gemeint?).

7. Gruppen mit ihren Untergruppen erfüllen das Austauschaxiom i. A. nicht.

(9.9) *Sei $(P, \mathfrak{U})$ ein Austauschraum. Dann gilt:*

(1) *Sei $X \subseteq P$ unabhängig und $y \in P \setminus \overline{X}$. Dann ist $X \cup \{y\}$ unabhängig.*

(2) *$X \subseteq P$ ist Basis von $P \iff X$ ist maximal unabhängige Teilmenge von P (d.h. für unabhängige $Y \subseteq P$ mit $X \subseteq Y$ gilt $X = Y$).*

(3) *Sei X ein Erzeugendensystem von P und $B \subseteq X$ maximal unabhängig in X. Dann ist B Basis von P.*

Beweis. Übung!

(2) „$\Longrightarrow$“: Sei X Basis von P. Ist $X \subsetneq Y \subseteq P$, Y unabhängig, dann gilt $Y \subseteq \overline{Y} = \overline{X} = P$ (wegen $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$) — ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von Y. Also folgt die Behauptung.

„$\Longleftarrow$“: Angenommen X ist maximal unabhängig und $P \neq \overline{X}$, dann existiert $y \in P \setminus \overline{X}$ und wegen (1) ist $X \cup \{y\}$ unabhängig — ein Widerspruch zur Maximalität von X. Daher gilt $P = \overline{X}$ und X ist Basis von P.

(3) Zu zeigen: $\overline{B} = P$. Für $\overline{B} \subsetneq P$ existiert $x \in X \setminus \overline{B}$ (da $B \subseteq X$ und $\overline{X} = P$). Dann ist $B \cup \{x\} \subseteq X$ unabhängig wegen (1), ein Widerspruch. Also ist B Basis von P. ∎

Intermezzo: Mengenlehre

Auswahlaxiom. Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Abbildung

$$f : \mathfrak{M} \to \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \quad \text{mit} \quad \forall M \in \mathfrak{M} : f(M) \in M,$$

genannt **Auswahlfunktion**.

Äquivalent dazu ist

Zornsches Lemma. [10] *Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Falls für alle $K \subseteq M, K \neq \varnothing$, mit $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$ (d. h. $(K, \leq)$ ist total geordnet und heißt dann **Kette**) ein $m \in M$ existiert mit $\forall x \in K : x \leq m$ (d. h. m ist **obere Schranke**), dann besitzt M maximale Elemente.*

Definition. Zwei Mengen A, B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Man schreibt dann $|A| = |B|$.

Falls $|A| = |\{1, \ldots, n\}|$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $|A| = n$.

[10] Von Kuratowsky 1922 gefunden und 1935 von Zorn wiederentdeckt.

Beispiel. Bezeichne $2\mathbb{N} := \{2n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Dann ist $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N};\ n \mapsto 2n$ bijektiv, d. h. $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$, obwohl $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$.

Bemerkung. (1) $|A|$ nennt man **Kardinalzahl** von A (eine Definition des Begriffs ist nicht trivial und benötigt das Auswahlaxiom). (2) A heißt **unendlich**, wenn es $B \subsetneq A$ gibt mit $|A| = |B|$.

(3) $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl (genannt „abzählbar unendlich“). Es gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

(4) Es gilt $|\mathbb{N}| \lneqq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Für Mengen A, B schreibt man

$$\begin{aligned} |A| \leq |B| \quad &\iff \quad \exists f : A \to B \text{ injektiv} \iff \exists C \subseteq B :\ |A| = |C| \\ &\iff \quad \exists g : B \to A \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Für die letzte Biimplikation wird das Auswahlaxiom benötigt.

(9.10) Satz (Schröder-Bernstein). *Seien A, B Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$. Dann gilt $|A| = |B|$.*

Beweis. Nicht trivial! Siehe z. B. [2]. ∎

Seien A, B Mengen. Wir setzen $\quad |A| + |B| = |A \dot\cup B| \quad$ und $\quad |A| \cdot |B| = |A \times B|$.

Für natürliche Zahlen ergeben sich das gewohnte „+“ und „·“.

Rechenregeln. *Seien A, B nicht-leere Mengen. Dann gilt*

(1) $|A| + |B| = |B| + |A| \quad$ *und* $\quad |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$.

(2) $|A| \notin \mathbb{N} \implies |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\} = |A| \cdot |B|$.

Bemerkung. 1. Der Beweis von (2) ist nicht ganz trivial.

2. Sei A unendlich. Dann folgt $|A^n| = |A|^n = |A|$ aus den Rechenregeln. Insbesondere gilt $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ und $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.

Basen in Austauschräumen

In diesem Abschnitt beweisen wir die zentralen Sätze für Austauschräume. Damit ergänzen wir auch die lineare Algebra, in der diese Sätze meist nur für endlich erzeugte Vektorräume gezeigt werden.

(9.11) Basisergänzungssatz. *Sei* $(P, \mathfrak{U})$ *ein Austauschraum und* $X \subseteq P$ *ein Erzeugendensystem von* P*, das eine unabhängige Menge* L *enthält. Dann existiert eine Basis* B *von* P *mit der Eigenschaft* $L \subseteq B \subseteq X \subseteq P$*.*

Beweis. Sei $\mathfrak{X} := \{A \subseteq X\,;\ L \subseteq A \text{ und } A \text{ unabhängig}\}$. Wegen $L \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Die Inklusion „$\subseteq$" ist eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{K}$ eine Kette in $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ und $T := \bigcup_{S \in \mathfrak{K}} S \subseteq X$. Wäre T abhängig, so gäbe es $x_0 \in T$ mit $\overline{T \setminus \{x_0\}} = \overline{T}$. Wegen der Endlichkeitsbedingung existieren $x_1, \ldots, x_n \in T \setminus \{x_0\}$ mit $x_0 \in \overline{\{x_1, \ldots, x_n\}}$. Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ existieren $S_i \in \mathfrak{K}$ mit $x_i \in S_i$. Da $\mathfrak{K}$ Kette ist, existiert i_0 mit $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : S_i \subseteq S_{i_0}$. Somit ist $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq S_{i_0}$ unabhängig, ein Widerspruch zu $x_0 \in \overline{\{x_1, \ldots, x_n\}}$. Daher ist T unabhängig, also $T \in \mathfrak{X}$, und somit ist T obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Nach dem Zornschen Lemma existiert $B \in \mathfrak{X}$ maximal. B ist dann maximal unabhängig in X. Wegen (9.9.3) ist B Basis von P. ■

Bemerkung. Aus dem Basisergänzungssatz folgt insbesondere die Existenz von Basen in beliebigen Austauschräumen $(P, \mathfrak{U})$ — betrachte den Fall $L = \varnothing$ und $X = P$.

(9.12) Satz über die Gleichmächtigkeit von Basen. *Seien* $(P, \mathfrak{U})$ *ein Austauschraum und* $B, C \subseteq P$ *zwei Basen. Dann gilt* $|B| = |C|$*.*

Beweis. 1. Fall: Eine der Basen ist endlich, etwa $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Durch vollständige Induktion nach i wird folgende Behauptung bewiesen:

Zu jedem $i \leq n$ existieren $c_1, \ldots, c_i \in C$ mit $B_i := \{c_1, \ldots, c_i, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$ ist Basis von P. Dann ist $B_n \subseteq C$ Basis von P, also $B_n = C$ und $|B| = |C| = n$.

$i = 0$: $\quad B_0 = B$ ist Basis von P.

$i - 1 \to i$: $\quad$ Sei also B_{i-1} Basis von P. Setze $Q := B_{i-1} \setminus \{b_i\}$. Dann

$$\overline{Q} \subsetneq P \implies C \not\subseteq \overline{Q} \implies \exists c_i \in C \setminus \overline{Q}$$

und mit (9.9.1) ist $B_i := Q \cup \{c_i\}$ unabhängig. Wegen (AA) gilt

$$b_i \in \overline{B_i} \implies \overline{P} = \overline{B_{i-1}} \subseteq \overline{B_i} \quad \text{und } B_i \text{ ist Basis von } P.$$

2. Fall: B und C sind unendlich. Wegen der Endlichkeitsbedingung existiert für jedes $c \in C$ ein $T_c \subseteq B$ mit $c \in \overline{T_c}$ und $|T_c| \in \mathbb{N}$. Setze

$$\mathcal{T} := \{T_c\,;\ c \in C\} \quad \text{und} \quad T := \bigcup_{S \in \mathcal{T}} S.$$

Dann gilt $C \subseteq \overline{T}$, also $\overline{T} = P$. Aus (9.9.2) und $T \subseteq B$ folgt $B = T$.

Annahme: $|\mathcal{T}| \lneqq |B|$. Im Fall $|B| = |\mathbb{N}|$ wäre $\mathcal{T}$ dann endlich, also auch $T = B$ endlich, ein Widerspruch.

Im Fall $|B| \gneqq |\mathbb{N}|$ folgt $|B| = |\bigcup_{S \in \mathcal{T}} S| \leq |\mathcal{T}| \cdot |\mathbb{N}| \lneqq |B| \cdot |B| = |B|$, ein Widerspruch.

Daher gilt $|B| \leq |\mathcal{T}| \leq |C|$. Wegen Symmetrie auch $|C| \leq |B|$. Mit dem Satz von Schröder-Bernstein folgt $|B| = |C|$. ■

Als wichtige Folgerung erhalten wir

(9.13) *Der Inzidenzraum* $(P, \mathfrak{G})$ *sei ein Austauschraum mit der Basis* B*. Dann gilt:* $\dim P = |B| - 1$. ■

(9.14) Satz. *Sei* $(P, \mathfrak{U})$ *ein Austauschraum und* $B \subseteq P$*. Dann sind äquivalent:*

(I) B *ist Basis von* P*.*

(II) B *ist maximale unabhängige Teilmenge von* P*.*

(III) B *ist minimales Erzeugendensystem.*

Beweis. (I) $\Longleftrightarrow$ (II) in (9.9.2).

(I) $\Longrightarrow$ (III): Jede Basis ist Erzeugendensystem. Wegen der Unabhängigkeit ist es minimal.

(III) $\Longrightarrow$ (I): Aus $T \subsetneq B$ folgt $\overline{T} \subsetneq \overline{B}$, also ist B unabhängig. ■

Direkt ergibt sich eine weitere, wichtige

(9.15) Folgerung. *Der Inzidenzraum* $(P, \mathfrak{G})$ *sei ein Austauschraum mit* $\dim P = n \in \mathbb{N}$ *und* $B \subseteq P$*. Dann sind äquivalent:*

(I) B *ist Basis von* P*.*

(II) B *ist unabhängig und* $|B| \geq n + 1$*.*

(III) $\overline{B} = P$ *und* $|B| \leq n + 1$*.* ■

(9.16) Bemerkung. (1) Ist $(P, \mathfrak{U})$ endlich erzeugter Austauschraum, so erhält man die Sätze (9.11) und (9.12) auch ohne Anwendung des Zornschen Lemmas.

(2) Endlichkeitsbedingung und Austauschaxiom sind die entscheidenden Eigenschaften, die einen „vernünftigen“ Dimensionsbegriff ermöglichen.

(3) Die Sätze (9.11) und (9.12) sind insbesondere auf Vektorräume anwendbar. D. h. wir haben einen Beweis für den Basisergänzungssatz und die Gleichmächtigkeit von Basen für Vektorräume (auch für nicht endlich erzeugte!).

(4) **Nachtrag zu § 6:** Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine *Austauschebene* mit Kongruenz, dann ist jeder echte Unterraum von E leer, ein Punkt, oder eine Gerade, wie es in Bemerkung (6.1) und vor (6.17) festgehalten wurde.

(5) Der Beweis von (6.19) ist aufwändiger.

Hyperebenen

Ab jetzt benutzen wir die Bezeichnung „Austauschraum“ nur noch für Inzidenzräume.

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Ein Unterraum $H \subseteq P$ heißt **Hyperebene**, wenn ein $x \in P \setminus H$ existiert mit $\overline{H \cup \{x\}} = P$.

(9.17) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum und $\mathfrak{U}$ die Menge der Unterräume von P. Für $H \in \mathfrak{U}$ sind äquivalent:*

(I) *H ist Hyperebene.*

(II) *H ist maximal in $\mathfrak{U} \setminus \{P\}$.*

(III) *$H \neq P$ und $\forall x \in P \setminus H$ gilt $\overline{H \cup \{x\}} = P$.*

Beweis. (I) $\Longrightarrow$ (II): Es gibt $x \in P \setminus H$ mit $\overline{H \cup \{x\}} = P$. Sei $S \in \mathfrak{U}$ mit $H \subsetneq S$. Für

$$y \in S \setminus H \quad \text{gilt} \quad y \in \overline{H \cup \{x\}} \setminus H \implies x \in \overline{H \cup \{y\}} \subseteq S,$$

insbesondere $H \cup \{x\} \subseteq S$ und somit $P = \overline{H \cup \{x\}} \subseteq S$. Daher gilt $S = P$.

„(II) $\Longrightarrow$ (III)“ und „(III) $\Longrightarrow$ (I)“ sind klar. ∎

(9.18) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum mit $\dim P = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $H \subseteq P$ ein Unterraum. Dann gilt: H Hyperebene $\iff \dim H = n - 1$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei B Basis von H und $x \in P \setminus H$. Mit (9.17.III) und (9.9.1) folgt: $B \cup \{x\}$ ist Basis von P. Das zeigt $|B| = n$ und $\dim H = n - 1$.

„$\Longleftarrow$“: Sei B Basis von H, dann gilt $|B| = n$. Ergänze B zu einer Basis B' von P. Dann gilt $|B'| = n + 1$ und es gibt $x \in P \setminus H$ mit $B' = B \cup \{x\}$, also $P = \overline{H \cup \{x\}}$. Somit ist H Hyperebene. ∎

(9.19) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum und $U \subsetneq P$ ein Unterraum. Dann ist U der Durchschnitt aller Hyperebenen die U umfassen.*

Beweis. Übung mit (9.17.II). ∎

Bemerkung. (9.19) gilt auch für $U = P$, denn $\bigcap\limits_{U \in \varnothing} U = P$.

(9.20) Beispiele. 1. Minimalmodell der projektiven Ebene: Hyperebenen sind genau die Geraden.

2. Minimalmodell der affinen Ebene: alle drei-elementigen Teilmengen sind Hyperebenen. Das ist die einzige Ausnahme unter den affinen Ebenen.

3. Siehe Beispiel (9.6.3): $H = \{1, 2, 6\}$ ist Hyperebene. Es gilt $\dim H = 2 = \dim P$. Beachte, dass P kein Austauschraum ist!

4. Im Austauschraum $\mathbb{R}^3$ sind die Hyperebenen genau die Ebenen und jede Gerade, jeder Punkt ist Schnitt von zwei bzw. drei Hyperebenen.

Wir sammeln noch einige wichtige Aussagen.

(9.21) *Seien $(P, \mathfrak{G})$ und $(P', \mathfrak{G}')$ Inzidenzräume, $\sigma : P \to P'$ ein Isomorphismus und $X \subseteq P$. Dann gelten:*

(1) *X ist Unterraum von P $\iff$ $\sigma(X)$ ist Unterraum von P'.*

(2) $\sigma(\overline{X}) = \overline{\sigma(X)}$.

(3) *X ist Unterraum von P $\implies$ $\dim X = \dim \sigma(X)$.*

(4) *X ist unabhängig $\iff$ $\sigma(X)$ ist unabhängig.*

(5) *X ist Basis von P $\iff$ $\sigma(X)$ ist Basis von P'.*

(6) *P ist Austauschraum $\iff$ P' ist Austauschraum.*

(7) *X ist Hyperebene $\iff$ $\sigma(X)$ ist Hyperebene.*

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: Seien $x' = \sigma(x), y' = \sigma(y), x' \neq y'$, beliebig aus $\sigma(X)$ (also $x, y \in X$). Dann $\overline{x,y} \subseteq X$, also $\overline{x',y'} = \sigma(\overline{x,y}) \subseteq \sigma(X)$ und $\sigma(X)$ ist Unterraum. Da auch σ^{-1} ein Isomorphismus ist, ergibt sich auch „$\Longleftarrow$“.

(2) Neben $\overline{X}$ bzw. $\overline{\sigma(X)}$ sind wegen (1) auch $\sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)})$ bzw. $\sigma(\overline{X})$ Unterräume von P bzw. P'. Aus $\sigma(X) \subseteq \sigma(\overline{X})$ folgt $\overline{\sigma(X)} \subseteq \sigma(\overline{X})$ und entsprechend

$$X \subseteq \sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)}) \implies \overline{X} \subseteq \sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)}) \implies \sigma(\overline{X}) \subseteq \overline{\sigma(X)}.$$

Das zeigt die Behauptung.

(3)–(7) direkt aus der jeweiligen Definition und (1) bzw. (2). ■

10 Affine und projektive Räume

Im Folgenden wird ein Parallelitätsbegriff benötigt, der den aus §2 verallgemeinert:

Definition. Ein Unterraum $U \subseteq P$ eines Inzidenzraums $(P, \mathfrak{G})$ heißt **Ebene**, wenn $\dim U = 2$, d. h. $U \notin \mathfrak{G}$ und es gibt verschiedene $x, y, z \in U$ mit $\overline{\{x, y, z\}} = U$.

Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Zwei Geraden $G, H \in \mathfrak{G}$ heißen **parallel** (geschrieben $G \| H$), wenn $G = H$ oder eine Ebene $E \subseteq P$ existiert mit $G \cup H \subseteq E$ und $G \cap H = \varnothing$.

Bemerkung. Die obige Definition ist nicht (ganz) konsistent mit der Definition von $\|$ für affine Ebenen. Es gibt eine einzige Ausnahme: Das Minimalmodell der affinen Ebenen (vgl. Beispiel (9.6.4) und (1.1.1)). Hier gilt $\overline{a, b} \nparallel \overline{c, d}$ im obigen Sinne, da die beiden Geraden nicht in einer Ebenen liegen.

Definition. Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ heißt

affiner Raum, wenn jede Ebene eine affine Ebene und $\|$ transitiv ist;

projektiver Raum, wenn jede Ebene eine projektive Ebene ist.

(10.1) Bemerkung. 1. Reflexivität und Symmetrie der Relation $\|$ sind klar.

2. Wenn in $(P, \mathfrak{G})$ jede Ebene affine Ebene ist und $\exists G \in \mathfrak{G}$ mit $|G| \geq 4$, dann folgt die Transitivität von $\|$ (Buekenhout und Karzel/Pieper, siehe [7, (5.39)]).

3. Im Fall $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| = 3$ gibt es Gegenbeispiele.

4. Der Fall $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| = 2$ wird unten behandelt.

(10.2) Beispiele. (1) Jeder Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ mit $|\mathfrak{G}| \leq 1$ ist sowohl affiner als auch projektiver Raum (es ist der einzige Typ, bei dem die Begriffe zusammenfallen).

(2) Jede affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ mit $\operatorname{ord} A \geq 3$ ist ein affiner Raum der Dimension 2 (vgl. auch (9.6.4)).

(3) Jede projektive Ebene ist ein projektiver Raum der Dimension 2.

(4) Jeder Unterraum eines affinen bzw. projektiven Raumes ist ein affiner bzw. projektiver Raum.

(5) Sei $K \neq \mathbb{Z}_2$ ein Körper und V ein K-Vektorraum. Setze $P := V$ und $\mathfrak{G} := \{a + bK\,;\ a \in V, b \in V \setminus \{0\}\}$. Dann ist $\mathrm{AG}(V, K) := (P, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum, genannt **affine Ableitung** (vgl. (1.1.7)). Im Fall $V = K^n$ schreibt man $\mathrm{AG}(n, K)$. Ist $K = \mathrm{GF}(q)$ für eine Primzahlpotenz, so schreibt man auch $\mathrm{AG}(V, q)$ bzw. $\mathrm{AG}(n, q)$.

Beweis. Nach (1.1.7) ist P Inzidenzraum. Um zu zeigen, dass Unterräume der Form $\overline{\{x, y, z\}}$ affine Ebenen sind, benötigen wir das folgende

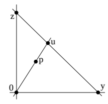
Lemma. *Für nicht kollineare $x, y, z \in V$ gilt $E := x + (y-x)K + (z-x)K = \overline{\{x, y, z\}}$.*

Da $P \to P;\ x \mapsto x + a$ offenbar ein Automorphismus von P ist, dürfen wir oE. $x = 0$ annehmen. Zu zeigen ist dann: $E := yK + zK = \overline{\{0, y, z\}}$.

$\overline{\{0, y, z\}} \subseteq E$: E ist ein Untervektorraum von V und für $a, b \in E, a \neq b$, gilt $\overline{a, b} = a + (b-a)K \subseteq E$, also ist E Unterraum von P. Somit $\overline{\{0, y, z\}} \subseteq E$, denn $0, y, z \in E$.

$E \subseteq \overline{\{0, y, z\}}$: Sei $p = y\lambda + z\mu \in E,\ \lambda, \mu \in K$, beliebig. Wir müssen $p \in \overline{\{0, y, z\}}$ zeigen. Für $p \in \overline{0, y} \cup \overline{0, z} \subseteq E$ ist nichts zu zeigen, also kann oE. $\lambda, \mu \neq 0$ angenommen werden.

1. Fall: $\lambda \neq -\mu$, dann existiert $u := p \cdot (\lambda + \mu)^{-1} = z + (y - z)\lambda(\lambda + \mu)^{-1}$ (Nachrechnen!), und somit gilt



$$u = \overline{0, p} \cap \overline{y, z} \in \overline{\{0, y, z\}} \implies p \in \overline{0, u} \subseteq \overline{\{0, y, z\}}.$$

2. Fall: $\lambda = -\mu$. Es existiert $\nu \in K \setminus \{0, 1\}$ (da $K \neq \mathbb{Z}_2$!), und weil $y\nu \in \overline{0, y} \subseteq \overline{\{0, y, z\}}$ ergibt der erste Fall $p \in \overline{0, y\nu, z} \subseteq \overline{0, y, z}$.

Daher gilt das Lemma.

Für $E = \overline{\{x, y, z\}}$ gilt offenbar $(E, \mathfrak{G}(E)) \cong \mathrm{AG}(2, K)$, E ist also affine Ebene. Seien $a + bK$ und $c + dK$ parallele Geraden aus $\mathfrak{G}$, d. h. es existiert eine Ebene $E \subseteq P$ mit $a + bK, c + dK \subseteq E$. Da $E \cong \mathrm{AG}(2, K)$ gilt $a + bK \| c + dK \iff bK = dK$, also ist $\|$ transitiv. ∎

(6) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter seien $P := \{aK\,;\ a \in V \setminus \{0\}\}$ und $\mathfrak{G} := \{aK + bK\,;\ a, b \in V \text{ linear unabhängig}\}$. Dann ist $\mathrm{PG}(V, K) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ ein projektiver Raum. Im Fall $V = K^{n+1}$ schreiben wir $\mathrm{PG}(n, K)$. Gilt $K = \mathrm{GF}(q)$ für eine Primzahlpotenz q, so schreiben wir auch $\mathrm{PG}(V, q)$ bzw. $\mathrm{PG}(n, q)$.

Beweisskizze: Inzidenzraumeigenschaft wie in (3.1.5). Zu nicht kollinearen xK, yK, zK sind x, y, z linear unabhängig.

Behauptung. *$E := \{aK\,;\ a \in V \setminus \{0\}$ mit $aK \subseteq xK + yK + zK\} = \overline{\{xK, yK, zK\}}$ ist projektive Ebene in P.*

Ausführung: Übung.

Affine Geometrie über $\mathbb{Z}_2$

Sei V ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum und $\mathfrak{G} := \{a + b\mathbb{Z}_2\,;\ a \in V, b \in V \setminus \{0\}\}$. Dann ist $(V, \mathfrak{G})$ mit $\dim V \geq 2$ kein affiner Raum (vgl. Beispiel (10.2.5)), denn für nicht kollineare $x, y, z \in V$ ist $\overline{\{x, y, z\}} = \{x, y, z\}$ keine affine Ebene. Auch die Relation $\|$ ist trivial, denn $\forall G, H \in \mathfrak{G} : G \| H \iff G = H$. Man kann aber Abhilfe schaffen, indem man ein „künstliches“ $\|_2$ einführt:

$G = a + b\mathbb{Z}_2$, $H = c + d\mathbb{Z}_2$ heißen **parallel** (geschrieben $G \|_2 H$), wenn $b\mathbb{Z}_2 = d\mathbb{Z}_2$ ($\iff b = d$, denn $b\mathbb{Z}_2 = \{0, b\}$). Offenbar ist $\|_2$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{G}$ und es gilt (P) mit $\{x \|_2 a + b\mathbb{Z}_2\} = x + b\mathbb{Z}_2$.

$U \subseteq V$ heißt **Unterraum** von $(V, \mathfrak{G}, \|_2)$, wenn

$$\forall x, y \in U, x \neq y : \overline{x, y} \subseteq U \quad \text{und} \quad \forall G \in \mathfrak{G}(U), x \in U : \{x \|_2 G\} \subseteq U.$$

Wir setzen $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2) := (V, \mathfrak{G}, \|_2)$ mit diesem Unterraumbegriff und sprechen auch hier vom **affinen Koordinatenraum** (obwohl $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ kein affiner Raum ist!). Offenbar ist dieses System von Unterräumen $\cap$-abgeschlossen. Der zugehörige Hüllenoperator sei mit $\overline{}^2$ bezeichnet.

(10.3) *Sei V ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann gilt:*

(1) *U ist Unterraum von $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ $\iff$ es gibt einen Untervektorraum $R \subseteq V$ und $x \in V$ mit $U = x + R$.*

(2) *$\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ ist ein Austauschraum.*

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: OE. gilt $0 \in U$, denn $x \mapsto x + a$ ist offenbar ein Automorphismus von $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ (der insbesondere $\|$ respektiert). Wir zeigen, dass U Untervektorraum von V ist: Seien $a, b \in U$, dann ist $a\mathbb{Z}_2 \subseteq U$ klar, ebenso $a + b \in U$ für $b = 0$. Für $b \neq 0$ gilt $a + b \in a + b\mathbb{Z}_2 = \{a \|_2 \overline{0, b}\} \subseteq U$. Also ist U Untervektorraum und die Behauptung folgt.

„$\Longleftarrow$“: Zu $a, b \in R, a \neq b$, gilt $\overline{a, b} = a + (b - a)\mathbb{Z}_2 \subseteq R$. Für $c \in R$ gilt zusätzlich $\{c \|_2 \overline{a, b}\} = c + (b - a)\mathbb{Z}_2 \subseteq R$. Also ist R Unterraum von $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$, ebenso $U = x + R$.

(2) Übungsaufgaben 24 und 27. ∎

Bemerkung. (1) Man kann die bei $\mathrm{AG}(V, K)$ für $K = \mathbb{Z}_2$ auftretenden Ausnahmeregelungen durch eine andere Axiomatik umgehen.

(2) Der affine Koordinatenraum $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ spielt eine wichtige Rolle in der Codierungstheorie.

Warum $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ ohne den neu eingeführten „$\|_2$“-Begriff kein affiner Raum sein kann, zeigt auch

(10.4) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum mit $\dim P \geq 2$. Für alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt $|G| \geq 3$.*

Beweis. Annahme: $\exists G \in \mathfrak{G} : |G| = 2$, etwa $G = \{a, b\}$. Wegen $\dim P \geq 2$ existiert $c \in P \setminus G$ und $E := \overline{\{a, b, c\}}$ ist affine Ebene. Da $G \subseteq E$ gilt $\operatorname{ord} E = 2$, aber dann gilt $\dim E = 3$ (Widerspruch!), bzw. $\overline{\{a, b, c\}} = \{a, b, c\}$ ist keine affine Ebene (Widerspruch!). ∎

Verbindungssatz und Austauschaxiom

(10.5) *Sei E Ebene eines affinen oder projektiven Raumes. Für je drei nicht kollineare $x,y,z \in E$ gilt $\overline{\{x,y,z\}} = E$.*

Beweis. Natürlich gilt $\overline{\{x,y,z\}} \subseteq E$. Für $u \in E \setminus \{x,y,z\}$ ist $u \in \overline{\{x,y,z\}}$ zu zeigen:

1. Fall: $\exists\, v = \overline{u,x} \cap \overline{y,z}$, dann gilt $u \in \overline{v,x} \subseteq \overline{\{x,y,z\}}$.

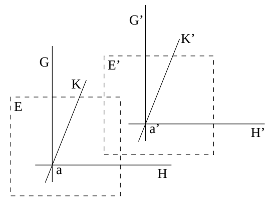
2. Fall: $\overline{u,x} \cap \overline{y,z} = \varnothing$ (also $\overline{u,x} \| \overline{y,z}$). D. h. $\overline{\{x,y,z\}}$ und E sind beides affine Ebenen. Somit $G := \{x \| \overline{y,z}\} \subseteq \overline{\{x,y,z\}}$. Wegen der Transitivität von $\|$ und $x \in G$ hat man $\overline{u,x} \| \overline{y,z} \| G$ und daraus $\overline{u,x} = G$, also $u \in \overline{\{x,y,z\}}$. ■

(10.6) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum. Dann gilt:*

(1) $\forall x \in P\ \forall G \in \mathfrak{G}\ \exists_1 H \in \mathfrak{G}$ *mit $G \| H$ und $x \in H$. Bezeichnung: $H = \{x \| G\}$.*

(2) *Sei T ein Unterraum von P. Für $x \in T$ und $G \in \mathfrak{G}(T)$ gilt $\{x \| G\} \subseteq T$.*

(3) *Seien $G, H, G', H' \in \mathfrak{G}$ alle verschieden mit $G \| G', H \| H'$ und $a = G \cap H \in P$, $a' = G' \cap H' \in P$. Für $E = \overline{G \cup H}, E' = \overline{G' \cup H'}$ und $K \in \mathfrak{G}(E)$ mit $a \in K$ gilt: $K' := \{a' \| K\} \in \mathfrak{G}(E')$.*



Beweis. (1) Sei $x \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$. O.B.d.A. $x \notin G$, also ist $\overline{G \cup \{x\}}$ eine Ebene für die (P) gilt. Da dies nach (10.5) die einzige Ebene ist, die G und x enthält, folgt die Behauptung.

(2) Wegen (1) gilt $\{x \| G\} \subseteq \overline{G \cup \{x\}} \subseteq T$.

(3) 1. Fall: $E'' := E \cap E' \neq \varnothing$ (E'' ist Unterraum!), etwa $c \in E''$. Setze $G'' := \{c \| G\} \subseteq E$, $H'' := \{c \| H\} \subseteq E$. Wegen der Transitivität von $\|$ gilt $G'' = \{c \| G'\} \subseteq E'$, $H'' = \{c \| H'\} \subseteq E'$, also $G'', H'' \subseteq E''$. Da $G \nparallel H$ gilt $G'' \neq H''$, also ist $\overline{G'' \cup H''}$ eine Ebene. Mit (10.5) folgt $E = \overline{G'' \cup H''} = E'$ und die Behauptung ergibt sich aus (2).

2. Fall: $E \cap E' = \varnothing$. Wegen (10.4) existieren

$$c \in \overline{a,a'} \setminus \{a,a'\},\ z \in K \setminus \{a\},\ x \in G \setminus \{a\} \quad \text{mit} \quad \overline{x,z} \nparallel H \quad \text{und} \quad y := \overline{x,z} \cap H.$$

Da $G, G' \subseteq \overline{\{c,a,x\}}$, $H, H' \subseteq \overline{\{c,a,y\}}$ existieren $x' := \overline{c,x} \cap G'$, $y' = \overline{c,y} \cap H'$. Die Geraden $\overline{x,y}, \overline{x',y'}$ liegen in der Ebene $\overline{\{c,x,y\}}$ und

$$\overline{x,y} \cap \overline{x',y'} \subseteq E \cap E' = \varnothing \implies \overline{x,y} \| \overline{x',y'}.$$

Da $\overline{c,z}$ in $\overline{\{c,x,y\}}$ liegt, existiert $z' = \overline{c,z} \cap \overline{x',y'}$. Die Geraden $K = \overline{a,z}$ und $\overline{a',z'}$ liegen in $\overline{\{c,a,z\}}$ und

$$\overline{a,z} \cap \overline{a',z'} \subseteq E \cap E' = \varnothing \implies K \| \overline{a',z'} = K' \quad \text{und} \quad K' \subseteq E'.$$ ■

Bemerkung. Die Definition von Unterräumen in $\mathrm{AG}(V,\mathbb{Z}_2)$ ist gerade so gemacht, dass Aussage (2) auch dort gilt.

(10.7) Verbindungssatz. *Sei T Unterraum des Inzidenzraums $(P,\mathfrak{G})$ und $a \in P \setminus T$.*

(1) *Ist $(P,\mathfrak{G})$ projektiver Raum, so gilt* $\overline{T \cup \{a\}} = \bigcup\limits_{x \in T} \overline{a,x}$.

(2) *Ist $(P,\mathfrak{G})$ affiner Raum, so gilt* $\overline{T \cup \{a\}} = \bigcup\limits_{x \in T} \overline{a,x} \cup \bigcup\limits_{G \in \mathfrak{G}(T)} \{a \| G\}$.

Beweis. (1) Setze $U = \bigcup_{x \in T} \overline{a,x}$. Offenbar gilt $T \cup \{a\} \subseteq U \subseteq \overline{T \cup \{a\}}$. Es genügt also zu zeigen, dass U Unterraum ist. Seien $p,q \in U, p \neq q$, also $p \in \overline{a,x}$, $q \in \overline{a,y}$ für $x,y \in T$. Dann ist $\overline{p,q} \subseteq U$ zu zeigen. Sind a,x,y kollinear, so folgt $\overline{p,q} = \overline{a,x} \subseteq U$. Also seien a,x,y nicht kollinear, dann ist $\overline{\{a,x,y\}}$ eine projektive Ebene. Für $r \in \overline{p,q} \setminus \{a\}$ existiert $z := \overline{a,r} \cap \overline{x,y} \in T$ (da $r \in \overline{\{a,x,y\}}$) und $r \in \overline{a,z} \subseteq U$. Es folgt $\overline{p,q} \subseteq U$ und U ist Unterraum.

(2) Setze $U = \bigcup_{x \in T} \overline{a,x} \cup \bigcup_{G \in \mathfrak{G}(T)} \{a \| G\}$. Wieder gilt $T \cup \{a\} \subseteq U \subseteq \overline{T \cup \{a\}}$ (vgl. (10.6.2)) und es genügt zu zeigen, dass U ein Unterraum ist. Seien also $p,q \in U \setminus \{a\}$ und o.B.d.A. a,p,q nicht kollinear (sonst $\overline{p,q} = \overline{a,q} \subseteq U$). Betrachte $r \in \overline{p,q}$:

1. Fall: $\exists x,y \in T$ mit $p \in \overline{a,x}$, $q \in \overline{a,y}$. Dann liegt $\overline{p,q}$ in der affinen Ebene $\overline{\{a,x,y\}}$ (a,x,y kollinear hätte a,p,q kollinear zur Folge). Somit gilt für

$$\overline{a,r} \subseteq \overline{\{a,x,y\}} : \exists z = \overline{a,r} \cap \overline{x,y} \quad \text{(also } r \in \overline{a,z}\text{) oder} \quad \overline{a,r} \| \overline{x,y} \subseteq T$$

In beiden Fällen erhält man $r \in U$.

2. Fall: $\exists x \in T$ mit $p \in \overline{a,x}$ und $G \in \mathfrak{G}(T)$ mit $q \in \{a \| G\}$. O.B.d.A. $x \in G$ (sonst ersetze G durch $\{x \| G\} \subseteq T$). Dann liegt $\overline{p,q}$ in der affinen Ebene $\overline{\{a \| G\} \cup \{x\}} = \overline{G \cup \{a\}}$. Wie im 1. Fall erkennt man $r \in U$.

3. Fall: $\exists G_p, G_q \in \mathfrak{G}(T)$ mit $p \in \{a \| G_p\} = H_p$, $q \in \{a \| G_q\} = H_q$. Es gilt $\overline{a,r} \subseteq E := \overline{H_p \cup H_q}$, einer affinen Ebene. Sei $a' \in T$, dann gilt o.B.d.A. $a' \in G_p \cap G_q$ (ersetze sonst G_p, G_q entsprechend!) und $E' := \overline{G_p \cup G_q}$ ist affine Ebene und wegen (10.6.2) gilt $E' \subseteq T$. Die Geraden H_p, H_q, G_p, G_q erfüllen die Voraussetzungen von (10.6.3), somit gilt $L := \{a' \| \overline{a,r}\} \subseteq E' \subseteq T$ und daher $r \in \{a \| L\} \subseteq U$. ∎

(10.8) Satz. *Affine und projektive Räume $(P,\mathfrak{G})$ sind Austauschräume.*

Beweis. Die Endlichkeitsbedingung gilt nach (9.7) für alle Inzidenzräume.

Seien $S \subseteq P$ und $x,y \in P$ mit $x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S}$. Dann ist $y \in \overline{S \cup \{x\}}$ zu zeigen. Da $y \notin \overline{S}$ gilt mit dem Verbindungssatz (10.7)

$$\overline{S \cup \{y\}} = \overline{\overline{S} \cup \{y\}} = \begin{cases} \bigcup_{s \in \overline{S}} \overline{s,y} & \text{falls } P \text{ projektiver Raum} \\ \bigcup_{s \in \overline{S}} \overline{s,y} \cup \bigcup_{G \in \mathfrak{G}(\overline{S})} \{y \| G\} & \text{falls } P \text{ affiner Raum} \end{cases}$$

Also existiert $s_0 \in \overline{S}$ mit $x \in \overline{s_0, y} \setminus \{s_0\}$ oder es existiert $G \in \mathfrak{G}(\overline{S})$ mit $x \in \{y \| G\}$. Es folgt $y \in \overline{s_0, x} \subseteq \overline{\overline{S} \cup \{x\}} = \overline{S \cup \{x\}}$ bzw. $y \in \{x \| G\} \subseteq \overline{\overline{S} \cup \{x\}} = \overline{S \cup \{x\}}$. ∎

Wegen dieses Satzes gelten in affinen und projektiven Räumen alle Aussagen aus §9. Insbesondere hat man die Existenz und die Gleichmächtigkeit von Basen, sowie die Existenz von Hyperebenen und es gilt insbesondere (9.17).

(10.9) Beispiele. (1) Sei $(E, \mathfrak{G})$ eine affine oder projektive Ebene. Dann gilt:
$x, y, z \in E$ nicht kollinear $\iff$ $\{x, y, z\}$ ist Basis von E.

(2) Eine Basis von $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ besteht aus vier nicht komplanaren Punkten (etwa $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$).

(3) Allgemein: Sei V ein Vektorraum mit Basis B. Dann ist $B \cup \{0\}$ Basis von $\mathrm{AG}(V, K)$. Andersherum: Sei C ist Basis von $\mathrm{AG}(V, K)$ und $c \in C$, dann gilt

$$(C - c) \setminus \{0\} := \{x - c\,;\ x \in C \setminus \{c\}\}$$

ist Basis von (V, K). Das folgt aus den Aufgaben 24 und 27.

(10.10) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein projektiver Raum, $F \subseteq P$ eine Hyperebene und $G \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}(F)$ beliebig. Dann gilt $|G \cap F| = 1$.*

Beweis. Übung! ∎

Der projektive Abschluss

(10.11) Satz. *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein projektiver Raum mit $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| \geq 4$ und $F \subseteq P$ eine Hyperebene. Setze $P_F := P \setminus F$ und $\mathfrak{G}_F := \{G \setminus F\,;\ G \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}(F)\}$. Dann gilt*

(1) *$(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist ein affiner Raum.*

(2) *Für $G, H \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}(F)$ gilt:* $\quad (G \setminus F) \| (H \setminus F) \iff G \cap F = H \cap F$.

(3) *Sei U ein Unterraum von P, dann ist $U_F := U \cap P_F$ ein (affiner) Unterraum von P_F, und es gilt $U_F = \varnothing$ oder $\overline{U_F} = U$ (die Hülle ist in P zu bilden).*

(4) *Sei W ein (affiner) Unterraum von P_F, dann gilt $\overline{W} \cap P_F = W$.*
Genauer: $\overline{W} = \bigcup_{a,b \in W} \overline{a,b}$.

(5) *Weiter gilt* $\dim W = \dim \overline{W}$*, d. h. die Dimension des affinen Raumes* W *ist gleich der Dimension seines projektiven Abschlusses.*

In der Tat ist jede (affine) Basis von W *auch (projektive) Basis von* $\overline{W}$*.*

Beweis. (1) $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist Inzidenzraum: (I1) ist einfach (vgl. Beweis von (3.3)).

(I2) Für $G \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}(F)$ gilt $|G| \geq 4$ und $|G \cap F| = 1$, also ergibt sich sogar (I3).

Jede Ebene in $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist affine Ebene: Seien $a, b, c \in P_F$ nicht kollinear und $E = \overline{\{a, b, c\}}$, die von a, b, c in P erzeugte projektive Ebene. Da $\overline{a,b}, \overline{a,c} \notin \mathfrak{G}(F)$ existieren $x, y \in F$ mit $x = \overline{a,b} \cap F$ und $y = \overline{a,c} \cap F$. Es gilt $x \neq y$, $x, y \in E \cap F$, und wegen (10.5) gilt $E \nsubseteq F$. Das zeigt $E \cap F = \overline{x,y} \in \mathfrak{G}(F)$. Setze $E_{\overline{x,y}} := E \setminus \overline{x,y}$ und $\mathfrak{G}(E)_{\overline{x,y}} := \{G \setminus \overline{x,y};\ G \in \mathfrak{G}(E) \setminus \{\overline{x,y}\}\}$. Mit (3.3.1) ist $(E_{\overline{x,y}}, \mathfrak{G}(E)_{\overline{x,y}})$ eine affine Ebene. Wegen (10.5) wird sie von a, b, c in P_F erzeugt.

(2) folgt nun direkt aus (3.3.2) und impliziert die Transitivität von $\|$.

(3) Der Fall $U \subseteq F$ ist trivial. Wir können uns also auf den Fall $U_F \neq \varnothing$ zurückziehen. Seien $a, b \in U_F$, dann gilt $\overline{a,b} \subseteq U$, also $\overline{a,b} \setminus F \subseteq U_F$. Daher ist U_F ein Unterraum.

Sei $x \in U \cap F$ und $a \in U_F$. Für

$$b \in \overline{a,x} \setminus \{a, x\} \subseteq U_F \quad \text{gilt} \quad x \in \overline{a,x} = \overline{a,b} \subseteq \overline{U_F}.$$

Insgesamt folgt $U \subseteq \overline{U_F}$. Die andere Inklusion ist trivial.

(4) Offenbar gilt $W \subseteq V := \bigcup_{a,b \in W} \overline{a,b} \subseteq \overline{W}$. Wir werden zeigen, dass V ein Unterraum ist, dann folgt $V = \overline{W}$ und $V \cap P_F = W$, also die Behauptung.

Für $x, y \in V$, $x \neq y$, müssen wir also $\overline{x,y} \subseteq V$ zeigen. Im Fall $x, y \in V \setminus F (= W)$ ist das offensichtlich. Im Fall $x \in V \setminus F, y \in F$ folgt es direkt aus $|\overline{a,x}| \geq 4$ und $|\overline{a,x} \cap F| \leq 1$.

Es bleibt der Fall $x, y \in F$. Nach Konstruktion existieren $a, b, c, d \in W$ mit $x = \overline{a,b} \cap F$ und $y = \overline{c,d} \cap F$. Wegen (1) und (2) gilt

$$H := \{a \parallel \overline{c,d} \setminus F\} \subseteq W \quad \text{und} \quad y \in \overline{H}.$$

Wir können also oE. $a = d$ annehmen. Für $E = \overline{a,b,c}$ gilt $x, y \in E$, also $E \cap F = \overline{x,y}$ aus Dimensionsgründen. Für $z \in \overline{x,y}$ gilt

$$\overline{a,z} \setminus F \parallel \overline{b,c} \setminus F \implies z \in \overline{b,c} \subseteq V \quad \text{oder} \quad \exists u = \overline{a,z} \cap \overline{b,c} \setminus F \implies z \in \overline{a,u} \subseteq V.$$

Daher gilt $\overline{x,y} \subseteq V$.

(5) Sei B eine Basis von W. Es gilt $\overline{B} = \overline{W}$, denn $B \subseteq \overline{B} \cap P_F$ eines affinen Unterraums (nach (4)), und daher $W \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{W}$.

B ist unabhängig bzgl. P: Sei $b \in B$ und W' der von $B \setminus \{b\}$ erzeugte affine Unterraum von P_F. Dann gilt $W' \subsetneq W$. Es folgt

$$\overline{B \setminus \{b\}} \subseteq \overline{W'} \subsetneq \overline{W} \quad \text{mit (3).}$$

Insgesamt folgt, dass B eine Basis von $\overline{W}$ bzgl. P ist. ∎

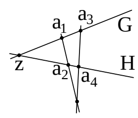
(10.12) Bemerkung. 1. (3.3) ist ein Spezialfall von (10.11), denn die Hyperebenen in einer projektiven Ebene sind genau die Geraden (vgl. (10.5)!).

2. Im Fall $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| = 3$ erhält man durch die Konstruktion in (10.11) einen Inzidenzraum $(P_F, \mathfrak{G}_F) \cong \mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ für geeigneten Vektorraum V über $\mathbb{Z}_2$. Der durch (10.11.2) definierte **Parallelismus** auf P_F stimmt mit dem für $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ definierten $\|_2$ überein. Der Beweis setzt eine direkte Koordinatisierung von $(P, \mathfrak{G})$ als $\mathrm{PG}(\mathbb{Z}_2 \times V, \mathbb{Z}_2)$ voraus, oder eine Axiomatik, die $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ mit einschließt.

3. Die Aussage (4) des Satzes besagt, dass die Abbildung $W \mapsto \overline{W}$ eine Injektion von der Menge der Unterräume des affinen Raumes $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ in die Menge der Unterräume der projektiven Raumes $(P, \mathfrak{G})$ ist. Nach (3) ist das Bild, die Menge aller Unterräume, die nicht in F enthalten sind und $\varnothing$.

(10.13) *Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ mit (I3) ist ein projektiver Raum genau dann, wenn das folgende **Axiom von Veblen-Young** erfüllt ist.*

(VY) *Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $z = G \cap H \in P$ und $a_1, a_3 \in G \setminus \{z\}$, $a_2, a_4 \in H \setminus \{z\}$. Dann gilt $\overline{a_1, a_2} \cap \overline{a_3, a_4} \neq \varnothing$.*



Beweis. „$\Longrightarrow$“ ist klar. „$\Longleftarrow$“: Zeige für nicht kollineare $a, b, c \in P$, dass

$$U := \bigcup_{x \in \overline{b,c}} \overline{a, x} = \overline{\{a, b, c\}}$$

gilt. Zeige dazu, dass U ein Unterraum von P und weiter sogar projektive Ebene ist. Ausführung in der Übung. ∎

Die Verallgemeinerung des Vorgehens aus §2 liefert den „**projektiven Abschluss**“ eines affinen Raumes:

(10.14) Satz. *Sei $(A, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum und $\mathfrak{E}$ die Menge seiner Ebenen. Zu $E \in \mathfrak{E}$ setze $[E] := \{[G]\,;\ G \in \mathfrak{G}(E)\}$. Mit*

$$\mathcal{F} := \{[E]\,;\ E \in \mathfrak{E}\}, \qquad F := \{[G]\,;\ G \in \mathfrak{G}\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f$$

$$P := A \cup F, \qquad \mathfrak{G}' = \{G \cup \{[G]\}\,;\ G \in \mathfrak{G}\} \cup \mathcal{F}$$

ist $(P, \mathfrak{G}')$ ein projektiver Raum.

Beweis. (I1) Seien $x, y \in P, x \neq y$. Nur der Fall $x = [G]$, $y = [H]$ ist nicht offensichtlich. Es kann $\overline{x, y}$ nur in $\mathcal{F}$ liegen. Sei $a \in A$, oE. $a \in G \cap H$ (wähle sonst $\{a\|G\}, \{a\|H\}$), dann ist $E := \overline{G \cup H}$ eine (affine) Ebene mit $x, y \in [E]$, also $\overline{x, y} \in \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Sei $[E'] \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in [E']$, d.h. $\exists G', H' \in \mathfrak{G}(E')$ mit $G \| G'$, $H \| H'$. Aus (10.6.3) folgt:

$$\forall K \in \mathfrak{G}(E)\ \exists K' \in \mathfrak{G}(E') :\ K \| K' \implies [E] = [E']$$

und $\overline{x,y} = [E]$ ist eindeutig.

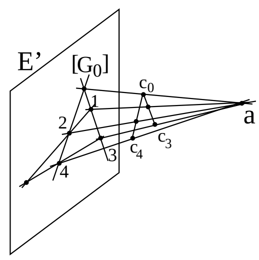
(I3) ist für beide Typen von Geraden klar (vgl. (2.6)).

Sei nun E' eine Ebene in P. Wir müssen zeigen, dass $(E', \mathfrak{G}'(E'))$ eine projektive Ebene ist.

1. Fall: $E' \cap A \neq \varnothing$ und a, b, c ein Erzeugendensystem von E'. Da F ein Unterraum ist, gilt oE. $a \in A$. Gilt etwa $b \in F$, so existiert $b' \in \overline{a,b} \setminus \{a, b\} \subseteq A$ und die Hüllen von a, b, c bzw. a, b', c in P sind gleich. Entsprechendes gilt für c. Wir können also oE. annehmen, dass $a, b, c \in A$. Dann ist $E = \overline{a,b,c}$ eine affine Ebene und $E \cup [E]$ ein Unterraum von P. Somit ist $E \cup [E] = E'$ projektiver Abschluss von E, also eine projektive Ebene.

2. Fall: $E' \cap A = \varnothing$, also $E' \subseteq F$. Für $i \in \{0, \ldots, 4\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$, so dass $[G_i]$ fünf verschiedene Punkte von E' sind und so dass $[G_0], [G_1], [G_3]$ bzw. $[G_0], [G_2], [G_4]$ auf zwei verschiedenen Geraden in E' liegen (existiert wegen (I3)). Wir zeigen: Die Verbindungsgeraden von $[G_1], [G_2]$ bzw. $[G_3], [G_4]$ besitzen einen Schnittpunkt (in E'). Nach (10.13) folgt dann, dass E' eine projektive Ebene ist.

Sei $a \in A$ und oE. $\forall i \in \{0, \ldots, 4\} : a \in G_i$. Da G_0, G_1, G_3 bzw. G_0, G_2, G_4 jeweils in einer Ebene liegen, existieren $c_i \in G_i \setminus \{a\}$ mit c_0, c_1, c_3 bzw. c_0, c_2, c_4 kollinear (beachte dazu $|G_i| \geq 3$ wegen (10.4)). Die Geraden $\overline{c_1, c_2}$ und $\overline{c_3, c_4}$ liegen somit in der Ebene $\overline{\{c_0, c_1, c_2\}}$. Sei



$$H := \begin{cases} \overline{a,b} & \text{falls } \exists\, b = \overline{c_1, c_2} \cap \overline{c_3, c_4} \\ \{a \| \overline{c_1, c_2}\} & \text{falls } \overline{c_1, c_2} \| \overline{c_3, c_4} \end{cases}$$

Dann liegen G_1, G_2, H bzw. G_3, G_4, H in den Ebenen $\overline{\{a, c_1, c_2\}}$ bzw. $\overline{\{a, c_3, c_4\}}$. Daher gilt $[H] = \left[\overline{\{a, c_1, c_2\}}\right] \cap \left[\overline{\{a, c_3, c_4\}}\right]$. Somit ist $[H]$ der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $[G_1], [G_2]$ und $[G_3], [G_4]$. ■

$(P, \mathfrak{G}')$ heißt **projektiver Abschluss** von $(A, \mathfrak{G})$ und $F = \mathfrak{G}/\|$ wird **Fernhyperebene** genannt.

(10.15) Bemerkung. 1. F ist tatsächlich eine Hyperebene von P: Für $a \in P \setminus F$ fest, und $r \in P$ beliebig, ist $r \in \overline{F \cup \{a\}}$ zu zeigen. OE. $r \notin F \cup \{a\}$. Natürlich gilt $x := [\overline{a,r}] \in F \implies r \in \overline{x,a} \subseteq \overline{F \cup \{a\}}$ und die Behauptung folgt.

2. Aus (10.11) ergibt sich $\dim A = \dim P$.

Als Verallgemeinerung von (5.1) gilt auch hier ein

(10.16) Fortsetzungssatz. *Sei $(A, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum mit projektivem Abschluss $(P, \mathfrak{G}')$ und Fernhyperebene F. Weiter sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$. Dann gilt:*

(1) $\forall G, H \in \mathfrak{G}: \ G \| H \iff \alpha(G) \| \alpha(H)$.

(2) $\alpha^* : P \to P;\ x \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \textit{falls } x \in A \\ [\alpha(G)] & \textit{falls } x = [G] \in F \end{cases}$ *ist ein Automorphismus von* $(P, \mathfrak{G}')$.

(3) α^* *ist die eindeutig bestimmte Kollineation von* P*, die* α *fortsetzt, d. h.* $\alpha^*|_A = \alpha$.

(4) *Die Abbildung* $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}');\ \alpha \mapsto \alpha^*$ *ist ein Monomorphismus und* $(\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G}))^* = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}')\,;\ \sigma(F) = F\}$.

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: Für $G = H$ ist nichts zu zeigen, also sei $G \neq H$. Für $G \| H$ ist $E := \overline{G \cup H}$ und damit auch $\alpha(E)$ eine Ebene (vgl. (9.21)). Die Behauptung folgt wie in (5.1.1). „$\Longleftarrow$“ da auch $\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$.

(2) Wegen (1) ist α^* wohldefiniert. Da $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$ existiert, ist α bijektiv.

α^* ist Kollineation: Sei $K \in \mathfrak{G}'$.

1. Fall: $K = G \cup \{[G]\}$ für ein $G \in \mathfrak{G}$. Dann gilt $\alpha^*(K) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\} \in \mathfrak{G}'$.

2. Fall: $K \subseteq F$, also existiert eine Ebene $E \subseteq A$ mit $K = [E] = \{[G]\,;\ G \in \mathfrak{G}(E)\}$. Da $\alpha(E)$ Ebene in A ist, folgt

$$\alpha^*(K) = \{[\alpha(G)]\,;\ G \in \mathfrak{G}(E)\} = \{[H]\,;\ H \in \mathfrak{G}(\alpha(E))\} = [\alpha(E)] \in \mathfrak{G}'.$$

In beiden Fällen ergibt sich $\alpha^*(K) \in \mathfrak{G}'$. Da dies auch für $(\alpha^{-1})^* = (\alpha^*)^{-1}$ gilt, ist α^* ein Automorphismus.

(3) Sei $\alpha' \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}')$ mit $\alpha'|_A = \alpha$ und $G \in \mathfrak{G}$. Dann gilt

$$\alpha'(G) = \alpha(G) \implies \alpha'(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\} \implies \alpha'([G]) = \alpha^*([G]).$$

Es folgt $\alpha' = \alpha^*$.

(4) Injektivität und Homomorphie folgen aus der Definition.

$$\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})^* \subseteq \{\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}')\,;\ \sigma(F) = F\}$$

ist klar. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}')$ mit $\sigma(F) = F$ gilt $\sigma|_A : A \to A \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$. Wegen (3) gilt $(\sigma|_A)^* = \sigma$. Es folgt die Behauptung. ■

11 Koordinatenräume

Im Raum gilt der Satz von Desargues immer. Man muss also nur affine bzw. projektive Ableitungen von Vektorräumen betrachten. Der Kürze halber sprechen wir auch oft von affinen bzw. projektiven Koordinatenräumen.

Der Satz von Desargues

(11.1) Satz. *Sei* $(P, \mathfrak{G})$ *ein affiner bzw. projektiver Raum mit* $\dim P \geq 3$. *Dann gelten die affinen bzw. projektiven Axiome von Desargues: (Ad) und (AD) bzw. (PD).*

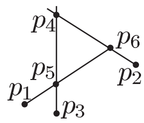
Beweis. Sei $(P, \mathfrak{G})$ zunächst ein projektiver Raum. Seien $G_1, G_2, G_3 \in \mathfrak{G}$ verschieden und kopunktal, etwa $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien ferner $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ verschieden und $p_k := \overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (die Existenz der p_k folgt aus (VY)).

Zu zeigen: p_1, p_2, p_3 sind kollinear.

1. Fall: $G_3 \not\subseteq \overline{G_1 \cup G_2}$. Dann sind die Ebenen $E = \overline{\{a_1, a_2, a_3\}}$ und $E' = \overline{\{b_1, b_2, b_3\}}$ verschieden. Es gilt $p_k \in E \cap E'$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$. Nach (10.5) ist $E \cap E'$ *keine* Ebene, also $E \cap E' = \overline{p_1, p_2}$ und somit $p_3 \in \overline{p_1, p_2}$.

2. Fall: $G_3 \subseteq \overline{G_1 \cup G_2}$ (alle in einer Ebene). Dann gilt $p_1, p_2, p_3 \in \overline{G_1 \cup G_2}$. Wähle $G_0 \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G_0 \not\subseteq \overline{G_1 \cup G_2}$ (möglich, da $\dim P \geq 3$) und $a_0, b_0 \in G_0 \setminus \{z\}$ verschieden (also $a_0, b_0 \notin \overline{G_1 \cup G_2}$). Wegen Fall 1 sind kollinear:

$$
\begin{array}{lll}
p_1 = \overline{a_2, a_3} \cap \overline{b_2, b_3}, & p_5 := \overline{a_0, a_2} \cap \overline{b_0, b_2}, & p_6 := \overline{a_0, a_3} \cap \overline{b_0, b_3} \\
p_2 = \overline{a_1, a_3} \cap \overline{b_1, b_3}, & p_4 := \overline{a_0, a_1} \cap \overline{b_0, b_1}, & p_6 \\
p_3 = \overline{a_1, a_2} \cap \overline{b_1, b_2}, & p_4, \quad p_5 &
\end{array}
$$



Somit gilt $p_1, p_2, p_3 \in \overline{\{p_4, p_5, p_6\}} =: E$. Da nach Konstruktion $p_4 \notin \overline{G_1 \cup G_2}$ gilt, ist $\overline{G_1 \cup G_2} \cap E$ keine Ebene und aus $p_1, p_2, p_3 \in \overline{G_1 \cup G_2} \cap E$ folgt die Kollinearität.

Sei nun $(P, \mathfrak{G})$ ein affiner Raum und $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}})$ sein projektiver Abschluss. Wenn $a_i, b_i \in P$ die Voraussetzungen von (AD) bzw. (Ad) erfüllen, dann gilt in $\tilde{P}$:

$$p_3 := [\overline{a_1, a_2}] = [\overline{b_1, b_2}], \quad p_2 := [\overline{a_1, a_3}] = [\overline{b_1, b_3}]$$

Da (PD) in $\tilde{P}$ gilt, ist

$$p_1 := \left(\overline{a_2, a_3} \cup \left\{[\overline{a_2, a_3}]\right\}\right) \cap \left(\overline{b_2, b_3} \cup \left\{[\overline{b_2, b_3}]\right\}\right) \in \overline{p_2, p_3}.$$

Da p_2, p_3 auf der Fernhyperebene liegen, ist

$$p_1 = [\overline{a_2, a_3}] = [\overline{b_2, b_3}] \implies \overline{a_2, a_3} \| \overline{b_2, b_3}.$$

■

Bemerkung. 1. Wie bereits in Geometrie I angedeutet gibt es jede Menge „nicht-Desarguessche Ebenen“. Beispiele sind die Moulton-Ebene und Ebenen über Fastkörpern.

2. Der Satz besagt, dass dieses Phänomen im Raum nicht auftritt. Alle affinen und projektiven Räume mit Dimension ≥ 3 können mit einem Schiefkörper koordinatisiert werden, vgl. (10.2.5,6).

3. Wir skizzieren kurz eine Vorgehensweise zur Koordinatisierung affiner Räume $(P, \mathfrak{G})$, die sich von der Streckenrechnung aus Geometrie I unterscheidet:

   - Die Translationsgruppe T operiert regulär auf P. Daher kann sie mit P identifiziert werden, d. h. $(P, +)$ ist eine — zu T isomorphe — abelsche Gruppe.
   - Die Streckungen Δ, die $0 \in P$ festlassen bilden eine Gruppe und sind Endomorphismen von $(P, +)$.
   - $\Delta_0 = \Delta \cup \{0\}$ ist mit der natürlichen Addition von Endomorphismen eine abelsche Gruppe.
   - Daher ist Δ_0 ein — nicht notwendig kommutativer — Teilkörper des Endomorphismenrings von $(P, +)$ und somit $(P, +)$ ein Vektorraum über Δ_0.
   - Die Geraden habe die in (10.2.5) beschriebene Gestalt.
   - $(P, \mathfrak{G})$ ist isomorph zu $\mathrm{AG}(P, \Delta_0)$.

4. Der folgernde Satz (11.2) zeigt im Wesentlichen wie der projektive Raum $(P, \mathfrak{G})$ koordinatisiert werden kann, wenn man den affinen Raum $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ schon koordinatisiert hat.

Der projektive Abschluss

Wir stellen den Zusammenhang zwischen einem affinen Koordinatenraum, seinem projektiven Abschluss und einem geeigneten projektiven Koordinatenraum her.

(11.2) Satz. *Sei (V, K) ein Vektorraum. Dann ist $(P', \mathfrak{G}') := \mathrm{PG}(K \times V, K)$ kanonisch isomorph zum projektiven Abschluss $(P, \mathfrak{G})$ von $\mathrm{AG}(V, K)$. Ein Isomorphismus ist gegeben durch*

$$\iota^* : P \to P';\ x \mapsto \begin{cases} (1, x)K & \text{falls } x \in V \\ (0, b)K \quad \text{für ein } b \in \overline{0, x} \setminus \{0, x\} & \text{falls } x \in P \setminus V \end{cases}.$$

Beweis. Die Abbildung $\iota : V \to P';\ x \mapsto (1, x)K$ ist offenbar injektiv und ι^* ist eine Fortsetzung. Wir setzen $F := P \setminus V$ und bemerken, dass F eine Hyperebene in P ist.

ι^* ist wohldefiniert: $b \in \overline{0, x} \setminus \{0, x\} \implies \overline{0, x} \setminus F = bK$. Für $b' \in \overline{0, x} \setminus \{0, x\}$ folgt also $b'K = bK$ und $(0, b)K = (0, b')K$. Wegen $b \neq 0$ ist $(0, b)K \in P'$.

ι^* ist surjektiv: Sei $(\lambda, a)K \in P'$. Im Fall $\lambda = 0$ ist $\iota^*(F \cap \overline{0, a}) = (0, a)K$. Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt $\iota^*(a\lambda^{-1}) = \iota(a\lambda^{-1}) = (1, a\lambda^{-1})K = (\lambda, a)K$.

ι^* ist injektiv: Seien $x, y \in P$ mit $\iota^*(x) = \iota^*(y)$. Gilt $x \in V$ oder $y \in V$, so folgt $x = y$ aus der Injektivität von ι und der Konstruktion von ι^*. Es bleibt der Fall $x, y \in F$. Für $b \in \overline{0, x} \setminus \{0, x\}$, $c \in \overline{0, y} \setminus \{0, y\}$ folgen $bK = cK$ und daher $\overline{0, x} = \overline{0, y}$. Dann gilt

$$x = \overline{0, x} \cap F = \overline{0, y} \cap F = y.$$

Um zu sehen, dass ι^* ein Isomorphismus ist, sei $G \in \mathfrak{G}$ eine Gerade. Es ist $\iota^*(G) \in \mathfrak{G}'$ zu zeigen.

1. Fall: $G \not\subseteq F$. Seien $u = G \cap F$ und $a, b \in V$, $b \neq 0$, mit $G \setminus \{u\} = a + bK$. Dann gilt $G = (a + bK) \cup \{u\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \iota^*(G) &= \{(1, a + b\lambda)K\,;\ \lambda \in K\} \cup \{(0, b)K\} \\ &= \{((1, a) + (0, b)\lambda)K\,;\ \lambda \in K\} \cup \{(0, b)K\} \\ &= \{((1, a)\lambda + (0, b)\mu)K\,;\ \lambda, \mu \in K\}, \end{aligned}$$

die Punktmenge der Geraden $(1, a)K + (0, b)K$ in $\mathrm{PG}(V, K)$.

2. Fall: $G \subseteq F$, etwa $G = \overline{u_1, u_2}$. Sei $b_i \in \overline{0, u_i} \setminus \{0, u_i\}$, also $b_iK = \overline{0, u_i} \setminus \{u_i\}$ und $\iota^*(u_i) = (0, b_i)K$. Sei $E := \overline{\{0, u_1, u_2\}}$ (Ebene) und $u \in F$, sowie $b \in \overline{0, u} \setminus \{0, u\}$. Es gilt $E \cap V = b_1K + b_2K$ und

$$u \in G \iff b \in b_1K + b_2K \iff (0, b)K \subseteq (0, b_1)K + (0, b_2)K.$$

b_1, b_2 sind linear unabhängig, somit ist $(0, b_1)K + (0, b_2)K$ eine Gerade in P' und es gilt $\iota^*(G) = (0, b_1)K + (0, b_2)K$ (genauer: $\iota^*(G) = \Phi((0, b_1)K + (0, b_2)K)$, die Menge der Punkte, die mit der Geraden $(0, b_1)K + (0, b_2)K$ inzidieren). ∎

Unterräume affiner und projektive Räume

(11.3) Satz. *Sei (V, K) ein Vektorraum mit $\dim V \geq 3$ und $(P, \mathfrak{G}) := \mathrm{PG}(V, K)$. Zu $U \subseteq V$ sei $\Phi(U) := \{aK\,;\ a \in U \setminus \{0\}\}$. Dann gelten:*

(1) $\bigcup_{a \in U} aK$ *ist Untervektorraum von V genau dann, wenn $\Phi(U)$ Unterraum von P ist.*

(2) *Sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller Untervektorräume von V und $\mathfrak{T}$ die Menge aller Unterräume von P. Die Abbildung $\mathfrak{U} \to \mathfrak{T}$; $U \mapsto \Phi(U)$ ist bijektiv und inklusionserhaltend (d.h. $U \subseteq U' \iff \Phi(U) \subseteq \Phi(U')$).*

(3) $\Phi(\langle U \rangle) = \overline{\Phi(U)}$.

(4) *Falls* $0 \notin U$ *und* $\forall a, b \in U : a \neq b \iff aK \neq bK$, *dann gilt:*

(a) U *ist linear unabhängig* $\iff$ $\Phi(U)$ *ist unabhängig in* P.

(b) U *ist linear abhängig* $\iff$ $\Phi(U)$ *ist abhängig in* P.

(c) U *ist Basis des Untervektorraums* $W \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \Phi(U)$ *ist Basis von* $\Phi(W) \in \mathfrak{T}$.

(5) *Sei* $U \in \mathfrak{U}$. *Es ist* U *Hyperebene in* V $\iff$ $\Phi(U)$ *ist Hyperebene in* P.

(6) $\dim P = \dim V - 1$.

Beweis. (1) Aufgabe 34.

(2) Übung!

(3) Übung!

(4) Wir zeigen zunächst Aussage (b):

$$\begin{aligned}
& U \quad \text{linear abhängig} \\
\iff \quad & \exists v \in U : v \in \langle U \setminus \{v\} \rangle \\
\iff \quad & \exists v \in U : vK \in \Phi(\langle U \setminus \{v\} \rangle) = \overline{\Phi(U \setminus \{v\})} = \overline{\Phi(U) \setminus \{vK\}} \\
\iff \quad & \Phi(U) \quad \text{abhängig.}
\end{aligned}$$

Daher folgt Aussage (4) aus (3).

(5) 1. Beweis mit (2) und (9.17). 2. Beweis: U Hyperebene

$$\begin{aligned}
\iff \quad & U \neq V \quad \text{und} \quad \exists v \in V : \langle U \cup \{v\} \rangle = V \\
\iff \quad & \Phi(U) \neq P \quad \text{und} \quad P = \Phi(\langle U \cup \{v\} \rangle) = \overline{\Phi(U \cup \{v\})} = \overline{\Phi(U) \cup \{vK\}}
\end{aligned}$$

(etwa $vK \notin \Phi(U)$) $\iff$ $\Phi(U)$ Hyperebene in P.

(6) klar wegen (4) und (9.15). ■

Bemerkung. Ist (V, K) ein Vektorraum mit $\dim V \geq 3$, so ist jede Ebene in $\mathrm{PG}(V, K)$ desarguessch. Ist K kommutativ, so ist jede Ebene pappussch. Ist K nicht kommutativ, so ist keine Ebene pappussch.

(11.4) *Sei* $(P, \mathfrak{G})$ *ein projektiver Raum und seien* S *und* T *endlich-dimensionale Unterräume von* P. *Dann gilt:*

(1) ***Dimensionsformel*** $\dim \overline{S \cup T} + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$.

(2) $S \subseteq T \implies \dim S \leq \dim T$.

(3) $S \subseteq T \wedge \dim S = \dim T \implies S = T$.

(4) $S \cap T = \varnothing \iff \dim \overline{S \cup T} = \dim S + \dim T + 1$.

Beweis. Beachte: $\dim \varnothing = -1$.

(1) Im Fall $\dim P \leq 2$ sind alle möglichen Fälle leicht zu behandeln. Falls $\dim P \geq 3$, so ist P desarguessch, also existiert ein Vektorraum (V, K) mit $(P, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{PG}(V, K)$. Wegen (11.3) existieren Untervektorräume $U, W \leq V$ mit $S = \Phi(U)$ und $T = \Phi(W)$. Die Behauptung folgt nun aus (11.3.3), (11.3.6) und der Dimensionsformel der linearen Algebra:

$$\begin{aligned} \dim \overline{S \cup T} &= \dim \overline{\Phi(U \cup W)} = \dim \Phi(U + W) \\ &= \dim_K(U + W) - 1 = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K(U \cap W) - 1 \\ &= (\dim S + 1) + (\dim T + 1) - (\dim(S \cap T) + 1) - 1. \end{aligned}$$

(2) und (3): Basisergänzungssatz (9.11) und Gleichmächtigkeit von Basen (9.12).

(4) direkt aus (1). ∎

Bemerkung. Die Dimensionsformel gilt nicht für affine Räume. Etwa: Zwei parallele Geraden im $\mathbb{R}^3$ verletzen (11.4.1) (denn $2 + (-1) \neq 1 + 1$). Bei windschiefen Geraden und für affine Unterräume S, T mit $S \cap T \neq \varnothing$ ist die Dimensionsformel anwendbar (sie folgt dann aus der Dimensionsformel der linearen Algebra).

(11.5) *Sei (V, K) ein Vektorraum, $|K| \geq 3$, und $(A, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(V, K)$. Für $S \subseteq V, S \neq \varnothing$, gilt:*

(1) *S ist Unterraum von A genau dann, wenn $S = a + U$ für $a \in V$ und Untervektorraum $U \subseteq V$.*

(2) $\langle S \rangle = \overline{S \cup \{0\}}$.

(3) *Für $a \in S$ gilt: $\overline{S} = a + \overline{S - a} = a + \langle S - a \rangle$.*

(4) *Für $S = \{a_0, \ldots, a_n\}$ gilt*

$$\overline{S} = a_0 + (a_1 - a_0)K + \cdots + (a_n - a_0)K = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda_i \,;\ \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

(5) *Sei $a \in S$. Dann gilt:*

- **(a)** *S ist unabhängig $\iff$ $(S - a) \setminus \{0\}$ ist linear unabhängig.*
- **(b)** *S ist abhängig $\iff$ $(S - a) \setminus \{0\}$ ist linear abhängig.*
- **(c)** *S ist Basis $\iff$ $(S - a) \setminus \{0\}$ ist vektorielle Basis.*

(6) *Sei* $a \in V$ *und* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt* $\dim(a+U) = \dim(U)$*. Insbesondere gilt* $\dim A = \dim V$*.*

Beweis. Wir nutzen die Tatsache, dass die Abbildung $\tau_a : V \to V\,;\ x \mapsto x + a$ für alle $a \in V$ offenbar ein Automorphismus von $(V, \mathfrak{G})$ ist (eine Translation!).

(1) und (2): Übung.

(3) Wegen (9.21.2) gilt $\overline{S} = \tau_a \circ \tau_{-a}(\overline{S}) = \tau_a(\overline{\tau_{-a}(S)}) = a + \overline{S - a}$. Wegen $0 \in S - a$ und (2) folgt $\langle S - a \rangle = \overline{S - a}$.

(4) Aufgaben 24 und 27.

(5) Wir zeigen zunächst Aussage (b): Sei also S abhängig. Wegen (9.21.4) ist dann $\tau_{-a}(S) = S - a$ ebenfalls abhängig und es existiert $x \in S - a$ mit $x \in \overline{(S-a) \setminus \{x\}}$.

1. Fall: $x \neq 0$, dann gilt $0 \in (S - a) \setminus \{x\}$ und wegen (2) gilt

$$\langle (S-a) \setminus \{x\} \rangle = \overline{(S-a) \setminus \{x\}} = \big\langle \big((S-a) \setminus \{0\}\big) \setminus \{x\} \big\rangle\,.$$

Daher muss $(S - a) \setminus \{0\}$ linear abhängig sein.

2. Fall: $x = 0$. Es existieren $a_0, \ldots, a_n \in (S-a) \setminus \{0\}$ mit $0 \in \overline{\{a_0, \ldots, a_n\}}$ wegen der Endlichkeitsbedingung (9.7). Nach (4) existieren $\lambda_i \in K$ mit $0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_i$ und $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Also existiert i_0 mit $\lambda_{i_0} \neq 0$ und $a_0, \ldots, a_n$ sind linear abhängig. Damit ist auch $(S-a) \setminus \{0\}$ linear abhängig.

Sei umgekehrt $(S - a) \setminus \{0\}$ linear abhängig. Dann existiert $y \in (S-a) \setminus \{0\}$ mit

$$y \in \big\langle \big((S-a) \setminus \{0\}\big) \setminus \{y\} \big\rangle \overset{(2)}{=} \overline{(S-a) \setminus \{y\}}$$

und $S - a$ ist abhängig.

Daraus folgt auch Aussage (a).

Zu Aussage (c) ist wegen (a) noch $\overline{S} = A \iff \langle (S-a) \setminus \{0\} \rangle = V$ zu zeigen. Wegen

$$\langle (S-a) \setminus \{0\} \rangle = \overline{S - a} = \tau_{-a}(\overline{S})$$

und $V = A$ folgt auch diese Behauptung.

(6) Wegen (9.21.3) gilt $\dim(a+U) = \dim U$, also oE. $a = 0$. Nun folgt die Behauptung aus (5) mit (U, K) statt (V, K). ∎

Hyperebenen

Affine Unterräume des K^n (K Körper, auch $K = \mathbb{Z}_2$ möglich) treten in der linearen Algebra als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme auf. Wir betrachten hier die Hyperebenen etwas genauer.

Es sei (V, K) ein (Rechts-)Vektorraum und es bezeichne

$$\mathcal{L} := \{f : V \to K\,;\ f \text{ linear}\} = \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

die Menge der Linearformen auf V. Weiter sei $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \setminus \{0\}$. Für $f, g \in \mathcal{L}$, $\lambda \in K$ und für alle $x \in V$ setze

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Dann ist $(\mathcal{L}, K)$ ein Links-Vektorraum (Nachrechnen!).

Sei $U \leq V$ eine (vektorielle) Hyperebene. Dann existiert eine Linearform $f \in \mathcal{L}$ mit $\operatorname{Kern} f = \{x \in V\,;\ f(x) = 0\} = U$. Man konstruiere f z. B. wie folgt:
Sei $v \in V \setminus U$, also $V = U \oplus vK$; dann

$$\exists_1 (u_x, \lambda_x) \in U \times K :\ x = u_x + v\lambda_x\,; \quad \text{setze} \quad f(x) := \lambda_x\,.$$

Umgekehrt ist der Kern einer Linearform $f \neq 0$ immer eine Hyperebene, denn für $v \in V$ mit $f(v) = 1$ gilt $V = U \oplus vK$. (Bei endlicher Dimension, kann man auch mit der Dimensionsformel argumentieren: $\dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Bild} f = n$.)

Sei nun H eine affine Hyperebene, also $H = a + U$ für ein $a \in V$ und eine vektorielle Hyperebene $U \leq V$. Für $f \in \mathcal{L}^*$ mit $\operatorname{Kern} f = U$ gilt $H = \{x \in V\,;\ f(x) = f(a)\}$, denn für alle $u \in U$ gilt $f(a+u) = f(a) + f(u) = f(a)$, also $H \subseteq \{x \in V\,;\ f(x) = f(a)\}$. Für $x \in V$ mit $f(x) = f(a)$ gilt $f(x-a) = 0$, d. h. $x - a \in U$, also $x \in H$.

Zusammenfassend stellen wir fest:

(11.6) *Sei (V, K) ein Vektorraum. Dann gilt:*

(1) *Die vektoriellen Hyperebenen $H \leq V$ sind genau die Kerne der Linearformen ($\neq 0$), also von der Form $H = \{x \in V\,;\ f(x) = 0\} = \operatorname{Kern} f$ mit $f \in \mathcal{L}^*$.*

(2) *Für $g, h \in \mathcal{L}^*$ gilt:* $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} g \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ *mit* $\lambda f = g$.

(3) *Die affinen Hyperebenen in $\mathrm{AG}(V, K)$ sind genau die Mengen der Form*

$$H_{f,\mu} := \{x \in V\,;\ f(x) = \mu\}\,, \quad \textit{wobei} \quad f \in \mathcal{L}^*, \mu \in K.$$

(4) *Es gilt:* $H_{f,\mu} = H_{g,\nu} \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ *mit* $\lambda f = g$ *und* $\lambda \mu = \nu$.

Beweis. (1) siehe oben, (2) ist Spezialfall von (4).

(3) „$\Longleftarrow$" siehe oben, $\mu = f(a)$. „$\Longrightarrow$": Wegen $f \neq 0$ existiert ein $v \in V$ mit $f(v) \neq 0$. Dann gilt $f(vf(v)^{-1}\mu) = f(v) \cdot f(v)^{-1}\mu = \mu$ und $H_{f,\mu} = vf(v)^{-1}\mu + \operatorname{Kern} f$ ist eine affine Hyperebene.

(4) „$\Longleftarrow$“ ist klar. „$\Longrightarrow$“: 1. Fall: $\mu \neq 0$. Setze $\lambda := \nu\mu^{-1}$. Finde $a \in V$ und Hyperebene $U \leq V$ mit $H_{f,\mu} = H_{g,\nu} = a + U$. Es folgt $f(a) = \mu$, $g(a) = \nu$ nach Voraussetzung. Für alle $x \in V$ existiert genau ein $(u_x, \alpha_x) \in U \times K$ mit $x = u_x + a\alpha_x$ und es folgt

$$f(x) = f(u_x + a\alpha_x) = f(a\alpha_x) = \mu\alpha_x. \quad \text{Genauso} \quad g(x) = \nu\alpha_x = \lambda\mu\alpha_x = \lambda f(x).$$

Somit ergibt sich $\lambda f = g$.

2. Fall: $\mu = 0$. OE. $\nu = 0$ (wende sonst 1. Fall an mit ν statt μ). Also $H_{f,0} = H_{g,0} = U$ für eine Hyperebene $U \leq V$. Sei $a \in V \setminus U$. Dann gilt $f(a) \neq 0 \neq g(a)$ und $a + U = H_{f,f(a)} = H_{g,g(a)}$. Mit 1. Fall $\exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \lambda f = g$. ■

(11.7) *Es sei (V, K) eine Vektorraum.* $\mathrm{PG}(K \times V, K)$ *werde als projektiver Abschluss von* $\mathrm{AG}(V, K)$ *aufgefasst (vgl. (11.2)). Hüllen sind in* $\mathrm{PG}(K \times V, K)$ *zu lesen.*
Dann gilt $\overline{H_{f,\mu}} = \mathrm{Kern}\,\ell$ *mit* $\ell \in \mathrm{Hom}(K \times V, K)$ *und* $\ell(x_0, x) = -\mu x_0 + f(x)$.

Beweis. Für $x \in H_{f,\mu}$ gilt $-\mu + f(x) = 0$, daher hat man $\ell(\iota^*(x)) = \ell(1, x)K = 0$. Das zeigt $H_{f,\mu} \subseteq \mathrm{Kern}\,\ell$ und wegen (11.3.5) und (11.6.1) $\overline{H_{f,\mu}} \subseteq \mathrm{Kern}\,\ell$. Andererseits gilt für $(1, x)K \in \mathrm{Kern}\,\ell \cap V : \ell(1, x) = 0 \iff f(x) = \mu$. Mit (10.11.3) folgt „=“. ■

(11.8) Bemerkung. (1) Wählt man die Standardbasis des K^n, so hat jedes $f \in \mathcal{L}$ die Form $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a^Tx$ (d.h. $(a_1, \ldots, a_n)$ ist Matrixdarstellung von f bzgl. der Standardbasis).

(2) Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

kann also durch m Linearformen $f_i \in \mathcal{L}$ und Körperelemente $b_i \in K$ beschrieben werden: $\forall i = 1, \ldots, m : f_i(x) = b_i$. Die Lösungsmenge ist somit $\bigcap_{i=1,\ldots,m} H_{f_i,b_i}$, ein affiner Teilraum von K^n (der natürlich auch leer sein kann). Wegen Aufgabe 30 ist auch jeder affine Teilraum Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems. Die Anzahl der mindestens benötigten Hyperebenen (= Anzahl der Gleichungen) bestimmt die Dimension des Lösungsraums (hier ohne Beweis, Stichwort „Rang“).

(3) In einem Vektorraum (V, K) entsprechen also den vektoriellen Hyperebenen (und damit auch den Hyperebenen in $\mathrm{PG}(V, K)$) umkehrbar eindeutig die 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathcal{L}$.

Ein Unterraum G von $\mathrm{PG}(V, K)$ heißt **Hypergerade**, wenn es zwei verschiedene Hyperebenen H_1, H_2 gibt mit $G = H_1 \cap H_2$. Ist $\dim \mathrm{PG}(V, K) = n$ endlich, so sind die Hypergeraden genau die $(n-2)$-dimensionalen Unterräume von $\mathrm{PG}(V, K)$.

Bezeichnet $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}_g$ die Menge aller Hyperebenen bzw. -geraden in $\mathrm{PG}(V, K)$, dann ist $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_g, \supseteq)$ ein Inzidenzraum (der sogar ein projektiver Raum ist), genannt **Dualraum** von $\mathrm{PG}(V, K)$.

$(\mathcal{H}, \mathcal{H}_g, \supseteq)$ wird in natürlicher Weise durch den Links-Vektorraum $(\mathcal{L}, K)$ koordinatisiert. Seien etwa $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$ linear unabhängig, dann gilt

$$\operatorname{Kern} f_1 \cap \operatorname{Kern} f_2 = \bigcap_{\lambda,\mu \in K} \operatorname{Kern}(\lambda f_1 + \mu f_2),$$

und das wird durch den zweidimensionalen Untervektorraum $Kf_1 + Kf_2$ von $\mathcal{L}$ beschrieben.

Die Korrespondenz projektivem Raum und Dualraum entspricht genau der Korrespondenz zwischen Vektorraum und seinem dualen Vektorraum.

Im Spezialfall $\dim V = 3$ ist der hier definierte Dualraum genau der in (1.1.10) betrachtete Inzidenzraum.

(4) Zwei Darstellungen für affine (und auch projektive) Unterräume sind:

Parameterdarstellung, (explizit), d. h. in der Form $a_0 + a_1K + a_2K + \cdots + a_dK$, wobei die $a_i - a_0$ linear unabhängig sind. Dann ist d die Dimension;

Koordinatendarstellung, (implizit), d. h. als Lösung eines linearen Gleichungssystems wie oben beschrieben.

Die Umrechnung einer Koordinatendarstellung in eine Parameterdarstellung ist nichts anderes als das Lösen des definierenden linearen Gleichungssystems.

Die Umrechnung einer Parameterdarstellung in eine Koordinatendarstellung führt auch auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems (Beispiel in Übung).

12 Automorphismen affiner und projektiver Räume

In diesem Abschnitt sei K ein Körper mit $|K| \geq 3$.

(12.1) Fundamentalsatz der affinen Geometrie. *Seien* (V, K) *und* (V', K') *Vektorräume mit* $\dim V \geq 2$, $\dim V' \geq 2$. *Weiter sei* $T' := T(\mathrm{AG}(V', K'))$ *die Translationsgruppe von* $\mathrm{AG}(V', K')$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $\sigma : V \to V'$ *eine semilineare Bijektion und* $\tau \in T'$, *dann ist* $\tau \circ \sigma$ *eine Kollineation* $\mathrm{AG}(V, K) \to \mathrm{AG}(V', K')$.

(2) *Sei* $\varphi : \mathrm{AG}(V, K) \to \mathrm{AG}(V', K')$ *eine Kollineation, dann existiert genau ein* $\tau \in T'$ *und genau eine semilineare Bijektion* $\sigma : V \to V'$ *mit* $\varphi = \tau \circ \sigma$.

Beweis. (1) Genau wie in (5.7). Beachte dabei $\widehat{\sigma}(K) = K'$.

(2) Sei $\tau \in T'$ die (eindeutig bestimmte) Translation mit $\tau(0) = \varphi(0)$. Dann ist $\sigma := \tau^{-1} \circ \varphi : V \to V'$ eine Kollineation mit $\sigma(0) = 0$.

Es gilt $\sigma \tau_x \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(x)}$.

Natürlich ist $\sigma' := \sigma \tau_x \sigma^{-1}$ eine Kollineation von V'. Wegen $\sigma \tau_x \sigma^{-1}(\sigma(G)) = \sigma \tau_x(G) \| \sigma(G)$ ist σ' sogar eine Dilatation. σ' hat keine Fixpunkte, denn $\sigma \tau_x \sigma^{-1}(y) = y$ führt auf $\tau_x \sigma^{-1}(y) = \sigma^{-1}(y)$ — ein Widerspruch, da τ_x keine Fixpunkte hat. Mit $\sigma \tau_x \sigma^{-1}(0) = \sigma(x)$ folgt die Aussage.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\sigma"'] & V \arrow[d, "\sigma"] \\ V' \arrow[r, "\tau_{\sigma(x)}"'] & V' \end{tikzcd}$$

Daher gilt

$$\forall x, y \in V : \sigma(x + y) = \sigma \circ \tau_x(y) = \sigma \circ \tau_x \circ \sigma^{-1} \circ \sigma(y) = \tau_{\sigma(x)} \sigma(y) = \sigma(x) + \sigma(y).$$

Für $x \in V \setminus \{0\}, \lambda \in K$ folgt $\sigma(x\lambda) \in \sigma(xK) = \sigma(\overline{0, x}) = \overline{0, \sigma(x)} = \sigma(x)K'$, also existiert $\widehat{\sigma_x}(\lambda) \in K'$ mit $\sigma(x\lambda) = \sigma(x) \cdot \widehat{\sigma_x}(\lambda)$.

$\widehat{\sigma_x}(\lambda)$ *ist unabhängig von* x.

Sei $y \in V \setminus \{0\}$. 1. Fall: x, y linear unabhängig. Dann sind wegen $y \notin \overline{0, x} \iff \sigma(y) \notin \overline{0, \sigma(x)}$ auch $\sigma(x), \sigma(y)$ linear unabhängig. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma(x)\widehat{\sigma_x}(\lambda) + \sigma(y)\widehat{\sigma_y}(\lambda) &= \sigma(x\lambda + y\lambda) = \sigma((x + y)\lambda) \\ &= \sigma(x + y)\widehat{\sigma_{x+y}}(\lambda) = (\sigma(x) + \sigma(y))\widehat{\sigma_{x+y}}(\lambda) \\ &= \sigma(x)\widehat{\sigma_{x+y}}(\lambda) + \sigma(y)\widehat{\sigma_{x+y}}(\lambda) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt $\widehat{\sigma_x}(\lambda) = \widehat{\sigma_{x+y}}(\lambda) = \widehat{\sigma_y}(\lambda)$.

2. Fall: x, y linear abhängig. Wähle $z \in V$ mit x, z linear unabhängig und zeige wie oben $\widehat{\sigma_x}(\lambda) = \widehat{\sigma_z}(\lambda) = \widehat{\sigma_y}(\lambda)$.

Wir definieren also $\widehat{\sigma}(\lambda) := \widehat{\sigma_x}(\lambda)$ und es gilt $\forall x \in V, \lambda \in K : \sigma(x\lambda) = \sigma(x)\widehat{\sigma}(\lambda)$.

$\widehat{\sigma} : K \to K'$ *ist bijektiv.*

$\widehat{\sigma}$ *ist injektiv:* Für alle $x \in V \setminus \{0\}$, $\lambda, \mu \in K$ mit $\widehat{\sigma}(\lambda) = \widehat{\sigma}(\mu)$ gilt

$$\sigma(x)\widehat{\sigma}(\lambda) = \sigma(x)\widehat{\sigma}(\mu) \implies \sigma(x\lambda) = \sigma(x\mu) \implies x\lambda = x\mu \implies \lambda = \mu.$$

$\widehat{\sigma}$ *ist surjektiv:* Sei $\lambda' \in K'$. Wähle $x \in V \setminus \{0\}$, dann gilt $\sigma(x)\lambda' \in \overline{0, \sigma(x)}$, also existiert $y \in \overline{0, x}$ mit $\sigma(y) = \sigma(x)\lambda'$. Es gilt $y = x\lambda$ für ein $\lambda \in K$, d. h.

$$\sigma(x)\lambda' = \sigma(y) = \sigma(x\lambda) = \sigma(x)\widehat{\sigma}(\lambda) \implies \widehat{\sigma}(\lambda) = \lambda'.$$

Insgesamt ist also $\sigma : V \to V'$ eine semilineare Bijektion mit Begleitisomorphismus $\widehat{\sigma}$. Wegen $\varphi = \tau \circ \sigma$ ist die Behauptung gezeigt. ∎

(12.2) Folgerung. (1) *Koordinatisierender Vektorraum und Körper desarguesscher affiner Räume (mit* $\dim \geq 2$*) sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(2) *Sei* (V, K) *ein Vektorraum und* $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V, K))$. *Dann existiert genau eine Translation* τ *und genau ein* $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ *mit* $\alpha = \tau \circ \sigma$. *Anders ausgedrückt:* $\exists_1 \sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)\, \exists_1 a \in V$ *mit* $\forall x \in V : \alpha(x) = \sigma(x) + a$. *Insbesondere gilt:*

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V, K))_0 := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V, K))\,;\ \alpha(0) = 0\} \cong \Gamma\mathrm{L}(V, K).$$

(12.3) Bemerkung. 1. Der Isomorphie-Begriff für Vektorräume wurde schon in §5 — gegenüber der linearen Algebra — verallgemeinert, nämlich durch die Einführung semilinearer Bijektionen. Der Isomorphie-Begriff aus der linearen Algebra („lineare Bijektion“) ist nur adäquat, wenn der Grundkörper fest ist. Davon kann man aber in der Geometrie nicht ausgehen.

2. Ist (V, K) ein Vektorraum, und gilt $\mathrm{Aut}(K) = \{\mathrm{id}\}$ (etwa für $K \in \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$), so hat jede Affinität $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(V, K))$ eine eindeutige Darstellung $\alpha(x) = \sigma(x) + a$, wobei $a \in V$ und $\sigma \in \mathrm{GL}(V, K)$ (also σ linear).

3. Mit Satz (12.1) ist eine komplette algebraische Darstellung aller relevanten Objekte desarguesscher affiner Räume mit $\dim \geq 2$ gefunden. Für affine Räume mit dim 0 oder 1 ist das nicht möglich, weil die Inzidenzstruktur trivial ist.

(12.4) Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. *Seien* (V, K) *und* (V', K') *Vektorräume mit* $\dim V \geq 3$, $\dim V' \geq 3$ *gegeben. Seien weiter* $(P, \mathfrak{G}) := \mathrm{PG}(V, K)$, $(P', \mathfrak{G}') = \mathrm{PG}(V', K')$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $\sigma : V \to V'$ *eine semilineare Bijektion, dann ist* $\bar{\sigma} : P \to P'$; $xK \mapsto \sigma(x)K'$ *eine Kollineation, die von* σ ***induzierte Kollineation****.*

(2) *Ist $\varphi : P \to P'$ eine Kollineation, dann existiert eine semilineare Bijektion $\sigma : V \to V'$ mit $\varphi = \bar{\sigma}$.*

Beweis. (1) Genau wie in (5.8).

(2) Sei H eine Hyperebene in P. Dann ist $H' := \varphi(H)$ wegen (9.21.7) eine Hyperebene von P'. Wegen (11.3) sind $W := \bigcup_{X \in H} X$ und $W' := \bigcup_{X' \in H'} X'$ Hyperebenen des Vektorraums. Sei $aK \in P \setminus H$. Dann existiert $a' \in V' \setminus W'$ mit $a'K' = \varphi(aK)$ und es gilt $V = W \oplus aK$, $V' = W' \oplus a'K'$.

Die Abbildungen $\kappa : K \times W \to V;\ (\lambda, x) \mapsto x + a\lambda$ und $\kappa' : K' \times W' \to V';\ (\lambda', x') \mapsto x' + a'\lambda'$ sind lineare Bijektionen. Die Surjektivität folgt aus $V = W + aK$, die Injektivität aus

$$\kappa(\lambda, x) = \kappa(\mu, y) \implies x + a\lambda = y + a\mu \implies W \ni x - y = a(\mu - \lambda) \in aK$$

und $W \cap aK = \{0\}$. κ und κ' induzieren wegen (1) Kollineationen:

$$\bar{\kappa} : \mathrm{PG}(K \times W, K) \to \mathrm{PG}(V, K) \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}' : \mathrm{PG}(K' \times W', K') \to \mathrm{PG}(V', K').$$

Sei nun $\widetilde{\mathrm{AG}(W, K)}$ der projektive Abschluss von $\mathrm{AG}(W, K)$ mit Fernhyperebene F. Nach (11.2) gibt es einen Isomorphismus $\iota^* : \widetilde{\mathrm{AG}(W, K)} \to \mathrm{PG}(K \times W, K)$. Setze $\alpha = \bar{\kappa} \circ \iota^*$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(F) &= \bar{\kappa} \circ \iota^*(F) = \bar{\kappa}\left(\{(0, x)K\,;\ x \in W^*\}\right) = \{\kappa(0, x)K\,;\ x \in W^*\} \\ &= \{xK\,;\ x \in W'^*\} = H. \end{aligned}$$

Entsprechend existiert für den projektiven Abschluss $\widetilde{\mathrm{AG}(W', K')}$ von $\mathrm{AG}(W', K')$ mit Fernhyperebene F' eine Kollineation $\beta : \widetilde{\mathrm{AG}(W', K')} \to \mathrm{PG}(V', K')$ mit $\beta(F') = H'$.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{AG(W,K)} \arrow[r, "\tau^*"] \arrow[dl, "\iota^*"'] \arrow[dd, "\alpha"] & \widetilde{AG(W',K')} \arrow[dr, "\iota^{*\prime}"] \arrow[dd, "\beta"'] & \\
PG(K \times W, K) \arrow[dr, "\bar{\kappa}"'] & & & PG(K' \times W', K') \arrow[dl, "\bar{\kappa}'"] \\
 & PG(V,K) \arrow[r, "\varphi"] & PG(V',K') &
\end{tikzcd}$$

Wir restringieren die Kollineation $\tau^* := \beta^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ und erhalten wegen $H' = \varphi(H)$ und $\tau^*(F) = \beta^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(F) = F'$ den Isomorphismus

$$\tau = \tau^*|_{\mathrm{AG}(W, K)} : \mathrm{AG}(W, K) \to \mathrm{AG}(W', K').$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \bar{\kappa} \circ \iota^*(0) = \bar{\kappa}((1, 0)K) = \kappa(1, 0)K = aK \quad \text{(und analog: } \beta(0) = a'K'\text{)} \\ \implies \tau(0) &= \beta^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(0) = \beta^{-1} \circ \varphi(aK) = \beta^{-1}(a'K') = 0. \end{aligned}$$

Nach (12.1.2) ist also $\tau : W \to W'$ eine semilineare Bijektion. Es gilt für alle $x \in W$:

$$\begin{aligned}\varphi((x+a)K) &= \varphi \circ \bar{\kappa}((1,x)K) = \varphi \circ \bar{\kappa}(\iota^*(x)) = \varphi \circ \alpha(x) = \beta \circ \tau(x) \\ &= \bar{\kappa'} \circ \iota'^*(\tau(x)) = \bar{\kappa'}((1,\tau(x))K') = (\tau(x)+a')K'.\end{aligned}$$

Da $V = W \oplus aK$ und $V' = W' \oplus a'K'$ ist

$$\sigma : V \to V';\ x + a\lambda \mapsto \tau(x) + a'\widehat{\tau}(\lambda)$$

wohldefiniert und bijektiv. Die Abbildung σ ist semilinear mit Begleitisomorphismus $\widehat{\sigma} = \widehat{\tau}$ (Übung).

Nun gilt $\varphi|_{P \setminus H} = \bar{\sigma}|_{P \setminus H}$ und $\bar{\sigma}, \varphi$ sind Kollineationen $P \to P'$. Wegen (10.16.3) folgt $\varphi = \bar{\sigma}$. ∎

(12.5) Folgerung. (1) *Koordinatisierender Vektorraum und Körper desarguesscher projektiver Räume mit* $\dim \geq 2$ *sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(2) *Ist* (V, K) *ein Vektorraum mit* $\dim V \geq 3$, *dann ist die Abbildung*

$$\Gamma\mathrm{L}(V,K) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V,K));\ \sigma \mapsto \bar{\sigma} \qquad \textit{ein Epimorphismus}$$

(surjektiver Gruppenhomomorphismus) mit Kern

$$\varrho_K := \{\varrho_\lambda;\ \lambda \in K \setminus \{0\}\}, \quad \textit{wobei} \quad \forall x \in V : \varrho_\lambda(x) = x\lambda.$$

Es gilt also $\quad \mathrm{P\Gamma L}(V,K) := \Gamma\mathrm{L}(V,K)/\varrho_K \cong \mathrm{Aut}(\mathrm{PG}(V,K))$.

(12.6) Bemerkung. 1. Wegen (11.2), (12.2) und (12.5) werden affine Räume und ihre projektiven Abschlüsse über demselben Körper (bis auf Isomorphie!) koordinatisiert und die Dimensionen ihrer Vektorräume unterscheiden sich um 1.

2. Seien B und B' Basen der Vektorräume (V,K) bzw. (V',K'). Zu jeder Bijektion $\kappa : B \to B'$ und jedem Körperisomorphismus $\varrho : K \to K'$ existiert genau eine semilineare Bijektion $\sigma : V \to V'$ mit $\sigma|_B = \kappa$ und $\widehat{\sigma} = \varrho$. Jedes $x \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination $x = \sum_{b \in B} b\lambda_b$ darstellen ($\lambda_b \in K$, fast alle $\lambda_b = 0$) und es gilt $\sigma(x) = \sum_{b \in B} \kappa(b)\varrho(\lambda_b)$ (Übung). Es existiert also eine semilineare Bijektion
$$V \to V' \iff \dim V = \dim V' \wedge K \cong K'.$$

3. Desarguessche projektive Räume sind somit durch ihre Dimension und „den“ koordinatisierenden Körper bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Insbesondere sind desarguessche projektive Ebenen bis auf Isomorphie durch „den“ koordinatisierenden Körper bestimmt.

4. Der Fundamentalsatz gilt auch für $\mathrm{PG}(V, \mathbb{Z}_2)$. Übung.

Index

Literatur

[1] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie.* Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, zweite edition, 2004.

[2] Paul R. Halmos. *Naive set theory.* Van Nostrand, Princeton, 1960.

[3] D. R. Hughes and F. C. Piper. *Projective planes.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[4] Karzel, Sörensen, and Windelberg. *Einführung in die Geometrie.* Vandenhoeck, 1973.

[5] Lingenberg. *Grundlagen der Geometrie I.* BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1969.

[6] Günter Pickert. *Projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2^{nd} edition, 1975.

[7] E. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie I, II, III.* BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991.