

## 9 Euklidische Ebenen — axiomatisch

Wir erinnern daran, dass **euklidische Ebenen** affine Ebenen mit Kongruenz sind, die also die Axiome (W1), (W2), (W3) erfüllen. Außerdem gilt (I3). Das Minimalmodell affiner Ebenen scheidet somit aus.

Insbesondere sind affine Ebenen Austauschebenen und alle Sätze des vorigen Abschnitts gelten. Man beachte, dass die wichtigste Folgerung aus der Austausch-Eigenschaft unter (8.1) zu finden ist.

Wir werden sehen, dass alle Bewegungen mit Geradenspiegelungen beschrieben werden können. Dabei spielt der Dreispiegelungssatz eine wichtige Rolle.

Im Folgenden sei also stets  $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$  eine euklidische Ebene. Wir denken uns bei Bedarf die affine Ebene  $(E, \mathfrak{G})$  in den projektiven Abschluss eingebettet. Die Ferngerade sei stets mit  $F$  bezeichnet. Jede Bewegung  $\varphi$  besitzt eine Fortsetzung  $\varphi^*$  auf den projektiven Abschluss. Diese Bezeichnungen werden wir häufig ohne Hinweis verwenden.

Wichtig ist die Tatsache, dass für jedes  $G \in \mathfrak{G}$  die Fortsetzung der Spiegelung  $\tilde{G}^*$  eine Zentralkollineation mit Achse  $G \cup \{[G]\}$  und Zentrum  $[L]$  ist, wenn  $L \perp G$ .

**(9.1)** *Seien  $G, H, L \in \mathfrak{G}$  mit  $G \perp L$ . Es gilt:  $H \perp L \iff H \parallel G$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $[G]$  das Zentrum von  $\tilde{L}^*$ . OE gilt  $H \neq L$ , dann ist wegen (8.7.2)

.....  
.....  
.....  
.....

das bedeutet aber gerade  $H \parallel G$ . ■

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung.

**(9.2) Satz.** *Für  $G, H \in \mathfrak{G}$  mit  $G \parallel H$  ist  $\tilde{G}\tilde{H}$  eine Translation mit Richtung orthogonal zu  $G$ .*

*Beweis.* OE gelte  $G \neq H$ . Wir setzen  $\tau = \tilde{G}\tilde{H}$ . Wegen (8.10.1) und  $G \cap H = \emptyset$  hat  $\tau$  keine Fixpunkte.

.....  
.....

Daher ist  $\tau$  eine Translation. ■

**(9.3) Satz.** *Seien  $a, b \in E$  zwei verschiedene Punkte.*

**(1)**  *$a, b$  haben genau ein Mittellot.*

**(2)** *Für alle  $c \in \overline{a, b}$  existiert genau ein  $L \in \overline{c}$  mit  $L \perp \overline{a, b}$ .*

**(3)** *Es existiert (genau) eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(a) = b$ . Somit ist  $(E, \mathfrak{G})$  eine Translationsebene.*

*Beweis.* (1) Wähle  $G \in \mathfrak{G}$  mit  $G \perp \overline{a, b}$  und  $c \in G \setminus \overline{a, b}$ .

Die Eindeutigkeit steht schon in (8.8.2).

(2)

.....

.....

.....

(3)

.....

.....

.....

**(9.4) Bemerkung.** 1. Man kann also in euklidischen Ebenen auf jede Gerade in jedem Punkt dieser Geraden genau ein **Lot errichten**.

2. Zu Translationsebenen vgl. auch (5.20) und die darauf folgenden Aussagen.
3. Wie in (5.21.2) beschrieben, kann auf  $E$  eine Addition so eingeführt werden, dass  $(E, +)$  eine kommutative Gruppe wird. Das neutrale Element sei mit 0 bezeichnet.
4. Durch eine weitere Konstruktion, die hier nicht beschrieben werden soll, kann man eine (kommutative) Multiplikation (mit neutralem Element 1) auf  $E$  so einführen, dass  $(E, +, \cdot)$  ein Körper wird. Setzt man  $K = \overline{0, 1}$ , so kann man zeigen, dass  $\tilde{K} : E \rightarrow E$  ein involutorischer Körperautomorphismus ist. Das führt auf den

**(9.5) Darstellungssatz.** Sei  $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$  eine euklidische Ebene. Auf  $E$  existieren eine Addition, eine Multiplikation und ein involutorischer Körperautomorphismus  $\overline{\phantom{x}} = \widetilde{0, 1}$  so, dass  $(E, +, \cdot)$  Körper, und  $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$  die euklidische Ableitung von  $(E, \overline{\phantom{x}})$  ist. Insbesondere gilt  $(a, b) \equiv (c, d) \iff (a - b)\overline{(a - b)} = (c - d)\overline{(c - d)}$  für  $a, b, c, d \in E$ .

*Beweis.* [4] enthält einen direkten Beweis. ■

Eine direkte Folgerung ist

(9.6) Satz. In jeder euklidischen Ebene gilt der große Satz von Pappus (AP).

Wir steuern jetzt eine Klassifikation aller Bewegungen an.

(9.7) Satz. Sei  $\varphi \in \mathcal{B}$

(1) Gilt  $\text{Fix} \varphi = \{z\}$ , so gibt es Geraden  $G, H \in \overline{z}$  mit  $\varphi = \widetilde{G}\widetilde{H}$ .

$\varphi$  heißt dann *Drehung* um  $z$ .

(2)  $\varphi$  ist Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen.

*Beweis.* Wir benutzen die Existenz von Mitteloten (9.3).

(1)

Das ist die Behauptung.

(2) Ist  $\text{Fix}\varphi \neq \emptyset$ , so liefern (8.6.2) und (1) jeweils die Behauptung. In der Tat ist  $\varphi$  das Produkt von höchsten zwei Geradenspiegelungen.

Es bleibt der Fall, dass es keinen Fixpunkt gibt.

Daher folgt auch hier die Behauptung. ■

- (9.8) Bemerkung.** 1. Der obige Beweis benutzt nur die Existenz von Mittelloten. Daher gilt er insbesondere auch für das Kleinsche Modell einer hyperbolischen Ebene.
2. Die Darstellung einer Drehung durch zwei Spiegelungen ist keineswegs eindeutig. In der Tat gibt es für  $\varphi = \tilde{G}\tilde{H}$  mit  $z = G \cap H$  und  $A \in \overline{z}$  immer je genau ein  $B, B' \in \overline{z}$  mit  $\varphi = \tilde{A}\tilde{B}$  bzw.  $\varphi = \tilde{B}'\tilde{A}$ .
3. Im Fall  $E = \mathbb{C}$  ist der Drehwinkel von  $\varphi$  gegeben durch die Beziehung

$$\angle(x, z, \varphi(x)) = 2 \cdot \angle(H, G).$$

4. Analoges gilt für die Darstellung von Translationen als Produkt zweier Geradenspiegelungen. Das zeigt der folgende Satz.

**(9.9) Dreispiegelungssatz für Lotbüschel.** *Für die Geraden  $A, B, C, L \in \mathfrak{G}$  gelte  $A, B, C \perp L$ . Dann existiert genau ein  $G \in \mathfrak{G}$  mit  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} = \tilde{G}$ . Dabei gilt  $G \perp L$ .*

*Beweis.* Nach (8.10.2) gilt  $\varphi := \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} \neq \text{id}$ . Statt  $L$  kann wegen (9.1) jede Gerade parallel zu  $L$  stehen. Daher kann oE angenommen werden, dass es  $x \in L$  gibt mit  $\varphi(x) \neq x$ .

Sei  $G$  das Mittellot von  $x, \varphi(x)$ . Es gilt  $G \perp L$ , also  $G \parallel A$  und  $\tilde{G}\varphi(x) = x$ .

Das ist die Behauptung. ■

Für den Rest des Abschnitts brauchen wir eine weitere Voraussetzung:  
Wir nehmen an, dass für alle  $G, H \in \mathfrak{G}$  gilt  $G \perp H \implies G \cap H \neq \emptyset$ .

- (9.10) Bemerkung.** 1. Für einen koordinatisierenden Körper  $E$  bedeutet das  $2 \neq 0$ .  
2. Zwei verschiedene Punkte  $a, b$  haben dann immer einen Mittelpunkt  $m = \overline{a, b} \cap M$ , wenn  $M$  das Mittellot von  $a, b$  ist (vgl. (8.8.2)). Im Fall  $a = b$  setzt man natürlich  $m = a = b$ . In jedem Fall ist  $m = \frac{1}{2}(a + b)$  (siehe Übung).  
3. Im Fall  $2 = 0$  gilt tatsächlich  $G \perp H \implies G \parallel H$ .

**Definition.** Eine Bewegung  $\varphi$  heißt **Gleitspiegelung** oder **Schubspiegelung**, wenn es Geraden  $A, B, G \in \mathfrak{G}$  gibt mit  $A, B \perp G$  und  $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{G}$ .

$\varphi$  ist also die Verkettung einer Spiegelung mit einer anschließenden Translation in Richtung von  $G$  (vgl. (9.2)).

Eine Gleitspiegelung heißt **echt**, wenn  $A \neq B$ , wenn also  $\varphi$  keine Spiegelung ist.

Wir halten die wichtigsten Eigenschaften fest.

**(9.11)** Seien  $A, B, G \in \mathfrak{G}$  mit  $A, B \perp G$  und  $A \neq B$ . Setze  $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{G}$  und  $\tau = \widetilde{A}\widetilde{B}$ , sodass  $\varphi = \tau\widetilde{G}$  eine echte Gleitspiegelung ist.

**(1)**  $\tau$  und  $\widetilde{G}$  sind vertauschbar, d. h.  $\tau\widetilde{G} = \widetilde{G}\tau$ .

Insbesondere ist auch  $\varphi^{-1} = \tau^{-1}\widetilde{G}$  eine echte Gleitspiegelung.

**(2)**  $G$  ist einziges Fixelement von  $\varphi$ .

Genauer:  $\varphi$  hat keine Fixpunkte, und  $G$  ist einzige Fixgerade.

**(3)** Die Translation  $\tau$  und die Gerade  $G$  sind eindeutig bestimmt.

*Beweis.* (1)

.....  
.....  
.....

(2) Angenommen es gibt einen Fixpunkt  $x$ .

.....

Also gibt es keinen Fixpunkt.  
Dass  $G$  eine Fixgerade ist, ist klar.

Also gilt  $G\|H$ .

(3) ist eine direkte Folge von (2) und der Tatsache, dass  $\varphi\widetilde{G}$  eine Translation ist. ■

Die Gerade  $G$  wird manchmal als **Achse** der Gleitspiegelung bezeichnet. Da  $G$  keine Fixpunktgerade ist, deckt sich das nicht mit unserer gewohnten Sprechweise — also Vorsicht!

Es folgt die versprochene Klassifikation von Bewegungen.

**(9.12) Satz.** *Jede Bewegung  $\varphi \in \mathcal{B}$  ist von einem der folgenden Typen*

- *Translation*
- *Drehung (d. h.  $\varphi = \widetilde{AB}$  mit  $A \cap B = z$ )*
- *Gleitspiegelung (d. h.  $\varphi = \tau\widetilde{G}$  mit einer Translation  $\tau$ , auch  $\tau = \text{id}$  möglich).*

*Beweis.* Wegen (9.7) und (9.2) ist nur noch der Fall  $\varphi = \widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{L}$  mit verschiedenen  $G, H, L \in \mathfrak{G}$  zu betrachten. Nach (9.9) dürfen wir oE annehmen, dass nicht alle drei

Geraden parallel sind. Nach Übergang zu  $\varphi^{-1} = \tilde{L}\tilde{H}\tilde{G}$  falls nötig, dürfen wir also  $a = G \cap H$  voraussetzen. In der Tat,  $\varphi$  ist von einem der genannten Typen genau dann, wenn  $\varphi^{-1}$  vom selben Typ ist (vgl. insbesondere (9.11.1)).

Setze  $K = \{a \perp L\}$ ,  $b = K \cap L$  und  $A = GKH$  (Dreispiegelungssatz im Punkt  $a$ ). Nun sei  $B = \{b \parallel A\}$  und  $D = BKL$  (Dreispiegelungssatz im Punkt  $b$ ). Wir haben  $KL = BD$  ist eine Involution. Daher gilt  $B \perp D$  und mit (9.1)  $A \perp D$ . Schließlich findet man  $\varphi = GHL = AKL = ABD$  ist eine Gleitspiegelung (mit Achse  $D$ ).

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. ■

**(9.13) Satz von Thales.** *Seien  $a, b, c \in E$  nicht kollinear und  $m$  Mittelpunkt von  $a, b$ . Dann gilt:  $(m, c) \equiv (m, a) \iff \overline{a, c} \perp \overline{b, c}$ .*

*Beweis.* „ $\implies$ “: Seien  $G, H$  die Mittellote von  $a, c$  bzw.  $c, b$ , dann gilt  $m = G \cap H$  und  $\tilde{H}\tilde{G}(a) = \tilde{H}(c) = b$ . Daher hat man  $\tilde{H}\tilde{G}(\overline{a, b}) = \overline{a, b}$  und nach (8.12.1) ist  $\tilde{H}\tilde{G}$  involutorisch. Daher gilt  $G \perp H$ . Da auch  $\overline{b, c} \perp H$  folgt mit (9.1)  $\overline{b, c} \parallel G$ . Wegen  $G \perp \overline{a, c}$  erhält man  $\overline{a, c} \perp \overline{b, c}$ .

„ $\impliedby$ “: Es sei  $d$  der Mittelpunkt von  $a, c$ , und es sei  $\tau$  bzw.  $\tau'$  die Translationen mit  $\tau(a) = m$  bzw.  $\tau'(a) = d$ , die nach (9.3) existieren. Sei  $M = \{m \perp \overline{a, b}\}$  und  $L$  das Mittellot von  $a, m$ . Dann gilt  $\tau = \tilde{M}\tilde{L}$ . Es folgt  $\tau(m) = \tilde{M}\tilde{L}(m) = \tilde{M}(a) = b$ . Analog zeigt man  $\tau'(d) = c$ .

Nach (5.22) bilden die Translationen eine kommutative Gruppe. Daher gilt

$$\tau'\tau^{-1}(m) = d \quad \text{und} \quad \left(\tau'\tau^{-1}\right)^2(b) = \tau'\tau'\tau^{-1}\tau^{-1}(b) = \tau'\tau'\tau^{-1}(m) = \tau'\tau'(a) = \tau'(d) = c.$$

Deshalb ist  $[\overline{d, m}]$  Richtung von  $\tau'\tau^{-1}$  und  $[\overline{b, c}]$  ist Richtung von  $(\tau'\tau^{-1})^2$ . Diese müssen aber gleich sein. Das zeigt  $G := \overline{d, m} \parallel \overline{b, c}$ . Aus  $\overline{a, c} \perp \overline{b, c}$  folgt mit (9.1)  $\overline{a, c} \perp G$ , und  $G$  ist Mittellot von  $a, c$ . Es folgt  $G(a) = c$  und daher  $(m, c) \equiv (m, a)$ . ■

Für die letzten beiden Aussagen sei  $E$  ein Körper mit einem involutorischen Automorphismus  $\overline{\phantom{x}}$  und dem Fixkörper  $K$ . Es gelte  $2 \neq 0$ . Weiter sei  $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$  die euklidische Ableitung. Wir erinnern an die quadratische Form  $Q(x) = x\bar{x}$  und die zugehörige Bilinearform  $B_Q$ , die durch  $B_Q(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y$  festgelegt ist (siehe (6.3)).

**(9.14)** *Sei  $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$  euklidische Ableitung des Körpers  $E$  mit dem involutorischen Automorphismus  $\overline{\phantom{x}}$  und es sei  $2 \neq 0$ .*

(1) *Die Punkte  $a, b$  besitzen den Mittelpunkt  $\frac{1}{2}(a + b)$ .*

(2) *Für drei verschiedene Punkte  $a, b, c \in E$  gilt  $\overline{a, c} \perp \overline{b, c} \iff B_Q(a - c, b - c) = 0$ .*

*Beweis.* (1) Siehe Aufgabe 53.

(2) Es gilt einerseits  $\overline{a, c} \perp \overline{b, c} \iff s := \widetilde{\overline{a, c}}(b) \in \overline{b, c}$  (etwa wegen (8.12)) und andererseits  $s \in \overline{b, c} \iff s = 2c - b$ , denn in diesem Fall ist  $c$  Mittelpunkt von  $s, b$ . Weiter gilt mit (6.7.2)

$$\begin{aligned} s = c + \frac{a - c}{\overline{a - c}} \left( \overline{b - c} \right) &= 2c - b \iff (a - c)\overline{(b - c)} = -(b - c)\overline{(a - c)} \\ &\iff B_Q(a - c, b - c) = 0. \end{aligned}$$

**(9.15) Satz von Pythagoras.** Sei  $(E, \underline{\mathfrak{G}}, \equiv)$  euklidische Ableitung des Körpers  $E$  mit dem involutorischen Automorphismus  $\underline{\mathfrak{G}}$  und es sei  $2 \neq 0$ . Für drei nicht kollineare Punkte  $a, b, c \in E$  gilt  $\overline{a, c} \perp \overline{b, c} \iff Q(a - c) + Q(b - c) = Q(a - b)$ .

*Beweis.*  $Q(a - b) = Q(a - c - (b - c)) = Q(a - c) + Q(b - c) - B_Q(a - c, b - c) =$

$$= Q(a - c) + Q(b - c) \iff B_Q(a - c, b - c) = 0 \iff \overline{a, c} \perp \overline{b, c} \quad \text{mit (9.14).} \quad \blacksquare$$

## Literatur

- [1] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1992.
- [2] D. R. Hughes and F. C. Piper. *Projective planes*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [3] Karzel, Sörensen, and Windelberg. *Einführung in die Geometrie*. Vandenhoeck, 1973.
- [4] Helmut Karzel and Günter Kist. Zur Begründung metrischer affiner Ebenen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 49:234–236, 1979.
- [5] Lingenberg. *Grundlagen der Geometrie I*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1969.
- [6] Günter Pickert. *Projektive Ebenen*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2<sup>nd</sup> edition, 1975.
- [7] E. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie I, II, III*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991.