7 Das Kleinsche Modell einer hyperbolischen Ebene

Hyperbolischen Ebenen sind Ebenen mit Kongruenz wie in (6.4.1), die nicht affin sind (siehe auch Kapitel 8). Wir geben hier nur „das“ Beispiel über den reellen Zahlen an, in einer Beschreibung, die auf Felix Klein[13] zurück geht.

Für den kommutativen Körper K betrachte vier kollineare Punkte aK, bK, cK, dK in $\mathrm{PG}(2, K)$. Durch Wahl der Vertreter $a, b, c, d \in K^3$ können wir im Fall $aK \neq bK, cK$ sowie $bK \neq cK, dK$ erreichen, dass gilt

$$c = a + b \quad \text{und} \quad d = a + b\delta \quad \text{für ein eindeutig(!) bestimmtes } \delta \in K\,.$$

Wir nennen $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) := \delta$ das **Doppelverhältnis** der gegebenen Punkte. Außerdem setzen wir $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, bK) := \infty$ und $\mathrm{DV}(aK, aK, cK, dK) := 1$. Weitere spezielle Werte ergeben sich durch die Konvention $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$ und

(7.1) **(1)** $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, cK) = 1$.

(2) $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) = \mathrm{DV}(cK, dK, aK, bK)$.

(3) $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) = \mathrm{DV}(bK, aK, cK, dK)^{-1} = \mathrm{DV}(aK, bK, dK, cK)^{-1}$.

Beweis. (1) ist offenbar, (3) folgt sofort aus der Darstellung $d\delta^{-1} = b + a\delta^{-1}$ und (2).

(2) Aus $c = a + b$ und $d = a + b\delta$ folgt

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Das ist die Behauptung. ■

[13] Felix Klein 1849 - 1925

Beispiel. In $\mathrm{PG}(2,K)$ betrachten wir die Gerade G, die durch $x_2=0$ definiert ist. Die Punkte haben die Form $(1:x:0)$ und können mit x identifiziert werden. Den Punkt $(0:1:0)\in G$ schreiben wir ∞. Für $a,b,c,d\in K$ verschieden gilt

$$(1,c)=(1,a)(1-\lambda)+(1,b)\lambda \quad \text{mit } \lambda=\frac{c-a}{b-a} \quad \text{und} \quad (1,d)\mu=(1,a)(1-\lambda)+(1,b)\lambda\delta.$$

Dabei wurde die 2-Koordinate weggelassen. Es folgt

$$\mu=(1-\lambda)+\lambda\delta \quad \text{und} \quad d\mu=a(1-\lambda)+b\lambda\delta$$

Das ergibt

$$d\Big((1-\lambda)+\lambda\delta\Big)=a(1-\lambda)+b\lambda\delta \quad\Longrightarrow\quad \delta=\frac{(a-d)(1-\lambda)}{(d-b)\lambda}$$

$$\Longrightarrow\quad \delta=\frac{(a-d)(1-\frac{c-a}{b-a})}{(d-b)\frac{c-a}{b-a}}=\frac{(a-d)(b-a-(c-a))}{(d-b)(c-a)}=\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}=\frac{\frac{a-d}{a-c}}{\frac{b-d}{b-c}}.$$

Daher der Name „Doppelverhältnis“. Diese Formel gilt auch wenn der Punkt ∞ vorkommt, indem man die üblichen Konventionen benutzt. Auch die Aussagen von (7.1) sind leicht zu sehen.

Bemerkung. So wird das Doppelverhältnis z. B. in der Funktionentheorie eingeführt. Es gibt eine Reihe weiterer äquivalenter Zugänge. Dabei ist die Definition nicht einheitlich. Häufig wird statt δ der Wert δ^{-1} verwendet. Alle abweichenden Definitionen in der Literatur ergeben sich durch Permutation der Einträge in unserem DV.

Eine wichtige Eigenschaft ist

(7.2) *Sei K ein kommutativer Körper.*

(1) *Jeder lineare Automorphismus von $\mathrm{PG}(2,K)$ läßt DV invariant.*

Genauer: Sei M eine invertierbar 3×3-Matrix, dann gilt

$$\mathrm{DV}(MaK,MbK,McK,MdK)=\mathrm{DV}(aK,bK,cK,dK).$$

(2) *Jede Zentralkollineation ist linear, d. h. sie wird von einer linearen Abbildung induziert und läßt daher DV invariant.*

Beweis. (1) ist offenbar. — (2) Aufgabe 35. ∎

Im Folgenden spezialisieren wir den Körper zu $\mathbb{R}$ und denken uns stets $\mathrm{AG}(2,\mathbb{R})$ kanonisch in $(P,\mathfrak{G})=\mathrm{PG}(2,\mathbb{R})$ eingebettet, so dass das Doppelverhältnis auch für kollineare Punkte aus $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Sei $(H,\mathfrak{G}_H)$ der Inzidenzraum aus (1.1.11), d. h. es sei

$$K:=\Big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ x_1^2+x_2^2=1\Big\} \quad \text{und} \quad H:=\Big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ x_1^2+x_2^2<1\Big\}$$

der Einheitskreis, bzw. dessen Inneres. Weiter sei

$$\mathfrak{G}_H := \{G \cap H\,;\; G \in \mathfrak{G} \text{ mit } G \cap H \neq \varnothing\}\,.$$

Die Geradenmenge besteht also aus den Sekanten von K, die somit je zwei Schnittpunkte mit K haben. Insbesondere können wir Konstruktionen auch in $\mathbb{R}^2$ durchführen.

Die Kongruenz definieren wir wie folgt. Seien $a, b \in H$ und seien $u, v \in \overline{a,b}^{\text{aff}} \cap K$ die beiden Schnittpunkte der Verbindungsgerade von a, b in $\mathbb{R}^2$ mit K. Entsprechend seien u', v' zu $a', b' \in H$ erklärt. Wir setzen

$$(a,b) \equiv (a',b') \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{DV}(u,v,a,b) & = & \mathrm{DV}(u',v',a',b') & \text{oder} \\ \mathrm{DV}(u,v,a,b) & = & \mathrm{DV}(u',v',a',b')^{-1} & \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \bigl|\ln \mathrm{DV}(u,v,a,b)\bigr| = \bigl|\ln \mathrm{DV}(u',v',a',b')\bigr|\,.$$

Mit (7.1.3) erkennt man, dass „$\equiv$“ wohldefiniert ist und

(7.3) *„$\equiv$“ ist eine Kongruenzrelation auf $(H, \mathfrak{G}_H)$.*

Beweis. (K1) ist klar, und (K2) folgt direkt aus (7.1.3).

Weil u, v, a verschieden sind, gilt $\mathrm{DV}(u,v,a,b) = 1 \iff a = b$. Das zeigt (K3). ∎

Definition. Das Tripel $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$ heißt **Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene** über $\mathbb{R}$.

Ohne Beweis halten wir fest.

(7.4) *Das Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene ist eine Ebene mit Kongruenz, d.h. es gelten insbesondere die Axiome (W1)–(W3).*

Wegen (7.2) lassen Zentralkollineationen von P, die K festhalten die Kongruenzrelation invariant, induzieren also Bewegungen auf H. Wir betrachten nur einen Fall. Für eine Sekante $L \in \mathfrak{G}$ von K und $u, v \in L \cap K$ sei p der Schnittpunkt der Tangenten an K in den Punkten u, v. Dieser Punkt p heißt **Pol** zur **Polaren** L. Umgekehrt besitzt auch jeder Punkt außerhalb von K eine Polare, die Sekante von K ist.

Sei nun L Achse einer Zentralkollineation $\varphi \neq \mathrm{id}$, die K festhält. Dann muss φ die beiden Tangenten durch u und v festlassen (da u, v festbleiben, kann das Bild keinen weiteren Schnittpunkt mit K haben). Daher ist der Pol p das Zentrum. Sei nun G eine Sekante von K, die p enthält. Für die beiden Schnittpunkte $s, t \in G \cap K$ gilt $\varphi(s) = t$ und $\varphi(t) = s$. Wegen (5.14.2) muss $\varphi^2 = \mathrm{id}$ gelten — φ ist also eine Involution.

Zu fest gewähltem G existiert auch genau eine solche Zentralkollineation. Daher definieren wir

Definition. Diese Involution wird **Polarenspiegelung** an L genannt und $\tilde{L}$ geschrieben. Sie ist durch L eindeutig festgelegt.

(7.5) *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

(1) *$\tilde{L}(K) = K$ und $\tilde{L}$ ist involutorische Bewegung von $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$.*

(2) $\forall x \in P \setminus L \cup \{p\} : \mathrm{DV}(p, \overline{p, x} \cap L, x, \tilde{L}(x)) = -1$.

Beweis. (1) Die erste Tatsache erfordert Kenntnisse über Kegelschnitte in projektiven Ebenen, die wir nicht zur Verfügung haben. Ein anderer Weg ist eine längliche, komplizierte Rechnung.

Die anderen Eigenschaften von $\tilde{L}$ wurden oben gezeigt.

(2) Nach (7.2.2) und (7.1.3) gilt

$$\delta := \mathrm{DV}(p, \overline{p, x} \cap L, x, \tilde{L}(x)) = \mathrm{DV}(p, \overline{p, x} \cap L, \tilde{L}(x), x) = \delta^{-1},$$

also $\delta^2 = 1$. Wegen $\tilde{L}(x) \neq x$ gilt $\delta \neq 1$, und die Behauptung folgt. ∎

(7.6) Bemerkung. 1. Statt $\tilde{L}$ müsste man genauer die Restriktion $\tilde{L}|_H : H \to H$ betrachten. Diese Abbildung kann als Geradenspiegelung von $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$ aufgefasst wegen.

Wir sprechen daher auch von **hyperbolischen Geradenspiegelungen**.

2. Die obige Konstruktion zeigt wie jedem Punkt p außerhalb von K eine Gerade $\pi(p)$ (eine Sekante von K) zugeordnet wird. Tatsächlich kann π auf ganz P fortgesetzt werden. Dabei ist für Punkte $p \in K$ das Bild $\pi(p)$ die Tangente an K in p und Punkte aus H werden auf Passanten geworfen.

3. Die Abbildung $\pi : P \to \mathfrak{G}$ ist eine Kollineation von $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ auf den Dualraum mit $\pi \circ \pi = \mathrm{id}$. Eine solche Abbildung wird **Polarität** genannt. (Das erlaubt eine Konstruktion für Punkte in H !)

4. Aus (5.14) kann man ablesen, wie zu jedem Punkt von H der Bildpunkt konstruiert werden kann. (Das wird in der Vorlesung ausgeführt.)

5. Punkte mit $\mathrm{DV} = -1$ nennt man auch in **harmonischer Lage**.