5 Automorphismen

Zunächst stellen wir einen Zusammenhang zwischen Automorphismen einer affinen Ebene und ihrem projektiven Abschluss her.

(5.1) Fortsetzungssatz. *Sei* $(A, \mathfrak{G})$ *eine affine Ebene mit projektivem Abschluss* $(P, \mathfrak{G}')$ *und Ferngerade* F. *Sei weiter* $\alpha \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$. *Dann gilt:*

(1) $\forall G, H \in \mathfrak{G}: \ G \| H \iff \alpha(G) \| \alpha(H)$.

(2) $\alpha^* : P \to P; x \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \textit{für } x \in A \\ [\alpha(G)] & \textit{für } x = [G] \in F \end{cases}$ *ist Automorphismus von* $(P, \mathfrak{G}')$.

(3) α^* *ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von* α *(die Kollineation ist).*

(4) *Die Abbildung* $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}')$; $\alpha \mapsto \alpha^*$ *ist ein Gruppen-Monomorphismus (injektiver Homomorphismus).*

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: Seien $G \| H$ und $p \in \alpha(G) \cap \alpha(H)$. Dann folgt $\alpha^{-1}(p) \in G \cap H$, also $G = H \implies \alpha(G) \| \alpha(H)$. “$\Leftarrow$” aus Symmetriegründen.

(2) Wegen (1) ist α^* wohldefiniert und injektiv, denn

$$[\alpha(G)] = [\alpha(H)] \iff G \| H \iff [G] = [H].$$

$(\alpha^{-1})^*$ ist Inverse von α^*, also ist α^* bijektiv.

α^* ist Kollineation: Sei $K \in \mathfrak{G}'$.

1. Fall: $K = F \implies \alpha^*(F) = F \in \mathfrak{G}'$.

2. Fall: $K = G \cup \{[G]\}$ mit $G \in \mathfrak{G}$: $\alpha^*(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\} \in \mathfrak{G}'$. Dasselbe gilt für $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$.

(3) Für $\alpha' \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\alpha'|_A = \alpha$ gilt $\alpha'(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\}$ (da Gerade!). Für alle $H \in \mathfrak{G}'$ gilt daher $\alpha'|_H = \alpha^*|_H$. Das zeigt $\alpha' = \alpha^*$.

(4) Injektivität ist klar (denn $\alpha^*|_A = \alpha$), Homomorphieeigenschaft wie folgt: Es gilt $(\alpha^* \circ \beta^*)|_A = \alpha^*|_A \circ \beta^*|_A$, wegen (3) folgt $\alpha^* \circ \beta^* = (\alpha \circ \beta)^*$. ■

(5.2) Bemerkung. (1) Wegen (5.1.4) kann man $\mathrm{Aut}\, A$ als Untergruppe von $\mathrm{Aut}\, P$ auffassen.

(2) Sei $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\sigma(F) = F$ ist $\sigma|_{P_F} \in \mathrm{Aut}(P_F, \mathfrak{G}_F)$ und $(\sigma|_{P_F})^* = \sigma$ (vgl. (5.1.3)).

(3) Im Fall $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$, d.h. $\forall x \in F : \sigma(x) = x$, ist $\sigma|_{P_F}$ eine Dilatation.

Die Fundamentalsätze

In diesem Abschnitt werden Beispiele von Automorphismen in affinen und projektiven Koordinatenebenen beschrieben. Ziel sind die Fundamentalsätze, die eine genaue Beschreibung aller Automorphismen enthalten. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Abbildung.

Seien (V, K) und (V', K') Vektorräume über Körpern K bzw. K' und $\widehat{\sigma} : K \to K'$ eine Bijektion. Eine Abbildung $\sigma : V \to V'$ heißt *semilinear* mit *Begleitisomorphismus* $\widehat{\sigma}$, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) \qquad \text{und} \qquad \sigma(v\lambda) = \sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda).$$

Die Bezeichnung Begleit*isomorphismus* ist gerechtfertigt wegen

(5.3) *Falls es $v \in V$ gibt, mit $\sigma(v) \neq 0$, dann ist $\widehat{\sigma}$ ein Körperisomorphismus, der durch σ eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Für $\alpha, \beta \in K$ berechne $\sigma\big(v(\alpha + \beta)\big)$ und $\sigma(v\alpha\beta)$ jeweils auf zwei Weisen. Die Eindeutigkeit ist klar. ■

Bemerkung. In unseren Anwendungen ist σ meist bijektiv. Also ist $\widehat{\sigma}$ ein durch σ festgelegter Körperisomorphismus. Häufig gilt darüberhinaus $K = K'$ und $\widehat{\sigma} \in \operatorname{Aut} K$.

(5.4) Beispiele. (1) Im Fall $K = K'$ ist jede lineare Abbildung $\sigma : V \to V'$ semilinear mit $\widehat{\sigma} = \mathrm{id}$.

(2) Sei $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\Gamma_\alpha : K^n \to K'^n;\ (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))^T$$

eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α.

Um eine analoge Abbildung $V \to V'$ für beliebige K- bzw. K'-Vektorräume zu definieren, müssen Basen für V und V' gewählt werden.

(3) Allgemeiner: Sei wieder $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $M \in \mathrm{GL}(n, K')$, dann ist $K^n \to K'^n$; $x \mapsto M\Gamma_\alpha(x)$ eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α. (So kann man alle bijektiven semilinearen Abbildungen $K^n \to K'^n$ beschreiben!)

(4) Für $\mu \in K \setminus \{0\}$ ist $\varrho_\mu : K^n \to K^n$; $(x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_1\mu, \dots, x_n\mu)^T$ semilinear mit $\widehat{\varrho_\mu}(\lambda) = \mu^{-1}\lambda\mu$. Ist K kommutativ, dann ist ϱ_μ natürlich linear.

(5.5) *Sei (V, K) ein Vektorraum.*

(1) *Die Menge $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ aller bijektiven semilinearen Abbildungen $V \to V$ bildet eine Gruppe. Dabei gilt $\widehat{\sigma^{-1}} = \widehat{\sigma}^{-1}$.*

(2) *Für* $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(V,K)$ *gilt* $\widehat{\sigma \circ \tau} = \widehat{\sigma} \circ \widehat{\tau}$. *D. h.* $\widehat{\ }: \Gamma\mathrm{L}(V,K) \to \mathrm{Aut}\, K;\ \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern* $\mathrm{GL}(V,K)$.

Beweis. (1) Assoziativität ist klar, das neutrale Element ist id. σ^{-1} existiert (da σ bijektiv ist) und ist semilinear wegen

$$\sigma^{-1}(\sigma(v) + \sigma(w)) = \sigma^{-1}\sigma(v+w) = v + w = \sigma^{-1}\sigma(v) + \sigma^{-1}\sigma(w)$$

und

$$\sigma^{-1}(\sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda)) = \sigma^{-1}(\sigma(v\lambda)) = v\lambda = \sigma^{-1}\sigma(v) \cdot \widehat{\sigma}^{-1}\widehat{\sigma}(\lambda).$$

(2) $\sigma \circ \tau(v\lambda) = \sigma(\tau(v)\widehat{\tau}(\lambda)) = \sigma(\tau(v)) \cdot \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(\lambda))$, also $\widehat{\sigma \circ \tau} = \widehat{\sigma} \circ \widehat{\tau}$. ∎

(5.6) Bemerkung. 1. Im Fall $K \in \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ gilt $\mathrm{Aut}\, K = \{\mathrm{id}\}$, also $\Gamma\mathrm{L}(V,K) = \mathrm{GL}(V,K)$. In den Fällen $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathrm{GF}(p^n), n > 1$, gilt jedoch $\mathrm{Aut}\, K \neq \{\mathrm{id}\}$.

2. Sei $\sigma : K^n \to K'^m$ semilinear, dann ist $\sigma \circ \Gamma_{\widehat{\sigma}}^{-1}$ K'-linear. So folgert man die Bemerkung im obigen Beispiel (3).

(5.7) *Sei* (V,K) *ein Vektorraum und* $(A, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V,K)$. *Für alle* $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V,K)$ *und* $a \in V$ *sind* $\sigma : A \to A$ *und* $\tau_a : A \to A;\ x \mapsto x + a$ *Automorphismen von* $(A, \mathfrak{G})$.

Beweis. $\tau_a \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ ist klar $(\tau_a^{-1} = \tau_{-a})$. Seien $b, c \in V$, $c \neq 0$. Dann gilt

$$\sigma(b + cK) = \sigma(b) + \sigma(cK) = \sigma(b) + \sigma(c)\widehat{\sigma}(K) = \sigma(b) + \sigma(c)K \in \mathfrak{G}.$$

Das gilt auch für σ^{-1}, also ist σ eine Kollineation. ∎

Das Lemma gilt insbesondere für affine Koordinatenebenen $\mathrm{AG}(2,K)$.

Im Fall $V = K^n$ schreibt man $\Gamma\mathrm{L}(n,K) = \Gamma\mathrm{L}(V,K)$. Man findet also $\Gamma\mathrm{L}(2,K)$ als Untergruppe in $\mathrm{Aut}\,\mathrm{AG}(2,K)$.

Auch für projektive Ebenen gilt ein ähnlicher Satz.

(5.8) *Sei* K *ein Körper und* $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K)$.

(1) *Für jedes* $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(3,K)$ *ist* $\overline{\sigma} : P \to P;\ aK \mapsto \sigma(a)K$ *ein Automorphismus von* $(P, \mathfrak{G})$, *die von* σ induzierte Kollineation.

(2) *Die Abbildung* $\Gamma\mathrm{L}(3,K) \to \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G});\ \sigma \mapsto \overline{\sigma}$ *ist ein Homomorphismus bzgl.* $\circ$ *mit Kern* $\varrho_K := \{\varrho_\lambda;\ \lambda \in K^*\}$, *wobei* $\varrho_\lambda(x) = x\lambda$.

Beweis. (1) $\overline{\sigma}$ ist wohldefiniert: $aK = bK \iff \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : a = b\lambda$ und

$$\overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = \sigma(b\lambda)K = \sigma(b)\widehat{\sigma}(\lambda)K = \sigma(b)K = \overline{\sigma}(bK).$$

$\overline{\sigma}$ ist bijektiv: $\overline{\sigma^{-1}}$ ist Umkehrabbildung von $\overline{\sigma}$.

Seien $a, b \in K^3$ linear unabhängig und $\lambda, \mu \in K$. Dann sind auch $\sigma(a), \sigma(b)$ linear unabhängig, und es gilt

$$\sigma(a\lambda + b\mu) = \sigma(a\lambda) + \sigma(b\mu) = \sigma(a)\widehat{\sigma}(\lambda) + \sigma(b)\widehat{\sigma}(\mu) \in \sigma(a)K + \sigma(b)K \in \mathfrak{G},$$

d.h. $\overline{\sigma}(aK + bK) \subseteq \sigma(a)K + \sigma(b)K$. Dasselbe gilt für $\overline{\sigma}^{-1}$, daher folgt $\overline{\sigma}(aK + bK) = \sigma(a)K + \sigma(b)K \in \mathfrak{G}$ und $\overline{\sigma}$ ist eine Kollineation.

(2) Homomorphie von $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$: Für $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(3, K)$ gilt

$$(\overline{\tau} \circ \overline{\sigma})(aK) = \overline{\tau}(\sigma(a)K) = (\tau \circ \sigma)(a)K = \overline{\tau \circ \sigma}(aK) \implies \overline{\tau} \circ \overline{\sigma} = \overline{\tau \circ \sigma}.$$

Sei nun $\sigma \in \operatorname{Kern} \overline{}$, d.h. $\forall a \in K^3 : \overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = aK$. Dann existiert für alle $a \in K^3$ ein $\lambda_a \in K$ mit $\sigma(a) = a\lambda_a$. Zu zeigen ist $\forall b \in K^3 : \lambda_b = \lambda_a$.

Seien zunächst $a, b \in K^3$ linear unabhängig. Dann gilt

$$a\lambda_{a+b} + b\lambda_{a+b} = (a + b)\lambda_{a+b} = \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b) = a\lambda_a + b\lambda_b$$

und ein Koefizientenvergleich liefert $\lambda_a = \lambda_{a+b} = \lambda_b$.

Zu linear abhängigen a, b wähle $c \in K^3$ mit b, c linear unabhängig, dann sind auch a, c linear unabhängig. Nun schließt man aus dem vorigen Paragraphen $\lambda_b = \lambda_c = \lambda_a$.

Insgesamt ist somit λ_a unabhängig von a, etwa $\lambda := \lambda_a$. Das zeigt $\forall a \in K^3 : \sigma(a) = a\lambda = \varrho_\lambda(a)$, also $\sigma = \varrho_\lambda$ und $\operatorname{Kern} \overline{} \subseteq \varrho_K$. Die andere Inklusion ist trivial. ∎

Wir formulieren jetzt die Fundamentalsätze, die in gewissem Sinn die Umkehrungen der beiden obigen Sätze sind. Die Beweise werden später in allgemeinerem Zusammenhang geführt.

(5.9) Fundamentalsatz für affine Ebenen. *Seien K und K' Körper, und sei $T' := T(\mathrm{AG}(2, K'))$ die Translationsgruppe von $\mathrm{AG}(2, K')$. Für jede Kollineation $\varphi : \mathrm{AG}(2, K) \to \mathrm{AG}(2, K')$ existiert genau ein $\tau \in T'$ und genau eine semilineare Bijektion $\sigma : K^2 \to K'^2$ mit $\varphi = \tau \circ \sigma$.*

(5.10) Fundamentalsatz für projektive Ebenen. *Seien K und K' Körper. Zu jeder Kollineation $\varphi : \mathrm{PG}(2, K) \to \mathrm{PG}(2, K')$ existiert eine semilineare Bijektion $\sigma : K^3 \to K'^3$ mit $\varphi = \bar{\sigma}$.*

(5.11) Bemerkung. 1. Die Aussage in (5.10) besagt, dass die Abbildung $\overline{}$ aus (5.8.2) surjektiv ist.

2. (5.7) und (5.8) zeigen, dass Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern. Der letzte Schritt im Beweis (3.12) ist damit gezeigt.

3. Eine wichtige Folgerung aus den Fundamentalsätzen ist die Tatsache, dass verschiedene koordinatisierende Körper von affinen bzw. projektiven Ebenen zueinander isomorph sind.

   Prägnant ausgedrückt: Der Koordinatenkörper einer affinen bzw. projektiven Ebenen ist bis auch Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir betrachten jetzt den Fortsetzungssatz (5.1) für den Fall $\mathrm{AG}(2,K)$ mit projektivem Abschluss $\mathrm{PG}(2,K)$ mit einem Körper K. Zu $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(2,K)$ existiert nach (5.6.2) ein $M \in \mathrm{GL}(2,K)$ mit

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{12}\widehat{\sigma}(x_2) \\ m_{21}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{22}\widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix}.$$

Sei $\iota : A \to P;\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} K$ die kanonische Einbettung aus (3.11). Sei ferner $a \in K^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\tau_a \circ \sigma)^*(\iota(x)) &= \iota(\tau_a \circ \sigma(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 + m_{11}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{12}\widehat{\sigma}(x_2) \\ a_2 + m_{21}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{22}\widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} K \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & m_{11} & m_{12} \\ a_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & & \\ a_2 & \mathrm{M} & \end{pmatrix} \Gamma_{\widehat{\sigma}}\ \iota(x). \end{aligned}$$

Daher ist $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & & \\ a_2 & \mathrm{M} & \end{pmatrix} \Gamma_{\widehat{\sigma}}$ gegeben.

(5.12) *Für einen Körper K sei die lineare Bijektion $\sigma : K^2 \to K^2$, beschrieben durch die Matrix $M \in \mathrm{GL}(2,K)$, und es sei $a \in K^2$. Dann wird $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & & \\ a_2 & M & \end{pmatrix}$ induziert.* ∎

Zentralkollineationen

Definition. Sei σ ein Automorphismus der affinen bzw. projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$. Eine Gerade L heißt *Achse* von σ, wenn $\forall x \in L:\ \sigma(x) = x$, d. h. L ist eine Fixpunktgerade.

Dual dazu: $z \in P$ heißt *Zentrum* von σ, wenn für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$ gilt: $\sigma(G) = G$. Das impliziert natürlich $\sigma(z) = z$.

(5.13) *Sei* $(P, \mathfrak{G})$ *eine projektive Ebene und* $\sigma \in \operatorname{Aut}(P, \mathfrak{G})$. *Dann gilt:*

(1) *Wenn* σ *eine Achse* L *besitzt, dann hat* σ *ein Zentrum* z.

(2) *Wenn* σ *ein Zentrum* z *besitzt, dann hat* σ *eine Achse* L.

Beweis. (1) 1. Fall: $\exists z \in P \setminus L : \sigma(z) = z$. Dann gilt für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$:

$$\sigma(G \cap L) = G \cap L \quad \text{also} \quad G = \overline{z, G \cap L} \implies \sigma(G) = \overline{\sigma(z), \sigma(G \cap L)} = \overline{z, G \cap L} = G$$

und z ist ein Zentrum.

2. Fall: $\forall z \in P \setminus L : \sigma(z) \neq z$. Geraden der Form $\overline{a, \sigma(a)}$ mit $a \in P \setminus L$ werden dann von σ fest gelassen: Sei $z = L \cap \overline{a, \sigma(a)}$. Dann

$$\sigma(\overline{a, \sigma(a)}) = \sigma(\overline{a, z}) = \overline{\sigma(a), \sigma(z)} = \overline{\sigma(a), z} = \overline{a, \sigma(a)}.$$

Sei nun $G = \overline{b, z}$ eine weitere Gerade durch z. Für $y = \overline{a, \sigma(a)} \cap \overline{b, \sigma(b)}$ gilt dann $\sigma(y) = y$. Also muss gelten $y \in L$ und $y = z$. Es folgt $G = \overline{b, z} = \overline{b, \sigma(b)}$ und somit $\sigma(G) = G$. Daher ist z ein Zentrum.

(2) ist dual zu (1). ∎

Definition. Eine Kollineation σ der projektiven Ebene P heißt *Zentralkollineation*, wenn sie ein Zentrum z und damit auch eine Achse L besitzt.

σ heißt *Homologie*, wenn $z \notin L$, und *Elation*, wenn $z \in L$.

(5.14) *Sei* σ *Zentralkollineation der projektiven Ebene* $(P, \mathfrak{G})$ *mit Zentrum* z *und Achse* L. *Dann gilt:*

(1) *Durch ein Paar* $(p, \sigma(p))$ *mit* $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$ *ist* σ *eindeutig bestimmt. Genauer: Für* $x \in P \setminus (L \cup \{z\})$ *gilt* $\sigma(x) = \overline{x, z} \cap \overline{\overline{p, x} \cap L, \sigma(p)}$ *(falls* $x \notin \overline{p, z}$*).*

Für $x \in \overline{p, z}$ *wähle einen Hilfspunkt* $q \notin \overline{p, z}$ *um* $\sigma(x)$ *wie oben zu konstruieren.*

(2) *Äquivalent sind*

- (I) $\sigma = \mathrm{id}$.
- (II) *Es gibt einen Fixpunkt* $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$.
- (III) *Es gibt eine Fixgerade* $G \neq L$ *mit* $z \notin G$.

Beweis. (1) $\sigma(x) \in \sigma(\overline{x,z}) = \overline{x,z}$, da $z \in \overline{x,z}$. Sei $r := \overline{p,x} \cap L$. Dann

$$\sigma(r) = r \quad \text{und} \quad \sigma(x) \in \sigma(\overline{x,p}) = \sigma(\overline{r,p}) = \overline{\sigma(r), \sigma(p)} = \overline{r, \sigma(p)}, \quad \text{falls } x \notin \overline{p,z}.$$

Der Rest ist klar.

(2) (II) $\Longrightarrow$ (I): Konstruiere $\sigma(x)$ wie in (1) aus z und $p = \sigma(p)$. Dann folgt $\forall x \in P$: $\sigma(x) = x$ und $\sigma = \mathrm{id}$.

„(III) $\Longrightarrow$ (I)" ist dual dazu. Der Rest ist klar. ■

(5.15) Bemerkung. 1. Ist σ eine Zentralkollineation mit Achse L, dann ist $\sigma|_{P_L}$ eine Dilatation.

2. Das Argument zum 2. Fall kann auch in der affinen Ebene P_L mit $\sigma|_{P_L}$ formuliert werden. $\sigma|_{P_L}$ ist dann eine Translation mit Richtung z.

3. Zentrum und Achse einer Zentralkollineation $\neq \mathrm{id}$ sind eindeutig bestimmt. Insbesondere ist id die einzige Kollineation, die zugleich Homologie und Elation ist.

4. Die Begriffe „Zentrum" und „Achse" wurden auch im Zusammenhang mit dem projektiven Axiom von Desagues erwähnt. Tatsächlich besteht eine Zusammenhang. Gilt nämlich (PD) für festes Zentrum z und feste Achse L, so existieren „maximal viele" Zentralkollineationen mit eben diesem Zentrum und dieser Achse.

Affinitäten

Definition. Automorphismen affiner Ebenen werden auch *Affinitäten* genannt. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit projektivem Abschluss $(P, \mathfrak{G}')$ und Ferngerade F.

$\alpha \in \operatorname{Aut} A$ heißt *Dilatation*, wenn α^* eine Zentralkollineation mit Achse F ist. Die Dilatation heißt *Streckung*, wenn α^* eine Homologie ist (also ein Zentrum in A hat), und *Translation*, wenn α^* eine Elation ist (also $\alpha \neq \mathrm{id} \Longrightarrow \forall x \in A : \alpha(x) \neq x$).

$\alpha \in \operatorname{Aut} A$ heißt *Achsenaffinität*, wenn α eine Achse L besitzt. Insbesondere heißt α *Scherung*, wenn α^* Elation mit Zentrum auf F ist (d. h. $\alpha \neq \mathrm{id} \Longrightarrow \forall x \in A \setminus L : \overline{x, \alpha(x)} \| L$).

Eine Achsenaffinität heißt *Affinspiegelung*, wenn α^* eine Homologie mit Zentrum auf F ist und zusätzlich $\alpha^2 = \mathrm{id} \neq \alpha$ gilt.

(5.16) Bemerkung. (1) Die Definition einer Dilatation aus Aufgabe 6 ist äquivalent zur hier gegebenen.

(2) Während die Definitionen von Streckung und Translation komplementär sind, existieren durchaus Achsenaffinitäten $\neq \mathrm{id}$, die weder Scherung noch Affinspiegelung sind:

(3) Es gibt eine Reihe weiterer Affinitäten, die (gerade auch in Schulbüchern) einen eigenen Namen haben. Darstellung in der Form $x \mapsto Mx + t$ mit einer regulären 2×2-Matrix M und $t \in K^2$:

Euleraffinität, M hat zwei verschiebene Eigenwerte.

Schubscherung, $x \mapsto Mx$ ist eine Scherung mit Achse L, $t \neq 0$, und $tK \nparallel L$. Es gibt keine Fixpunkte und keine Fixgeraden.

In den folgenden Kapiteln werden weitere Beispiele betrachtet, wie Spiegelungen, Drehungen usw.

(4) Falls α^* eine Zentralkollineation ist, dann gilt: F ist deren Achse oder $z \in F$.

In der Tat gilt

(5.17) *Sei* $\alpha \neq \mathrm{id}$ *eine Affinität der affinen Ebene* $(A, \mathfrak{G})$. *Dann gilt:*

(1) *Ist* $z \in A$ *Zentrum, so hat* α *keinen weiteren Fixpunkt und jede Fixgerade geht durch* z.

(2) *Ist* $L \in \mathfrak{G}$ *Achse von* α, *so liegen alle Fixpunkte auf* L. *Die Menge der Fixgeraden* ($\neq L$) *bilden eine Parallelklasse, nämlich* $[\overline{x, \alpha(x)}]$ *für* $x \in A \setminus L$.

(3) α *hat höchstens eine Achse und höchstens ein Zentrum, aber nicht beides zugleich.*

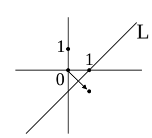
Beweis. Übung. ∎

(5.18) Bemerkung. (1) (5.17.1), „keinen weiteren Fixpunkt" wurde in Aufgabe 6(c) schon gezeigt.

(2) Wegen (5.14.1) ist jede Dilatation und jede Achsenaffinität durch ein Punkt-Bildpunkt-Paar (a, b) eindeutig bestimmt, falls $a, b \neq z$ bzw. $a, b \notin L$, d.h. (5.14) gilt sinngemäß für Dilatationen und Achsenaffinitäten.

Beispiel. In $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(2, \mathbb{R}))$ mit Achse

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Wir versuchen den Ansatz $\alpha(x) = \mathbf{M}x + v$ mit unbestimmten Koeffizienten in $\mathbf{M}, v$. Das Einsetzen von Punkten aus L und $0 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ führt auf $\mathbf{M} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Es bezeichne $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ die Gruppe aller Automorphismen, $\Delta = \Delta(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Dilatationen und $T = T(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Translationen.

(5.19) *T ist Normalteiler von Δ und dies ist Normalteiler von* $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$.

Beweis. Aufgabe 10. ■

(5.20) *In der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ gilt (Ad) genau dann, wenn T auf A transitiv operiert, d. h. $\forall a, b \in A \, \exists \tau \in T$ mit $\tau(a) = b$.*

$(A, \mathfrak{G})$ heißt dann *Translationsebene*.

Beweis. Übung!

„$\Longrightarrow$“: Seien $a, b \in A, a \neq b$. Konstruiert wird ein Isomorphismus τ mit $\tau(a) = b$. Anschließend wird $\tau \in T$ gezeigt. Definiere τ wie folgt:

$$\text{Für } x \in A \setminus \overline{a,b} \text{ sei} \quad \tau(x) = \{b \| \overline{a,x}\} \cap \{x \| \overline{a,b}\}.$$

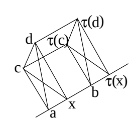
Zu $x \in \overline{a,b}$ wähle $c \in A \setminus \overline{a,b}$ und setze $\tau(x) = \{\tau(c) \| \overline{c,x}\} \cap \overline{a,b}$.

Wir zeigen

(a). *τ ist unabhängig von der Wahl von c.*

Sei $d \in A \setminus \overline{a,b}$ und τ' definiert wie τ, jedoch mit d statt mit c. Wir zeigen $\tau(x) = \tau'(x)$ für alle $x \in \overline{a,b}$; daraus folgt sofort $\tau = \tau'$:

1. Fall: $d \notin \overline{c, \tau(c)} = \{c \| \overline{a,b}\}$, dann erfüllt $c, a, d, \tau(c), b, \tau(d)$ die Voraussetzungen von (Ad), also $\overline{c,d} \| \overline{\tau(c), \tau(d)}$. Zu $x \in \overline{a,b}$ erfüllen $x, c, d, \tau(x), \tau(c), \tau(d)$ ebenfalls die Voraussetzungen von (Ad), also gilt $\overline{x,d} \| \overline{\tau(x), \tau(d)}$, d.h. $\tau(x) = \tau'(x)$.



2. Fall: $d \in \overline{c, \tau(c)}$. Wähle Hilfspunkt $e \notin \overline{c, \tau(c)} \cup \overline{a,b}$ und benutze den 1. Fall zweimal (die Existenz des Hilfspunktes ist nur dann gesichert, wenn $\operatorname{ord} A \geq 3$. Im Fall $\operatorname{ord} A = 2$ gilt $A \cong \mathrm{AG}(2, \mathbb{Z}_2)$; dies ist eine Translationsebene).

Das zeigt (a) und τ ist wohldefiniert.

Nun wird bewiesen

(b). *Für kollineare $x, y, z \in A$ sind $\tau(x), \tau(y), \tau(z)$ kollinear und es gilt $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x), \tau(y)}$.*

1. Fall: $\overline{x,y} \| \overline{a,b}$: Nach Konstruktion gilt $\overline{\tau(x), \tau(y)} = \overline{x,y}$ und $\tau(z) \in \overline{x,y} = \overline{\tau(x), \tau(y)}$. Insbesondere gilt $\overline{x,y} \| \overline{\tau(x), \tau(y)}$.

2. Fall: $\exists c = \overline{x,y} \cap \overline{a,b}$. Wegen (a) gilt

$$\tau(c) = \{\tau(x) \| \overline{x,c}\} \cap \overline{a,b} \quad \text{sowie} \quad \tau(c) = \{\tau(y) \| \overline{y,c}\} \cap \overline{a,b}, \quad \text{also} \quad \tau(c) \in \overline{\tau(x), \tau(y)}.$$

Entsprechend

$$\tau(c) \in \overline{\tau(x), \tau(z)} \implies \tau(z) \in \overline{\tau(c), \tau(x)} = \overline{\tau(c), \tau(y)}.$$

Das zeigt auch

$$\overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)}, \quad \text{denn} \quad \overline{x,y} = \overline{x,c} \| \overline{\tau(x),\tau(c)} = \overline{\tau(x),\tau(y)}.$$

Daher gilt (b).

Sei nun τ' wie τ definiert, aber mit $\tau'(b) = a$. Nach Konstruktion gilt $\tau' \circ \tau = \mathrm{id}$ (zunächst für $x \notin \overline{a,b}$ usw.). Wegen Symmetrie gilt auch $\tau \circ \tau' = \mathrm{id}$, also ist τ' die Inverse von τ und τ ist bijektiv. Für τ' gilt ebenfalls (b), daher ist τ eine Kollineation und wegen

$$\forall x, y \in A, x \neq y : \overline{x,y} \| \overline{\tau(x),\tau(y)} = \tau(\overline{x,y}),$$

ist τ sogar eine Dilatation. Da $\overline{x,\tau(x)} \| \overline{y,\tau(y)}$ für alle $x, y \in A$ kann es keine Fixpunkte geben, also $\tau \in T$. ■

Beispiel. Jede Fastkörper-Ebene ist eine Translationsebene. Die Moulton-Ebene ist keine Translationsebene (vgl. Aufgabe 24).

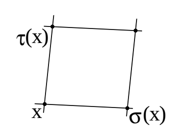
(5.21) Bemerkung. (1) Der Beweis zeigt, dass die Existenz von Translationen mit Richtung $G \in \mathfrak{G}$ äquivalent zu (Ad) mit "Richtung G" ist (d.h. $G_1, G_2, G_3 \| G$).

(2) Wegen Aufgabe 10(b) (oder (5.14.1) mit (5.1.2)) gibt es in Translationsebenen zu $a, b \in A$ genau ein $\tau \in T$ mit $\tau(a) = b$. Wählt man $o \in A$ fest, so werde für alle $a \in A$ mit $\tau_a \in T$ **die** Translation mit $\tau_a(o) = a$ bezeichnet. Dann ist $\tau : A \to T;\ a \mapsto \tau_a$ eine Bijektion. Man kann mit $\forall a, b \in A : a + b := \tau_a(b)$ eine Addition auf A einführen und $(A, +)$ ist dann eine Gruppe isomorph zu T. Ein Isomorphismus ist τ, d.h. $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b$ (Nachweis durch Anwenden auf o). Tatsächlich ist $(A, +)$ eine kommutative Gruppe, denn

(5.22) *In jeder Translationsebene $(A, \mathfrak{G})$ ist T kommutativ.*

Beweis. Seien $\sigma, \tau \in T$ und $x \in A$.

1. Fall: $x, \sigma(x), \tau(x)$ nicht kollinear. Es gilt $\overline{x,\sigma(x)} \| \overline{\tau(x), \tau \circ \sigma(x)}$ und $\overline{x,\tau(x)} \| \overline{\sigma(x), \sigma \circ \tau(x)}$.



$$\tau \circ \sigma(x) = \overline{\tau(x), \tau \circ \sigma(x)} \cap \overline{\sigma(x), \sigma \circ \tau(x)} = \sigma \circ \tau(x) \implies \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau,$$

denn $\tau \circ \sigma$ und $\sigma \circ \tau$ sind Translationen.

2. Fall: $x, \sigma(x), \tau(x)$ sind kollinear. Wähle $\varrho \in T$ mit $\varrho(x) \notin \overline{x,\sigma(x)} = \overline{x,\tau(x)}$. Es gilt

$$\tau \circ \varrho(x) \in \{\varrho(x) \| \overline{x,\tau(x)}\} \neq \overline{x,\sigma(x)}.$$

Also

$$\sigma \circ (\tau \circ \varrho) = (\tau \circ \varrho) \circ \sigma = \tau \circ (\varrho \circ \sigma) = \tau \circ (\sigma \circ \varrho).$$

Kürzen von ϱ führt auf $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. ■

(5.23) *Die affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist desarguessch genau dann, wenn $\forall a, b, z \in A$, verschieden und kollinear, eine Dilatation δ mit Fixpunkt z und $\delta(a) = b$ existiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Analog zum Beweis von (5.20).

„$\Longleftarrow$“: Sei a, b, z wie oben. Für $x \in A \setminus \overline{a, b}$ setzen wir $\delta(x) = \overline{z, x} \cap \{b \| \overline{x, a}\}$. Für $x \in \overline{a, b} \setminus \{z\}$ wähle Hilfspunkt $c \in A \setminus \overline{a, b}$, und verfahre wie gehabt. Schließlich sei $\delta(z) = z$. Weiter wie im Beweis von (5.20). Evt. Übung. ∎

(5.24) Bemerkung. (1) Sei $o \in A$ ein fester Punkt. Dann ist $\Delta_o := \{\delta \in \Delta\,;\ \delta(o) = o\}$ eine Untergruppe von Δ. Im Fall $A = \mathrm{AG}(2, K)$ gilt $\Delta_o \cong (K \setminus \{0\}, \cdot\,)$ (Beweis evt. später!). Diesen Umstand kann man nutzen, um $K \setminus \{0\}$ in einer desarguesschen Ebene zu konstruieren. Dabei bekommt man die Gruppeneigenschaft geschenkt.

(2) In ähnlicher Weise kann man $(K, +)$ als Untergruppe von T gewinnen. Es bleibt das Zusammenwirken von $(K, +)$ und Δ_o zu klären, um auch die Distributivgesetze nachweisen zu können. Die Einführung von Koordinaten entspricht dem Nachweis, dass T ein Vektorraum über K ist. Vgl. dazu auch (5.21).

(3) Analog kann man auch nicht desarguessche Ebenen koordinatisieren, etwa Fastkörperebenen. Bei Translationsebenen ist immerhin T noch ein Vektorraum über einem geeigneten Körper.

(4) Die Gültigkeit von Schließungssätzen vom Desargues-Typ ziehen die Existenz gewisser Zentralkollineationen auf der projektiven Ebene nach sich und umgekehrt. Dies mündet in der Klassifikation projektiver Ebenen nach Lenz und Barlotti.