

4 Schließungssätze und Koordinatisierung

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, affine Ebenen, die zu einem $\text{AG}(2, K)$ isomorph sind, zu kennzeichnen. Obwohl Zusatzeigenschaften, die dies leisten, den Charakter von Axiomen haben spricht man meist von „Schließungssätzen“. Es sind ja Sätze, die in $\text{AG}(2, K)$ gelten. Entsprechende Aussagen erhält man dann natürlich auch für projektive Ebenen.

Schließungssätze in affinen Ebenen

Definition. Die affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ heißt **desarguessch**, wenn das folgende **Axiom von Desargues**⁴ erfüllt ist:

(AD) Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ verschieden aber kopunktal mit $z \in G_i$. Für verschiedene $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ gelte dann:

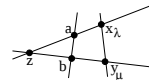
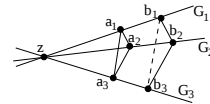
$$\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2} \wedge \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \implies \overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}.$$

Wir benötigen ein vorbereitendes Lemma.

(4.1) Wir betrachten $\text{AG}(2, K)$ über dem Körper K . Seien $a, b, z \in K^2$ nicht kollinear und für $\lambda, \mu \in K \setminus \{0\}$ seien $x_\lambda = z + (a - z)\lambda$, $y_\mu = z + (b - z)\mu$. Dann gilt:

$$\overline{a, b} \parallel \overline{x_\lambda, y_\mu} \iff \lambda = \mu.$$

Beweis. $\overline{a, b} \parallel \overline{x_\lambda, y_\mu} \iff (b-a)K = (y_\mu - x_\lambda)K \iff \exists \delta \in K \setminus \{0\} : y_\mu - x_\lambda = (b-a)\delta.$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

⁴GIRARD DESARGUES 1591-1661

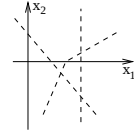
(4.2) Satz. Die affine Koordinatenebene $(A, \mathfrak{G}) = \text{AG}(2, K)$ über einem Körper K ist desarguessch.

Beweis. In der Situation (AD) gilt $b_i = z + (a_i - z)\lambda_i$ mit $\lambda_i \in K^*$. Wegen (4.1) hat man $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2} \implies \lambda_1 = \lambda_2$ und $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \implies \lambda_2 = \lambda_3$. Es folgt natürlich $\lambda_1 = \lambda_3$ und weiter (mit (4.1)) $\overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}$. ■

(4.3) Beispiel. Die **Moulton-Ebene**⁵ hat die Punktmenge $\mathbb{R}^2$ und die folgende Geradenmenge $\mathfrak{G}$: Zu $m, c \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = c \right\} \quad \text{und} \\ \langle\langle m, c \rangle\rangle &= \begin{cases} \langle m, c \rangle = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = mx_1 + c \right\} & \text{für } m \leq 0 \\ \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (0 \geq x_2 = mx_1 + c) \vee (0 < x_2 = \frac{1}{2}(mx_1 + c)) \right\} & \text{für } m > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter sei $\mathfrak{G} = \{ \langle\langle m, c \rangle\rangle; m, c \in \mathbb{R} \} \cup \{ \langle c \rangle; c \in \mathbb{R} \}$. Dann ist $(M, \mathfrak{G})$ eine nicht desarguessche affine Ebene.



Beweis (Skizze). $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{G})$ ist affine Ebene: (I1): Betrachte die Punkte $a \neq b \in \mathbb{R}^2$ (oE. mit $a_1 \leq b_1$). Nur der Fall $(a_1 < b_1) \wedge (a_2 \leq 0 < b_2)$ weicht vom Üblichen ab. Gesucht ist $G = \langle\langle m, c \rangle\rangle$, so dass $a, b \in G$. Also

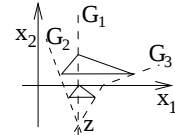
$$\left. \begin{aligned} a_2 &= ma_1 + c \\ 2b_2 &= mb_1 + c \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} m = \frac{2b_2 - a_2}{b_1 - a_1} > 0 \\ c = a_2 - ma_1 \end{cases}$$

und G ist somit eindeutig bestimmt.

(I2) und (E3) sind klar.

(P): Man kann zeigen:

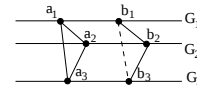
$$\langle\langle m, c \rangle\rangle \cap \langle\langle m', c' \rangle\rangle = \emptyset \quad \text{oder gleich} \quad \iff m = m'.$$



Offensichtlich ist in der nebenstehenden Figur (AD) nicht erfüllt.

(4.4) Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine desarguessche affine Ebene. Dann gilt:

(1) (Ad) („**kleiner Desargues**“) Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ parallel und verschieden. Weiter gelte $a_i, b_i \in G_i$. Dann $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2} \wedge \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \implies \overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}$.

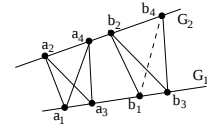


(2) (AD') („**Umkehrung des Desargues**“) Seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in A$ verschieden, so dass weder a_1, a_2, a_3 noch b_1, b_2, b_3 kollinear sind und für $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, gelte $\overline{a_i, a_j} \parallel \overline{b_i, b_j}$. Dann ist $\{ \overline{a_i, b_i}; i \in \{1, 2, 3\} \}$ eine Menge von parallelen oder kopunktalen Geraden.

⁵FOREST R. MOULTON 1872–1952

(3) (**Scherensatz**) Seien $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ und $a_1, a_3, b_1, b_3 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2, a_4, b_2, b_4 \in G_2 \setminus G_1$. Dann gilt:

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : \overline{a_i, a_{i+1}} \parallel \overline{b_i, b_{i+1}} \implies \overline{a_1, a_4} \parallel \overline{b_1, b_4}.$$



Beweis. (1) Die Voraussetzung implizieren:

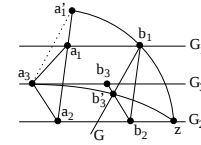
$$\exists i \in \{1, 2, 3\} : a_i = b_i \implies \forall i \in \{1, 2, 3\} : a_i = b_i.$$

Daher können wir $\forall i \in \{1, 2, 3\} : a_i \neq b_i$ annehmen. oE. seien weder a_1, a_2, a_3 noch b_1, b_2, b_3 kollinear (ansonsten ist die Aussage trivial).

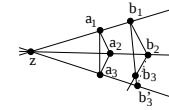
Sei nun $G = \{b_1 \parallel \overline{a_1, a_3}\}$, dann existiert $b'_3 := G \cap \overline{b_2, b_3}$ (weil $\overline{a_1, a_3} \not\parallel \overline{b_2, b_3}$). Angenommen $b_3 \neq b'_3$, dann existiert $z := \overline{a_3, b'_3} \cap G_2$ und $a'_1 := \overline{a_1, a_2} \cap z, b_1$ (weil $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2}$). Es gilt $\overline{a'_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2}$, $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b'_3}$, also folgt mit (AD):

$$\overline{a'_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b'_3} \parallel \overline{a_1, a_3} \implies \overline{a'_1, a_3} = \overline{a_1, a_3} \implies a'_1 = a_1$$

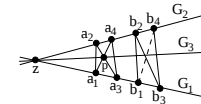
(denn $a_1 = \overline{a_1, a_2} \cap \overline{a_1, a_3} = \overline{a_1, a_2} \cap \overline{a'_1, a_3} = a'_1$), daher $z \in \overline{a_1, b_1} = G_1$. Wegen $z \in G_2$ widerspricht das der Annahme $G_1 \parallel G_2$ und $G_1 \neq G_2$.



(2) Falls für ein Paar i, j mit $i \neq j$ gilt $\overline{a_i, b_i} = \overline{a_j, b_j}$, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall seien für $i \in \{1, 2, 3\}$ wenigstens zwei $\overline{a_i, b_i}$ nicht parallel (sonst ist ebenfalls nichts zu zeigen), also oE. $z = \overline{a_1, b_1} \cap \overline{a_2, b_2}$. Es gilt $z \neq a_3, b_3$ (denn sonst $\overline{a_1, a_3} = \overline{b_1, b_3}$ — Widerspruch). Sei $b'_3 = \overline{z, a_3} \cap \overline{b_1, b_3}$ (existiert, da ansonsten $z \in \overline{a_1, a_3} \implies \overline{b_1, b_3} = \overline{a_1, a_3}$ — Widerspruch). Die Punkte $a_2, a_1, a_3, b_2, b_1, b'_3$ erfüllen die Voraussetzungen von (AD), also gilt $\overline{b_2, b'_3} \parallel \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \implies \overline{b_2, b'_3} = \overline{b_2, b_3}$ und $b'_3 = \overline{b_1, b_3} \cap \overline{b_2, b_3} = b_3$, insbesondere gilt $z \in \overline{a_3, b_3}$.

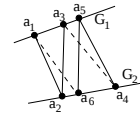


(3) Im Fall $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{a_1, a_4} \wedge \overline{b_2, b_3} \parallel \overline{b_1, b_4}$ folgt $\overline{a_1, a_4} \parallel \overline{b_1, b_4}$ direkt, also kann oE. $\overline{a_2, a_3} \not\parallel \overline{a_1, a_4}$ angenommen werden. Sei also $p = \overline{a_2, a_3} \cap \overline{a_1, a_4}$. Wähle G_3 durch p , so dass (AD) oder (Ad) entsteht. In den Übungen wird der Beweis weitergeführt.



Definition. Die affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ heißt **pappussch**, wenn das folgende **Axiom von Pappos**⁶ erfüllt ist:

(AP) Seien G_1, G_2 verschiedene Geraden und $a_1 \dots a_6$ verschieden mit $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \setminus G_1$. Dann $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{a_4, a_5} \wedge \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{a_5, a_6} \implies \overline{a_1, a_6} \parallel \overline{a_3, a_4}$.



(4.5) **Satz (Hessenberg 1905).**⁷ Jede pappussche affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist desarguessch.

⁶PAPPOS/PAPPUS VON ALEXANDRIA um 320 n. Chr.

⁷GERHARD HESSENBERG 1874–1929

Beweis. Seien $G_1, G_2, G_3 \in \mathfrak{G}$ verschieden und kopunktal mit $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien $a_i, b_i \in G_i$ wie in (AD) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}$. OE. seien a_1, a_2, a_3 nicht kollinear, sonst wären nämlich b_1, b_2, b_3 ebenfalls kollinear und es wäre nichts zu zeigen. Sind beide $\overline{a_1, a_3}, \overline{b_1, b_3} \parallel G_2$, so folgt die Behauptung, also sei oE. $\overline{b_1, b_3} \not\parallel G_2$. Dann existieren die Punkte

$$p = \{a_3 \parallel G_2\} \cap G_1 \quad q = \{a_3 \parallel G_2\} \cap \overline{b_1, b_3} \notin \overline{b_2, b_3} \quad r = \overline{q, b_2} \cap \overline{a_2, a_3}$$

(denn $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \not\parallel \overline{q, b_2}$). Dabei gilt $p, q \neq a_3$ (sonst $G_1 = G_3$), $r \neq a_3$ (sonst $q = a_3$) und $r \neq p$ (sonst $p = r = a_3$). Jetzt wird dreimal (AP) angewandt:

- 1.) Für r, a_3, q, b_3, b_2, z auf den Geraden $\overline{r, q}$ und G_3 :

$$\overline{r, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3}, \overline{z, b_2} \parallel \overline{a_3, q} \implies \overline{r, z} \parallel \overline{q, b_3} = \overline{b_1, b_3}.$$

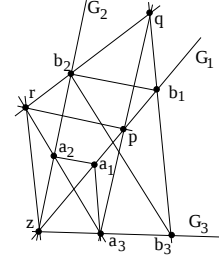
- 2.) Für r, z, b_2, b_1, q, p auf den Geraden $\overline{r, b_2}$ und G_1 :

$$\overline{r, z} \parallel \overline{b_1, q}, \overline{z, b_2} \parallel \overline{p, q} \implies \overline{r, p} \parallel \overline{b_1, b_2} \parallel \overline{a_1, a_2}.$$

- 3.) Für r, p, a_3, a_1, a_2, z auf $\overline{a_2, a_3}$ und G_1 :

$$\overline{r, p} \parallel \overline{a_1, a_2}, \overline{p, a_3} \parallel \overline{a_2, z} \implies \overline{r, z} \parallel \overline{a_1, a_3}.$$

Insgesamt folgt damit $\overline{a_1, a_3} \parallel \overline{r, z} \parallel \overline{b_1, b_3}$. ■



(4.6) Bemerkung. 1. Tatsächlich sind (AD), (AD') und der Scherensatz äquivalent.

2. Die projektiven Fassungen von (AD) und (AD') sind zueinander dual.

3. Es gilt die Implikationskette $(AP) \implies (AD) \implies (Ad) \xrightarrow{\text{Übung}} (Ap)$ (Spezialfall von (AP) mit $G_1 \parallel G_2$). Ob (Ap) „ $\implies$ “ (Ad) gilt, ist offen. Die übrigen Implikationen sind nicht umkehrbar. Das ist durch Gegenbeispiele belegt.

4. Die Moulton-Ebene erfüllt nicht (Ap), also keines der Axiome aus (3).

(4.7) Satz. Die affine Koordinatenebene $(K^2, \mathfrak{G}) = AG(2, K)$ über dem Körper K ist pappussch genau dann, wenn K kommutativ ist.

Beweis. Wegen (4.2) gilt (AD), also auch (Ap). Wir können uns daher auf (AP) mit sich schneidenden Geraden G_1, G_2 beschränken. Seien $z = G_1 \cap G_2$ und a_i wie in (AP) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1, a_6} \parallel \overline{a_3, a_4} \iff K$ kommutativ. Wir benutzen (4.1). $\exists \lambda, \mu, \nu, \varrho \in K$ mit

$$a_4 = z + (a_2 - z)\lambda, \quad a_5 = z + (a_1 - z)\mu, \quad \text{und} \quad \overline{a_1, a_2} \parallel \overline{a_4, a_5} \implies \lambda = \mu.$$

Genauso

.....
