

3 Projektive Ebenen

Wir wollen nun die Eigenschaften des projektiven Abschlusses einer affinen Ebene axiomatisch erfassen.

Definition. Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ heißt **projektive Ebene**, wenn gilt:

(I3) $\forall G \in \mathfrak{G}$ gilt $|G| \geq 3$

(I4) $\forall G, H \in \mathfrak{G}$ gilt $G \cap H \neq \emptyset$

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

$(P, \mathfrak{G})$ heißt **verallgemeinerte projektive Ebene**, wenn (nur) (I4) und (E3) erfüllt sind.

Bemerkung. Aus (I1) und (I4) ergibt sich sofort $G \neq H \implies |G \cap H| = 1$ (vgl. (1.5)).

(3.1) Beispiele. 1. Wegen (2.7) ist der projektive Abschluss jeder affinen Ebene eine projektive Ebene.

2. Minimalmodell: (1.1.4) ist der projektive Abschluss von (1.1.1), die Ferngerade F ist gestrichelt dargestellt. Es gibt keine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit $|P| < 7$.

3. Jeder near-pencil ist

.....

.....

.....

4. $\text{PG}(2, \mathbb{R})$ (vgl. (1.1.8)) ist eine projektive Ebene.

5. Allgemeiner: sei K ein beliebiger Körper, $P = \{aK; a \in K^3 \setminus \{0\}\}$ und $\mathfrak{G} = \{aK + bK; a, b \in K^3 \text{ linear unabhängig}\}$. Dann ist $\text{PG}(2, K) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ eine projektive Ebene. (Aufgabe 5 zeigt (I1), (I2) und (I4). Warum gelten (I3) und (E3)?)

(3.2) Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine verallgemeinerte projektive Ebene. Dann gilt:

(1) Falls $\exists G, H \in \mathfrak{G}, G \neq H, |G|, |H| \geq 3$, dann ist $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene.

(2) $(P, \mathfrak{G})$ ist projektive Ebene oder near-pencil.

Beweis. (1) Sei $K \in \mathfrak{G}$ mit $K \neq G, H$, dann ist $|K| \geq 3$ zu zeigen. Sei $z = G \cap H$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) folgt direkt aus (1). ■

Der Prozess des projektiven Abschliessens kann umgekehrt werden:

(3.3) Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Setze $P_F := P \setminus F$ und $\mathfrak{G}_F := \{G \setminus F; G \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}\}$. Dann gilt:

(1) $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist eine affine Ebene.

(2) Für $G, H \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}$ gilt $(G \setminus F) \parallel (H \setminus F) \iff G \cap F = H \cap F$.

(3) Der projektive Abschluss von $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist auf natürliche Weise isomorph zu $(P, \mathfrak{G})$.

Beweis. (1) (I1) Sei $x, y \in P_F, x \neq y$. $\exists! G \in \mathfrak{G}$ mit $x, y \in G, G \neq F$, und $x, y \in G \setminus F$.

(I2) folgt aus (I3), da $G \setminus F = G \setminus (G \cap F)$.

(E3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(P)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) ist im Beweis von (P) enthalten.

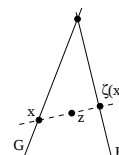
(3) Übung.

■

(3.4) Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$, $G \neq H$, und $z \in P \setminus (G \cup H)$. Dann gilt:

(1) $\zeta : G \rightarrow H; x \mapsto \overline{x, z} \cap H$ ist eine Bijektion, genannt **zentrale Perspektivität**.

(2) $|G| = |H|$.



Beweis. Übung. ■

Für $G \in \mathfrak{G}$ heißt $|G| - 1$ die **Ordnung** der projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$ (Bezeichnung $\text{ord } P$). Wegen (3.4.2) ist das eine sinnvolle Definition.

(3.5) Bemerkung. (1) Jede affine Ebene hat die gleiche Ordnung wie ihr projektiver Abschluss. (Deshalb wird $|G| - 1$ als Ordnung der projektiven Ebene bezeichnet.)

(2) Jede projektive Ebene hat die gleiche Ordnung wie jede in ihr enthaltene affine Ebene (vergleiche (3.3.1)).

(3) Diese sind aber i. A. nicht isomorph (im Unterschied zu (3.3.3)), da die Wahl der Geraden F willkürlich ist. Beispiele dazu werden wir evt. später in den Übungen behandeln.

(3.6) Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$:

(1) $|G| = q + 1$

(2) $|\overline{x}| = |\{H \in \mathfrak{G} ; x \in H\}| = q + 1$

(3) $|P| = q^2 + q + 1$

(4) $|\mathfrak{G}| = q^2 + q + 1$.

Beweis. Alle Punkte ergeben sich aus (2.6), (3.3) und der Konstruktion des projektiven Abschlusses. ■

Dualität

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Das Tripel $(\mathfrak{G}, P, I')$ mit $GI'x : \iff xIG$ heißt **duale Inzidenzstruktur** zu $(P, \mathfrak{G}, I)$.

(3.7) Beispiele. (1) Die duale Inzidenzstruktur eines near-pencils ist wieder ein near-pencil.

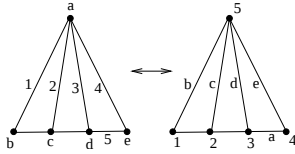
(2) Die duale Inzidenzstruktur von (1.1.1) ist kein Inzidenzraum (z.B. $\nexists \overline{3, 5}$).

(3) Die duale Inzidenzstruktur von (3.1.2) ist wieder eine projektive Ebene.

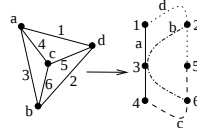
Falls $(\mathfrak{G}, P, I')$ ebenfalls ein Inzidenzraum ist (was i. A. nicht der Fall ist, da die Existenz von „Verbindungsgeraden“ nicht gesichert ist), bietet es sich an, um bei $I = \in$ auch $I' = \in$ wählen zu können, die duale Inzidenzstruktur geeignet zu schreiben:

Setze $\tilde{P} = \mathfrak{G}$, $\forall x \in P : \overline{x} := \{G \in \mathfrak{G} ; x \in G\}$ und $\tilde{\mathfrak{G}} := \{\overline{x} ; x \in P\}$. Dann ist $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$ der zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$ duale Inzidenzraum.

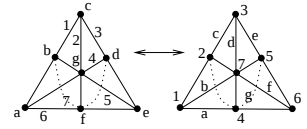
Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen P und $\tilde{P}$:



Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3

Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, \in)$	dualer Inzidenzraum $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$
Punkt x	Gerade $\overline{x}$
Gerade G	Punkt G
Verbindungsgerade $\overline{x, y}$	Schnittpunkt $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{x, y}$
Schnittpunkt $G \cap H$	Verbindungsgerade $\overline{G \cap H}$

Insbesondere sind die Begriffe „kollinear“ und „kopunktal“ zueinander dual.

(3.8) Bemerkung. 1. Wegen (1.5) gibt es in der dualen Inzidenzstruktur eines Inzidenzraumes höchstens eine Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten — das folgt aus (I1).

2. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Gilt $|\mathfrak{G}| \neq 1$, dann ist (I2) auch in $(\mathfrak{G}, P, I')$ erfüllt.

3. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum.

$(\mathfrak{G}, P, I')$ ist Inzidenzraum $\iff (P, \mathfrak{G}, I)$ ist verallgemeinerte projektive Ebene

(denn (I1) $\iff$ (I4) und (I2) $\iff$ (E3)). Insbesondere gilt: $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(\mathfrak{G}, P, I')$ sind beide verallgemeinerte projektive Ebenen, oder beide nicht.

(3.9) Satz. Sei $(P, \mathfrak{G}, \in)$ eine projektive Ebene, dann ist $(\mathfrak{G}, P, \ni)$ auch eine projektive Ebene, die zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$ **dual** Ebene. Sie hat dieselbe Ordnung wie $(P, \mathfrak{G})$.

Beweis. Wegen obiger Bemerkung (3) ist nur (I3) zu zeigen. (I3) folgt direkt aus (3.6.2). Wegen (3.6) sind die Ordnungen gleich. ■

Als direkte Folgerung ergibt sich das

(3.10) Dualitätsprinzip. Ersetzt man in einem für alle projektiven Ebenen gültigen Satz

1. Punkte durch Geraden und Geraden durch Punkte

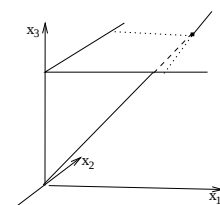
2. „Verbinden“ durch „Schneiden“ und „Schneiden“ durch „Verbinden“

so erhält man wieder einen Satz, der für alle projektiven Ebenen gilt.

Homogene Koordinaten

Für einen Körper K wird der Zusammenhang zwischen $\text{AG}(2, K)$ und $(P, \mathfrak{G}) = \text{PG}(2, K)$ untersucht. Sei $A := (0, 0, 1) + (1, 0, 0)K + (0, 1, 0)K$. Zusammen mit der üblichen Geradenstruktur ist $(A, \mathfrak{G}_A)$ eine affine Ebene. Betrachte die Abbildung $\iota : A \rightarrow P$; $x \mapsto xK$, die Punkte aus A auf Punkte aus P und entsprechend Geraden auf Geraden abbildet: Für $G = a + bK \in \mathfrak{G}_A$ gilt $\iota(G) = aK + bK \in \mathfrak{G}$, also ist $\iota(G)$ der von G erzeugte 2-dimensionale (da a, b linear unabhängig in K^3) Untervektorraum des K^3 .

ι ist nicht surjektiv, denn Punkte $(a_1, a_2, 0)K \in P$ liegen nicht im Bild. Die Bilder der in A parallelen Geraden $a + bK$, $c + bK$ schneiden sich in $(b_1, b_2, 0)K$, dementsprechend ist $F := (1, 0, 0)K + (0, 1, 0)K \in \mathfrak{G}$ die Ferngerade in $\text{PG}(2, K)$. Wir nutzen die Konvention, die Koordinaten als (x_0, x_1, x_2) zu bezeichnen, und präzisieren die obige Idee.



(3.11) Satz. Sei K ein Körper, $(P, \mathfrak{G}) = \text{PG}(2, K)$ und $(A, \mathfrak{G}_A) = \text{AG}(2, K)$. Für die Abbildung $\iota : A \rightarrow P$; $(a_1, a_2) \mapsto (1, a_1, a_2)K$, genannt **kanonische Einbettung**, gilt:

- (1) ι ist injektiv.
- (2) $\forall a, b, c \in A$ gilt: a, b, c sind kollinear $\iff \iota(a), \iota(b), \iota(c)$ sind kollinear.
- (3) Sei $\tilde{P}$ der projektive Abschluss von A . Durch $\tilde{\iota}([bK]) := (0, b_1, b_2)K$ für alle $b \in K^2 \setminus \{0\}$ wird eine Fortsetzung $\tilde{\iota} : \tilde{P} \rightarrow P$ definiert (also $\tilde{\iota}|_A = \iota$), die ein Isomorphismus ist.

Beweis. Zu jedem Vektor $x = (x_1, x_2) \in A = K^2$ bezeichne x' den Vektor $(1, x_1, x_2) \in K^3$.

- (1) Sei $a, b \in A$ mit

.....

.....

.....

- (2) „ $\implies$ “: Seien $a, b, c \in A$ kollinear und verschieden, dann existiert $\lambda \in K$ mit

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3) $\tilde{\iota}$ ist für alle $p \in \tilde{P}$ definiert, denn $[bK]$ durchläuft alle Parallelklassen von A .

$\tilde{\iota}$ ist injektiv: Sei $\tilde{\iota}([bK]) = \tilde{\iota}([cK])$ mit $b, c \in K^2 \setminus \{0\}$, d. h. $(0, b_1, b_2)K = (0, c_1, c_2)K$. Daher gilt $bK = cK$, also $[bK] = [cK]$. Die anderen Fälle gelten wegen (1) und der Definition.

$\tilde{\iota}$ ist surjektiv: Sei $aK \in P$.

1. Fall: $a_0 = 0$. _____

2. Fall: $a_0 \neq 0$. _____

ι ist Kollineation: Seien $a, b, c \in \tilde{P}$ verschieden und bezeichne F die Ferngerade von $\tilde{P}$.

„ $\implies$ “: Seien a, b, c kollinear.

1. Fall: $\overline{a, b} \neq F$ und oE. $a, b \in A$. Falls $c \in A$ folgt die Behauptung mit (2). Falls $c \in F$, d.h.

.....

.....

.....

und $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ sind kollinear.

2. Fall: $a, b, c \in F$. Dann gilt $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c) \in (0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K$, also sind $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

„ $\impliedby$ “: Seien $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

1. Fall: $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b) \neq (0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K$. Dann gilt oE. $\tilde{\iota}(a) = a'K$, $\tilde{\iota}(b) = b'K$ und $\tilde{\iota}(c) = (a'\lambda + b'\mu)K$.

Falls $\lambda = -\mu$ gilt $\tilde{t}(c) = (0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)K$ und $c = [(b - a)K]$ ist Fernpunkt der Geraden $\overline{a, b}$ in $\tilde{P}$, d.h. a, b, c sind kollinear.

Falls $\lambda \neq -\mu$ oE. $\lambda + \mu = 1$ (sonst beide geeignet skalieren), also

$$\tilde{t}(c) = (a'\lambda + b'(1 - \lambda))K = ((a' - b')\lambda + b')K \implies c = (a - b)\lambda + b$$

und a, b, c sind kollinear.

2. Fall: $\tilde{t}(a), \tilde{t}(b), \tilde{t}(c) \in I \left((0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K \right)$. Dann sind $a, b, c \in F$ kollinear. ■

Sei $(P, \mathfrak{G}) = \text{PG}(2, K)$. Man nennt $(a_0 : a_1 : a_2)$ **homogene Koordinaten** des Punktes $aK \in P$. Die Elemente a_0, a_1, a_2 sind nur bis auf Vielfache ($\neq 0$) aus K bestimmt, d.h. $\forall \lambda \in K \setminus \{0\} : (a_0 : a_1 : a_2) = (a_0\lambda : a_1\lambda : a_2\lambda)$. Im Fall $a_0 \neq 0$ bezeichnet $(a_0 : a_1 : a_2)$ den „affinen Punkt“ $(a_1a_0^{-1}, a_2a_0^{-1})$, für $a_0 = 0$ den Fernpunkt der affinen Geraden $(a_1, a_2)K$. Der affine Punkt (a_1, a_2) bekommt unter der kanonischen Einbettung die homogenen Koordinaten $(1 : a_1 : a_2)$. Man nennt (a_1, a_2) auch die **inhomogenen Koordinaten** des Punktes $(1, a_1, a_2)K$. Beachte $(a_0 : a_1 : a_2) \neq (0 : 0 : 0)$, denn $a = 0 \implies aK \notin P$.

Beispiel. $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6)$.

(3.12) Sei $(P, \mathfrak{G}) = \text{PG}(2, K)$ und $F \in \mathfrak{G}$. Dann ist die affine Ebene $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ (siehe (3.3)) isomorph zu $\text{AG}(2, K)$.

Beweis. Wähle eine Basis vom K^3 , $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in F$, $\mathbf{b}_0 \in K^3 \setminus F$. Bezüglich dieser Basis liegt die Situation aus (3.11) vor. Es bleibt zu zeigen, dass Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern, genauer: $K^3 \rightarrow K^3$; $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ induziert einen Automorphismus von $\text{PG}(2, K)$ für alle $M \in \text{GL}(3, K)$. Das werden wir in Kapitel 6 sehen. ■

(3.13) Bemerkung. Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit $\dim V = 3$. Dann erhält man eine projektive Ebene durch

$$P := \{aK ; a \in V \setminus \{0\}\}, \quad \mathfrak{G} := \{aK + bK ; a, b \in V \text{ linear unabhängig}\}, \quad I := \subseteq.$$

Natürlich ist $(P, \mathfrak{G})$ isomorph zu $\text{PG}(2, K)$. Durch Wahl einer Basis werden homogene Koordinaten festgelegt.

Zur Existenz endlicher affiner bzw. projektiver Ebenen

Nach (2.2.3) gibt es zu jedem Körper eine affine Ebene $\text{AG}(2, K)$ und nach (3.11) eine zugehörige projektive Ebene $\text{PG}(2, K)$, beide mit Ordnung $|K|$. Für jede Primzahl p ist $\text{GF}(p) := (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich $\mathbb{Z}_p$ zu einem Körper $\text{GF}(p^n)$ mit p^n Elementen erweitern. Dieser ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (Beweis in der Algebra).

(3.14) Beispiel (Skizze). Das Polynom $x^2 + x + 1$ hat keine Nullstelle in $K = \mathbb{Z}_2$. Bezeichne τ eine Nullstelle von $x^2 + x + 1$ (also $\tau^2 = \tau + 1$). Die Menge $\text{GF}(4) := \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2\tau$ bildet einen Körper mit den 4 Elementen $0, 1, \tau, \tau + 1$ und folgender Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned}(a + b\tau) + (c + d\tau) &:= (a + c) + (b + d)\tau \\ (a + b\tau)(c + d\tau) &:= (ac + bd) + (ad + bc + bd)\tau.\end{aligned}$$

Für die Inversen gilt

$$\tau^{-1} = \tau + 1 \quad \text{und} \quad (\tau + 1)^{-1} = \tau.$$

Für $K = \mathbb{R}$ erzeugt das Polynom $x^2 + 1$ auf ganz ähnliche Weise den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (mit der Nullstelle i).

(3.15) Bemerkung. 1. Die Multiplikation ergibt sich durch distributives Ausmultiplizieren der Summen, und Anwenden der Tatsache, dass τ Nullstelle des gegebenen Polynoms ist.

2. Um endliche Körper mit p^2 bzw. p^3 Elementen zu konstruieren, kann man entsprechend vorgehen: Finde ein Polynom vom Grad 2 bzw. 3 ohne Nullstellen in $\mathbb{Z}_p$, betrachte $\mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p\tau$ bzw. $\mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p\tau + \mathbb{Z}_p\tau^2$ usw.

Für $p^n, n \geq 4$, muss das Polynom „irreduzibel“ sein.

3. Ist $K = \text{GF}(q)$ für eine Primzahlpotenz $q = p^n$, so schreiben wir statt $\text{AG}(2, K) = \text{AG}(2, \text{GF}(q))$ auch kürzer $\text{AG}(2, q)$. Entsprechend schreiben wir $\text{PG}(2, q)$ statt $\text{PG}(2, \text{GF}(q))$.

(3.16) Folgerung. Für jede Primzahl p und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es affine und projektive Ebenen der Ordnung p^n , etwa $\text{AG}(2, p^n)$ bzw. $\text{PG}(2, p^n)$.

In die andere Richtung zielt der berühmte Nichtexistenzsatz von BRUCK und RYSER.¹ Aus diesem Satz folgt, dass es für bestimmte natürliche Zahlen keine projektive Ebene mit dieser Ordnung geben kann.

(3.17) Satz (Bruck-Ryser). Gibt es für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \equiv 1 \pmod{4}$ oder $q \equiv 2 \pmod{4}$ eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit $\text{ord } P = q$, so ist q die Summe zweier Quadrate, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $q = a^2 + b^2$.

Beweis. Siehe etwa in Hughes/Piper [2]. ■

(3.18) Satz. Es gibt keine projektive Ebene der Ordnung $q \equiv 6 \pmod{8}$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{N}$ geschrieben als $a = 4m + r$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann ist

$$a^2 = 16m^2 + 8mr + r^2 = 8m' + s \text{ mit } m' \in \mathbb{N} \text{ und } s \in \{0, 1, 4\}.$$

Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt also $a^2 + b^2 = 8m'' + t$ mit $m'' \in \mathbb{N}$ und $t \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Sei nun $q \equiv 6 \pmod{8}$, dann folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : q \neq a^2 + b^2$. Es gilt aber auch $q \equiv 2 \pmod{4}$ und mit (3.17) folgt dann, dass es keine projektive Ebene der Ordnung q geben kann. ■

¹RICHARD H. BRUCK (1914–1991), HERBERT J. RYSER (1923–1985)

Aus (3.16) und (3.17) folgt auch (steckt aber im Beweis von (3.17))

(3.19) Satz. *Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist die Summe zweier Quadrate.* ■

(3.20) Bemerkung. 1. FERMAT:² Für jede Primzahl $p \neq 2$ gilt:

p ist Summe zweier Quadrate (sogar eindeutig) $\iff p \equiv 1 \pmod{4}$.

Insbesondere sind Primzahlen $p \equiv 3 \pmod{4}$ nicht Summe zweier Quadrate.

2. Der Satz von Bruck-Ryser benötigt den sog. Vierquadratesatz von LAGRANGE³, der besagt, dass jede natürliche Zahl Summe vierer Quadratzahlen ist.

3. Alle bekannten projektiven Ebenen haben als Ordnung eine Primzahlpotenz.

4. Neben dem Satz von Bruck-Ryser gibt es ein einziges Nichtexistenzergebnis:

Mit Hilfe eines Computers wurde gezeigt, dass es keine projektive Ebene der Ordnung 10 gibt.

5. Für Primzahlpotenzen q gibt es auch Beispiele von projektiven Ebenen, die nicht die Form $\text{PG}(2, q)$ haben und zum Beispiel mit Fastkörpern dargestellt werden. Der kleinste echte Fastkörper hat 9 Elemente. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

Für einige Ordnungen ist die Existenzfrage einer projektiven Ebene also geklärt, für andere nicht.

Ordnung	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Existenz	ex.	ex.	ex.	ex.	ex. n.	ex.	ex.	ex.	ex. n.	ex.
Beweis	p^n	p^n	p^n	p^n	(3.18)	p^n	p^n	p^n	Computer	p^n

Ordnung	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Existenz	?	ex.	ex. n.	?	ex.	ex.	?	ex.	?	ex. n.	ex. n.
Beweis	-	p^n	(3.18)	-	p^n	p^n	-	p^n	-	(3.17)	(3.18)

²PIERRE DE FERMAT 1601–1665

³JOSEPH LOUIS LAGRANGE 1736–1813