

2 Affine Ebenen

Definition. Ein Inzidenzraum $(A, \mathfrak{G})$ heißt **affine Ebene**, wenn gilt:

(P) (**Parallelenaxiom**) $\forall G \in \mathfrak{G}, x \in A \setminus G, \exists! H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \emptyset$.

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Geraden G, H heißen **parallel**, geschrieben $G \parallel H$, wenn $G = H$ oder $G \cap H = \emptyset$. Für $x \in A$ und $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $\{x \parallel G\}$ die (wegen (P) eindeutig bestimmte) Parallele zu G durch x .

(2.1) In jeder affinen Ebene ist $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{G}$.

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind durch die Definition bereits gegeben. Zu prüfen ist noch die Transitivität. Für $G, H, K \in \mathfrak{G}$ gelte $G \parallel H$ und $H \parallel K$. Im Fall $G \cap K = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $G \cap K \neq \emptyset$, etwa $x \in G \cap K \implies G = \{x \parallel H\} = K$. ■

Definition. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Für $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $[G] := \{K \in \mathfrak{G} ; K \parallel G\}$ die Äquivalenzklasse von G in $\mathfrak{G}$ bzgl. $\parallel$. Mit $\mathfrak{G}/\parallel := \{[G] ; G \in \mathfrak{G}\}$ werde wie üblich die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet.

(2.2) **Beispiele.** (1) Der Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ aus (1.1.1) ist die kleinstmögliche affine Ebene (genannt **Minimalmodell**), d.h. es gibt keine affine Ebene $(A, \mathfrak{G}')$ mit $|A| < |P|$.

(2) Der Inzidenzraum aus (1.1.3) ist ebenfalls eine affine Ebene. Es gibt vier Klassen paralleler Geraden (also $|\mathfrak{G}/\parallel| = 4$).

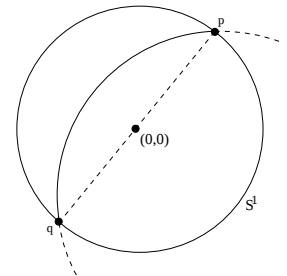
(3) Für einen Körper K sei $\mathfrak{G} := \{a + bK ; a \in K^2, b \in K^2 \setminus \{0\}\}$. Dann ist $\text{AG}(2, K) := (K^2, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Diese hatten wir in (1.1.7) **affine Ableitung** von K^2 genannt. Wir sprechen auch von der **affinen (Koordinaten-)Ebene** über K .

Beweis. (I1), (I2) aus (1.1.6).

(E3) ist klar (z.B. $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ sind nicht kollinear).

(P) Sei $x \in K^2$ und $G = a + bK \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin G$. Dann folgt $x + bK \cap a + bK = \emptyset$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen ist $x + cK \cap a + bK \neq \emptyset$ für $cK \neq bK$ (also b, c linear unabhängig) nachzuweisen. Gesucht sind also Lösungen (λ, μ) für $x + c\lambda = a + b\mu$ (bzw. äquivalent: $c\lambda - b\mu = a - x$). Da (b, c) eine Basis des K^2 ist, existieren die λ, μ eindeutig. Somit gilt $|x + cK \cap a + bK| = 1 \neq 0$. ■

(4) Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| = 1\}$ ihr Rand. Sei weiter $\mathcal{K}$ die Menge aller Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, die $\mathbb{S}^1$ symmetrisch zum Ursprung schneiden, d.h. es gibt zwei Schnittpunkte p, q und es gilt $q = -p$. Sei $\mathfrak{G} := \{K \cap D ; K \in \mathcal{K}\}$, dann ist $(D, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene.



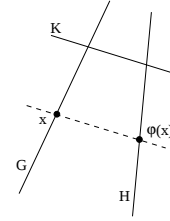
(2.3) Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \cap H = x \in A$, dann gilt

$$\forall G' \in [G], H' \in [H] : |G' \cap H'| = 1.$$

Beweis. Angenommen $|G' \cap H'| \neq 1$, also $G' = H'$ oder $G' \cap H' = \emptyset$, d.h. $G' \parallel H'$. Wegen $G \parallel G', H \parallel H'$ folgt mit (2.1) $G \parallel H$, im Widerspruch zu $G \cap H = x$. ■

(2.4) Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, H, K \in \mathfrak{G}$ mit $G, H \nparallel K$. Dann gelten:

(1) $\varphi : G \rightarrow H; x \mapsto \{x \parallel K\} \cap H$ ist eine Bijektion, genannt **Parallelperspektivität** (mit **Richtung** K).



(2) $|G| = |H| = |[G]|$

Beweis. (1) φ ist wohldefiniert wegen (2.3) ($\implies |\{x \parallel K\} \cap H| = 1$).

Injektivität: Zu $x, y \in G$ sei

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(y) &\implies \{x \parallel K\} = \{\varphi(x) \parallel K\} = \{\varphi(y) \parallel K\} = \{y \parallel K\} \\ &\implies x = \{x \parallel K\} \cap G = \{y \parallel K\} \cap G = y \quad (\text{denn } G \nparallel K). \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $z \in H$ und

$$y := \{z \parallel K\} \cap G \implies \varphi(y) = \{y \parallel K\} \cap H = \{z \parallel K\} \cap H = z.$$

(2) $|G| = |H|$ folgt aus (1). Natürlich kann man ebenso $|K| = |G|$ zeigen.

Betrachte die Abbildung $\psi : [G] \rightarrow K; G' \mapsto G' \cap K$.

ψ ist wohldefiniert, denn $|G \cap K| = 1 \implies \forall G' \in [G] : |G' \cap K| = 1$ (wegen (2.3)).

ψ ist injektiv: sei $\psi(G_1) = \psi(G_2)$ für $G_1, G_2 \in [G]$. Dann gilt

$$G_1 = \{\psi(G_1) \parallel G\} = \{\psi(G_2) \parallel G\} = G_2 \implies G_1 = G_2.$$

ψ ist surjektiv: sei $p \in K$. Dann ist $G' = \{p \parallel G\} \in [G]$ und es gilt $\psi(G') = p$.

Also ist ψ eine Bijektion $[G] \rightarrow K$, und es gilt $|[G]| = |K| = |G| = |H|$. ■

Definition. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, dann heißt $|G|$ für $G \in \mathfrak{G}$ die **Ordnung** von A , bezeichnet mit $\text{ord } A = |G|$. Die Wohldefiniertheit ist durch (2.4) sichergestellt.

(2.5) **Beispiele.** (1) Beispiel (2.2.1) bzw. (1.1.1) hat $\text{ord} = 2$.

(2) Beispiel (2.2.2) bzw. (1.1.3) hat $\text{ord} = 3$.

(3) $\text{ord}(\text{AG}(2, \mathbb{R})) = |\mathbb{R}|$, also (überabzählbar) unendlich.

(4) Im Inzidenzraum von Beispiel (1.1.5) ist für $n \geq 3$ keine Ordnung definiert.

(2.6) **Satz.** Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in A$ und alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt dann

(0) $|G| = q$

$$(1) \quad |[G]| = q$$

$$(2) \quad |\{H \in \mathfrak{G}; x \in H\}| = q + 1$$

$$(3) \quad |A| = q^2$$

$$(4) \quad |(\mathfrak{G}/\parallel)| = q + 1$$

$$(5) \quad |\mathfrak{G}| = q^2 + q$$

Beweis. (0) nach Definition von ord . (1) nach (2.4.2).

(2) Wähle $K \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin K$. Für alle $y \in K$ ist $\overline{x, y}$ eine Gerade durch x , dazu kommt $\{x \parallel K\}$, so dass es mindestens $q + 1$ Geraden durch x gibt. Da jede Gerade durch x entweder parallel zu K ist oder K trifft, sind es genau $q + 1$.

(3) $[G]$ ist eine Partition von A , d. h. $A = \bigcup_{K \in [G]} K$ und für $K, K' \in [G]$ gilt $K = K'$ oder $K \cap K' = \emptyset$. Daraus folgt

$$|A| = \sum_{K \in [G]} |K| = q \cdot q = q^2.$$

(4) Sei $x \in A$ fest. Zu $H, H' \in \{K \in \mathfrak{G}; x \in K\}$ sind

$$[H], [H'] \in \mathfrak{G}/\parallel \quad \text{und} \quad H \neq H' \implies [H] \neq [H'].$$

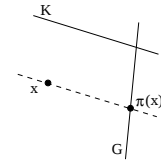
Somit gibt es mindestens $q + 1$ Parallelklassen. In jeder Parallelklasse gibt es ein Element, das durch x läuft, also sind es genau $q + 1$.

$$(5) \quad |\mathfrak{G}| = |\mathfrak{G}/\parallel| \cdot |[G]| = (q + 1) \cdot q = q^2 + q. \quad \blacksquare$$

Seien $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, K \in \mathfrak{G}$ mit $G \not\parallel K$.

Die (offensichtlich wohldefinierte und surjektive) Abbildung

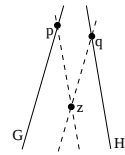
$$\pi : A \rightarrow G; x \mapsto \{x \parallel K\} \cap G$$



heißt **Parallelprojektion** (mit **Richtung** K).

Seien $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$ und $z \in A \setminus (G \cup H)$. Für $G \not\parallel H$ sei $q := \{z \parallel G\} \cap H$ und $p := \{z \parallel H\} \cap G$. Die bijektive Abbildung

$$\xi : G \setminus \{p\} \rightarrow H \setminus \{q\}; x \mapsto \overline{x, z} \cap H$$



heißt **zentrale Perspektivität**. Für $G \parallel H$ ist

$$\xi : G \rightarrow H; x \mapsto \overline{x, z} \cap H$$

wohldefiniert und bijektiv (und heißt ebenfalls **zentrale Perspektivität**).

Bemerkung. Die Herausnahme der Punkte p, q stellt sicher, dass ξ im Fall $G \nparallel H$ wohldefiniert, d. h. jeder Punkt aus $G \setminus \{p\}$ hat ein Bild, und surjektiv ist, d. h. jeder Punkt aus $H \setminus \{q\}$ hat ein Urbild.

Durch die Hinzunahme von neuen Punkten und einer neuen Geraden zur affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ kann bei der zentralen Perspektivität auf die lästigen Ausnahmepunkte und die Fallunterscheidung verzichtet werden.

Definition. Der **projektive Abschluss** $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist folgendermaßen definiert: ergänze jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ um einen Punkt $[G]$, genannt **Fernpunkt** von G , also $G' := G \cup \{[G]\}$. (Beachte, dass parallele Geraden denselben Fernpunkt bekommen!) Weiter sei $F := \mathfrak{G}/\parallel = \{[G]; G \in \mathfrak{G}\}$ eine zusätzliche Gerade, genannt **Ferngerade**. Dann sei

$$(P, \mathfrak{G}') := \left(A \cup F, \{G \cup \{[G]\}; G \in \mathfrak{G}\} \cup \{F\} \right).$$

Bemerkung. (1) Im Beispiel (1.1.1) ergibt sich das Beispiel (1.1.4).

(2) Im Beispiel (2.2.4) kann man sich die Fernpunkte als Punkte auf $\mathbb{S}^1$ vorstellen.

(2.7) *Der projektive Abschluss $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist ein Inzidenzraum mit den Eigenschaften:*

(1) $\forall G' \in \mathfrak{G}'$ gilt $|G'| \geq 3$.

(2) $\forall G', H' \in \mathfrak{G}', G' \neq H'$, gilt $|G' \cap H'| = 1$.

Beweis. (I1) Seien $x, y \in P, x \neq y$.

1. Fall: $x, y \in A \implies \overline{x, y} \cup \{[x, y]\}$ ist eine Verbindungsgerade, da aber $x, y \notin F$ ist es auch die einzige.

2. Fall: $x \in A, y \notin A \implies y = [G]$ für $G \in \mathfrak{G}$ und wegen (P) ist $\{x \parallel G\} \cup \{[G]\}$ die Verbindungsgerade.

3. Fall: $x, y \notin A \implies x, y \in F$ und F ist die Verbindungsgerade von x, y in P .

(I2) und (1) sind klar, denn (2.6.0) zeigt $\forall G \in \mathfrak{G} : |G \cup \{[G]\}| \geq 3$ und aus (2.6.4) folgt $|F| \geq 3$.

(2) 1. Fall: $G' \neq F \neq H'$. Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G' = G \cup \{[G]\}$, $H' = H \cup \{[H]\}$. Dann folgt entweder $G \parallel H$ und $G' \cap H' = [G]$ ($= [H]$) oder $G \nparallel H$ und $|G \cap H| = 1$ (beachte $[G] \neq [H]$).

2. Fall: oE. $H' = F$. Dann folgt $G' \cap H' = G' \cap F = [G]$. ■