1 Inzidenzräume

Definition. Seien P, $\mathfrak{G}$ Mengen und $I \subseteq P \times \mathfrak{G}$ eine Relation, genannt **Inzidenzrelation**. Das Tripel $(P, \mathfrak{G}, I)$ heißt dann auch **Inzidenzstruktur**.

$(P, \mathfrak{G}, I)$ heißt **Inzidenzraum** (oder **linearer Raum**), wenn gilt:

(I1) $\forall x, y \in P,\ x \neq y,\ \exists!\, G \in \mathfrak{G}$ mit x, yIG (Bezeichnung: $\overline{x, y} := G$)

(I2) $\forall G \in \mathfrak{G} : \exists x, y \in P,\ x \neq y,$ mit x, yIG.

Bemerkung. 1. Elemente aus P heißen **Punkte**, Elemente aus $\mathfrak{G}$ heißen **Geraden**.

2. Im Falle xIG sagen wir „x liegt auf G“, „G geht durch x“, „x inzidiert mit G“ und ähnliche geometrische Sprechweisen.

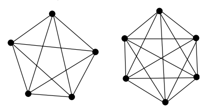
3. Gelegentlich wird ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch einfach mit P bezeichnet.

4. Bei der Darstellung endlicher Inzidenzräume werden die Punkte in die euklidische Ebene gezeichnet und mit Kurven verbunden, um die Geraden anzudeuten. Die Geraden bestehen dann ausschließlich aus den vorher markierten Punkten, die durch die jeweilige Kurve verbunden sind. Die anderen Punkte auf diesen Kurven sind keine Punkte der Geometrie (vgl. die folgenden Beispiele).

5. Insbesondere, müssen Geraden nicht „anschaulich gerade“ sein, d. h. sie müssen nicht in der euklidischen Ebene als Geraden darstellbar sein.

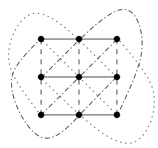
(1.1) Beispiele. (1) $P = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = 6$), $I = \in$.

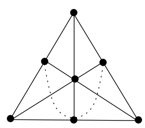
(2) Allgemeiner: sei P eine beliebige Menge, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = \binom{n}{2}$ falls $|P| = n \in \mathbb{N}$), $I = \in$. Dann heißt $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch **vollständiger Graph**.



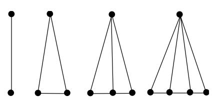
(3) durch die linke Figur definiert.

(4) durch rechte Figur definiert.





(5) Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $x_0, \ldots, x_n$ seien P und $\mathfrak{G}$ wie folgt definiert: $P = \{x_0 \ldots x_n\}$, $\mathfrak{G} = \big\{\{x_1 \ldots x_n\}\big\} \cup \{\{x_0, x_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dann ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum, genannt **near-pencil**.



(6) Mit $P = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{G} = \{a + b\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\}$ ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum, genannt **affine Ebene** über $\mathbb{R}$, oder **Anschauungsebene**. Wir schreiben dafür $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ (AG = „affine Geometrie“).

Beweis. Wir zeigen die Aussage für beliebige Körper K statt $\mathbb{R}$. (K muss nicht einmal kommutativ sein.)

(I1) Seien $x, y \in P = K^2, x \neq y$. Dann gilt $x, y \in x + (y - x)K \in \mathfrak{G}$.

Eindeutigkeit: seien $x, y \in a + bK$, dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $x = a + b\lambda$, $y = a + b\mu$, $\lambda \neq \mu$. Es gilt

. . . .

. . . .

. . . .

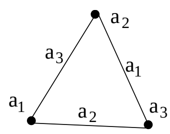
Daher existiert genau eine Verbindungsgerade.
(I2) ist klar. Somit ist P ein Inzidenzraum. ∎

(7) Das geht sehr viel allgemeiner: Sei (V, K) ein Vektorraum. Wir setzen $\mathfrak{G} = \{a + bK\,;\ a, b \in V, b \neq 0\}$. Dann ist $\mathrm{AG}(V, K) = (V, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum.

$\mathrm{AG}(V, K)$ wird auch **affine Ableitung** des Vektorraums (V, K) genannt, bzw. als **affiner Koordinatenraum** bezeichnet. Bsp. (6) ist der Spezialfall $V = \mathbb{R}^2$. Der Beweis kann wörtlich von oben übernommen werden.

(8) Zu $P = \{a\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$, $\mathfrak{G} = \{a\mathbb{R} + b\mathbb{R}\,;\ a, b \in \mathbb{R}^3 \text{ linear unabhängig}\}$ ist $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R}) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ ein Inzidenzraum. Übung.

(9) $P = \{a_1, a_2, a_3\} = \mathfrak{G}$, $a_i I a_j \iff i \neq j$.



(10) Zu $P = \{a\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$, setze

$$a\mathbb{R}\, I\, x\mathbb{R} \iff a^{\mathrm{T}} x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Dann ist (P, P, I) ein Inzidenzraum. Selbststudium.

(11) In $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ betrachte das Innere H des Einheitskreises (oder eine andere nicht leere Teilmenge). Setze $\mathfrak{G}_H := \big\{G \in \mathfrak{G}\,;\ |G \cap H| \geq 2\big\}$ und $xIG \iff x \in G$, dann ist $(H, \mathfrak{G}_H, I)$ ein Inzidenzraum.

(1.2) Bemerkung. Man kann immer erreichen, dass $P \cap \mathfrak{G} = \varnothing$:
Ist $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum, so kann man jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit der Menge der Punkte identifizieren, die mit G inzident sind, d.h.

$$G' := \{x \in P\,;\ xIG\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}' = \big\{G'\,;\ G \in \mathfrak{G}\big\}.$$

Dann ist $(P, \mathfrak{G}', \in)$ ein Inzidenzraum **isomorph** zum ursprünglichen (Beweis siehe unten!). Im Folgenden darf also, wenn $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum ist, oE $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(P)$ und $I = \in$ vorausgesetzt werden. Auf die explizite Nennung der Inzidenzrelation $\in$ kann dann verzichtet werden und wir schreiben $(P, \mathfrak{G})$ statt $(P, \mathfrak{G}, \in)$.

Definition. Sei ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ gegeben. Eine Punktmenge $A \subseteq P$ heißt **kollinear**, wenn es eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ gibt mit $\forall a \in A:\ aIG$. Eine Geradenmenge $B \subseteq \mathfrak{G}$ heißt **kopunktal**, wenn es einen Punkt $x \in P$ gibt mit $\forall G \in B:\ xIG$.

Seien $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ Inzidenzräume. Eine Bijektion $\sigma : P \to P'$ heißt **Kollineation** oder **Isomorphismus** wenn $\forall x, y, z \in P$ gilt:

$$\{x, y, z\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P) \Leftrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P')$$

Im Falle $(P, \mathfrak{G}, I) = (P', \mathfrak{G}', I')$ heißt σ **Automorphismus**.

Vorsicht! Es genügt nicht, dass $P = P'$ ist.

Existiert zwischen zwei Inzidenzräumen $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ eine Kollineation, so heißen die Inzidenzräume **isomorph**. Man schreibt auch $(P, \mathfrak{G}, I) \cong (P', \mathfrak{G}', I')$, oder kürzer $P \cong P'$.

Beweis (von Bem. (1.2)). Die Abbildung $\mathrm{id} : P \to P$ ist ein Isomorphismus von $(P, \mathfrak{G}, I)$ auf $(P, \mathfrak{G}')$ (Bez. aus (1.2)). Zu zeigen ist

$$x, y, z \quad \text{sind kollinear bzgl.} \quad \mathfrak{G} \iff x, y, z \quad \text{sind kollinear bzgl.} \quad \mathfrak{G}'.$$

Das folgt offenbar direkt aus der Definition von $\mathfrak{G}'$. ∎

Bemerkung. Wie auch für andere mathematische Strukturen bildet die Menge aller Automorphismen eines Inzidenzraumes $(P, \mathfrak{G})$ eine Gruppe. Bezeichnung: $\mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$.

(1.3) Satz. *Seien $(P, \mathfrak{G}, \in)$ und $(P', \mathfrak{G}', \in)$ Inzidenzräume und $\sigma : P \to P'$ eine Bijektion. Dann sind äquivalent:*

(I) *σ ist eine Kollineation*

(II) *$\forall G \subseteq P$ gilt:* $\quad G \in \mathfrak{G} \iff \sigma(G) := \big\{\sigma(x)\,;\ x \in G\big\} \in \mathfrak{G}'$

(III) *$\forall x, y \in P,\ x \neq y$ gilt:* $\quad \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$.

Beweis. (I) $\Longrightarrow$ (II) Es gilt: $G \in \mathfrak{G} \iff \forall x, y, z \in G : \{x, y, z\}$ kollinear $\iff \forall x, y, z \in G : \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\}$ kollinear $\iff \sigma(G) \in \mathfrak{G}'$.

(II) $\Longrightarrow$ (III) $\overline{x, y}$ und $\sigma(\overline{x, y})$ sind Geraden und $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ liegen auf letzterer, also $\sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$.

(III) $\Longrightarrow$ (I) Seien $x, y, z \in P$ und oE $x \neq y$.

$$x, y, z \in P \text{ sind kollinear} \iff z \in \overline{x, y} \iff \sigma(z) \in \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)} \iff$$

$\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z) \in P'$ sind kollinear. D. h. σ ist eine Kollineation. ∎

Bemerkung. 1. Die Ausage (II) kann man etwas plakativ so ausdrücken: Eine Bijektion $\sigma : P \to P'$ ist genau dann eine Kollineation, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet.

2. Die Aussagen von (1.3) gelten — entsprechend umformuliert — auch für Inzidenzräume, in denen die Inzidenzrelation nicht $\in$ ist.

(1.4) Beispiele. 1. (vgl. Bsp. (1.1.1)) $P = \{a, b, c, d\}$ und $(P, \big\{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\big\})$ und $P' := \{1, 2, 3, 4\}$ und $(P', \big\{A \subseteq P'\,;\ |A| = 2\big\})$ sind offenbar isomorph (Isomorphismus?) Was ist $\mathrm{Aut}(P)$?

2. Bsp. (1.1.2) mit $|P| = n$ ergibt ______________

3. Wir zeigen, dass die Inzidenzräume aus Bsp. (1.1.8) und Bsp. (1.1.10) isomorph sind. Wieder ist $\mathrm{id} : P \to P$ ein Isomorphismus. Um die Begründung transparent zu machen, zeigen wir *„wie“* die Geraden abgebildet werden: Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Dann gilt $G = \overline{a\mathbb{R}, b\mathbb{R}} = a\mathbb{R} + b\mathbb{R}$ in $(P, \mathfrak{G}, \subseteq)$. Bekanntlich existiert ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $G = x^\perp := \{u \in \mathbb{R}^3 ;\ u^\mathrm{T} x = 0\}$, z. B. $x = a \times b$ (Koordinatendarstellung des 2-dim. Untervektorraumes G in $\mathbb{R}^3$). Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^\perp = (x\lambda)^\perp$. Man hat also
$$c\mathbb{R} \subseteq G \iff c^\mathrm{T} x = 0 \iff c\mathbb{R} I x\mathbb{R}.$$
D. h. die Gerade $G \in \mathfrak{G}$ wird auf die *Gerade* $x\mathbb{R} \in P$ abgebildet.

In einem gegebenen Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ schreiben wir für $G, H \in \mathfrak{G}$ kürzer
$$G \cap H := \{x \in P ;\ xIG \wedge xIH\} .$$
Ist $G \cap H$ einelementig, so schreiben wir statt $\{x\} = G \cap H$ auch $x := G \cap H$. Für eine Punktmenge $A \subseteq P$ setze $A \subseteq G$, falls $\forall a \in A : aIG$. Das entspricht der Aussage in Bem. (1.2).

(1.5) *Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum und $G, H \in \mathfrak{G}$, dann gilt $G = H$ oder $|G \cap H| = 1$ oder $G \cap H = \varnothing$.*

Beweis. Seien $x, y \in G \cap H$ mit $x \neq y$, dann gilt ____________________________ ∎

Literatur

[1] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie.* Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1992.

[2] D. R. Hughes and F. C. Piper. *Projective planes.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[3] Karzel, Sörensen, and Windelberg. *Einführung in die Geometrie.* Vandenhoeck, 1973.

[4] Lingenberg. *Grundlagen der Geometrie I.* BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1969.

[5] Günter Pickert. *Projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2^{nd} edition, 1975.

[6] E. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie I, II, III.* BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991.