

Präsenzaufgaben

- 30.** Eine Struktur $(F, +, \cdot)$ heißt **Fastkörper**, wenn alle Körperaxiome bis auf das Rechtsdistributivgesetz und außerdem $0a = 0$ gelten. F heißt **planar**, wenn die Gleichung $x = ax + b$ für alle $a, b \in F, a \neq 1$, eine Lösung $x \in F$ besitzt. Für jeden Fastkörper F gilt
- (a) $a0 = 0$ und $a(-1) = -a$ für alle $a \in F$.
 - (b) Die Gleichung $x = ax + b, a, b \in F, a \neq 1$, besitzt höchstens eine Lösung.
 - (c) Endliche Fastkörper sind planar.
- 31.** Es sei $(F, +, \cdot)$ ein planarer Fastkörper.
 $A(F^2) := (F^2, \mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{G}$ genau wie in Aufgabe 11 ist eine affine Ebene.

Hausaufgaben

- 32.** Es sei $F = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_3\}$. Wir definieren für $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in F$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) &= \begin{cases} (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) & \text{für } a_1 a_2 = 0 \\ (a_1 b_1 + a_2 b_2, -a_1 b_2 + a_2 b_1) & \text{für } a_1 a_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist $(F, +, \circ)$ ein planarer Fastkörper, der kein Körper ist.

Hinweis: Man kann die Links-Multiplikation durch Matrizen beschreiben.

- 33.** Es sei $(F, +, \cdot)$ ein planarer Fastkörper und $A(F^2)$ die affine Ebene über F , wie in Aufgabe 31.
- (a) Für $v \in F^2$ ist die Abbildung $\tau_v : F^2 \rightarrow F^2; x \mapsto x + v$ eine Translation.
 - (b) $A(F^2)$ erfüllt (Ad).
 - (c) Wenn F kein Körper ist, dann ist (AD) in $A(F^2)$ verletzt.
Tipp: Wähle Punkte $z = (0, 0), a_1 = (1, 1), a_2 = (1, 0), a_3 = (0, \alpha), b_2 = (\gamma, 0)$, mit geeigneten $\alpha, \gamma \in F$.

- 34.** Es sei die affine Ebene $(\mathbb{C}^2, \mathfrak{G}) = \text{AG}(2, \mathbb{C})$ über den komplexen Zahlen gegeben.

Für die Abbildungen (mit $u \mapsto \bar{u}$ als dem Übergang zum konjugiert Komplexen)

$$\alpha : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; (a_1, a_2) \mapsto (\bar{a}_1, a_2) \quad \text{und} \quad \beta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2; (a_1, a_2) \mapsto (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$$

beweisen oder widerlegen Sie

- (a) α ist Affinität;
- (b) β ist Affinität;
- (c) α bzw. β ist lineare Abbildung des Vektorraums $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$?
- (d) Ist eine der Abbildungen semilinear?