

Präsenzaufgaben

20. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und Δ die Gruppe der Dilatationen. $\tau \in \Delta$ heißt **Translation**, wenn $\tau = \text{id}$ oder τ keine Fixpunkte besitzt (d.h. $\forall x \in A : \tau(x) \neq x$). Die Menge aller Translationen sei mit T bezeichnet.

(a) Es seien $\delta \in \Delta$ und $a \in A$ mit $\delta(a) \neq a$. Dann gilt $\delta \left(\overline{a, \delta(a)} \right) = \overline{a, \delta(a)}$.

(b) Es seien $\tau \in T \setminus \{\text{id}\}$ und $a, b \in A$, dann gilt $H := \overline{a, \tau(a)} \parallel \overline{b, \tau(b)}$.

(c) Folgern Sie, dass

$$\forall G \in \mathfrak{G} : \tau(G) = G \iff G \in [H]$$

H oder auch $[H]$ heißt die **Richtung** von τ .

(d) Zu $a, b \in A$ existiert höchstens ein $\tau \in T$ mit $\tau(a) = b$.

Tipp: Konstruieren Sie zunächst das Bild für einen Punkt $c \in A \setminus \overline{a, b}$.

(e) Mit $\tau \in T$ ist auch τ^{-1} eine Translation und hat dieselbe Richtung wie τ .

(f) $\clubsuit$ Δ ist ein Normalteiler in $\text{Aut}(A, \mathfrak{G})$, d.h. Δ ist eine Untergruppe von $\text{Aut}(A, \mathfrak{G})$ und für $\delta \in \Delta$, $\alpha \in \text{Aut}(A, \mathfrak{G})$ gilt $\alpha^{-1}\delta\alpha \in \Delta$.

(g) $\clubsuit$ T ist ein Normalteiler von $\text{Aut}(A, \mathfrak{G})$ und von Δ .

21. Wahr oder falsch?

(a) Es gibt eine affine Ebene der Ordnung q , dann gibt es auch eine projektive Ebene der Ordnung q .

(b) Es gibt eine affine Ebene der Ordnung 12.

(c) In jeder affinen Ebene gilt der Satz von Desargues.

Hausaufgaben

22. In jeder desarguesschen affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ gilt der *Scherensatz* (4.4.3):

Es seien $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ und $a_i, b_i \in A$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ acht Punkte mit $a_1, a_3, b_1, b_3 \in G_1$ und $a_2, a_4, b_2, b_4 \in G_2$ sowie $a_i, b_i \notin G_1 \cap G_2$. Dann folgt aus $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2}$, $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3}$ und $\overline{a_3, a_4} \parallel \overline{b_3, b_4}$ auch $\overline{a_1, a_4} \parallel \overline{b_1, b_4}$.

23. Gegeben sei $(A, \mathfrak{G}) = \text{AG}(2, K)$ mit einem Körper K .

- (a) Für jedes $v \in A$ ist die Abbildung $\tau_v : A \rightarrow A; x \mapsto x + v$ eine Translation.
- (b) Es seien $a, b \in A$. Geben Sie eine Translation σ an mit $\sigma(a) = b$.
- (c) Zeigen Sie unter Nutzung geeigneter Translationen, dass (Ad) (vgl. (4.4.1)) in $(A, \mathfrak{G})$ gilt.
- (d) Betrachte nun die Anschauungsebene, es sei also $K = \mathbb{R}$. Es sei ϱ die Translation mit $\varrho(-1, 1) = (2, -1)$. Bestimmen Sie $\varrho(1, 1)$ und $\varrho(\frac{1}{2}, 0)$
 - i. konstruktiv, indem Sie eine geeignete Skizze anfertigen;
 - ii. rechnerisch.

24. Gegeben sei die Moulton-Ebene $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{G})$ (vgl. (4.3) der Vorlesung) und $a \in \mathbb{R}$. Sei τ eine Translation mit $\tau(0, 0) = (0, a)$.

- (a) Finden Sie $\tau(1, -a)$.
- (b) Bestimmen Sie $\tau(2, 0)$ auf zwei Weisen:

Mit Hilfe der Punkt-Bildpunkt-Paare $(0, 0)$, $(0, a)$ bzw. $(1, -a)$, $\tau(1, -a)$.

Folgern Sie $a = 0$.

- (c) Fertigen Sie eine Skizze im Fall $a = 2$ an und identifizieren Sie eine kleine Desagrueskonfiguration, die sich nicht schließt.
- (d) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a, x_2)$ ist eine Translation.