

Präsenzaufgaben

14. Es sei $(P, \mathfrak{G})$ ein endlicher Inzidenzaum mit gleichmächtigen Geraden. Es sei

$$|P| = v, \quad |\mathfrak{G}| = b, \quad |G| = k \quad \text{für } G \in \mathfrak{G}, \quad |\overline{x}| = |\{G \in \mathfrak{G}; x \in G\}| = r_x \quad \text{für } x \in P.$$

Zeigen Sie

- (a) $r := r_x$ ist konstant (d. h. unabhängig von x) und es gilt:
 $(v - 1) = r \cdot (k - 1)$ und $vr = kb$.
- (b) Es sei $x \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin G$ gegeben. Dann ist

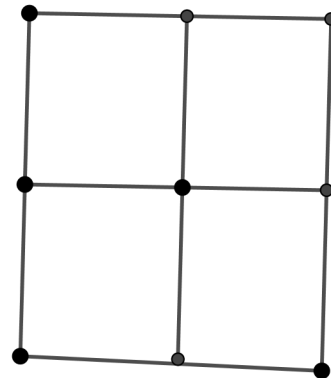
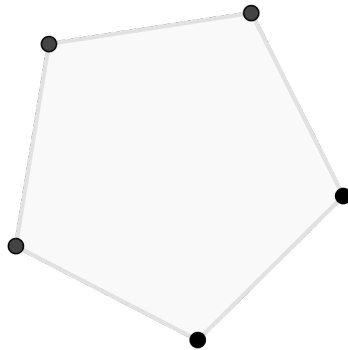
$$s = |\{H \in \mathfrak{G}; x \in H \text{ und } G \cap H = \emptyset\}|$$

konstant. Bestimmen Sie s in Abhängigkeit von den anderen Parametern.

- (c) Für $k = 3$ ist v ungerade, und es gilt stets $v(v - 1) \in 6\mathbb{N}$.

15. Gegeben seien die untenstehenden Inzidenzstrukturen. Welche davon sind Inzidenzräume?

Skizzieren Sie jeweils die duale Inzidenzstruktur.



16. Wahr oder falsch?

- (a) Die duale Inzidenzstruktur einer dualen Inzidenzstruktur ist die Ausgangsstruktur.
- (b) Es gibt eine projektive Ebene der Ordnung 101.
- (c) Es gibt eine affine Ebene der Ordnung 86.

bitte wenden!

Hausaufgaben

17. Es sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Wir betrachten die affine Ebene $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ wie in (3.3) und ihren projektiven Abschluss $(P'_F, \mathfrak{G}'_F)$. Geben Sie eine Kollineation $\sigma : P \rightarrow P'_F$ an und verifizieren Sie, dass σ tatsächlich eine Kollineation ist.

Hinweis: Wenn man kollineare Punkte in P betrachtet, kann man drei Fälle unterscheiden, je nachdem wie die Punkte zu F liegen.

18. Seien $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene $G, H \in \mathfrak{G}, G \neq H$, und $z \in P \setminus (G \cup H)$. Zeigen Sie
- (a) Die Abbildung $\zeta : G \rightarrow H; x \mapsto \overline{x, z} \cap H$ ist bijektiv.
 - (b) $|G| = |H|$.
 - (c) Sei nun $q \in \mathbb{N}$ die Ordnung von P , und $x \in P$. Zeigen Sie direkt (ohne Rückgriff auf Aussagen über affine Ebenen oder Dualität, aber mit Hilfe der Aufgabe 14)

$$(i) \quad |G| = q + 1 = |\{G \in \mathfrak{G} ; x \in G\}|; \quad (ii) \quad |P| = q^2 + q + 1 = |\mathfrak{G}|.$$

19. Es sei $(P, \mathfrak{G})$ ein endlicher Inzidenzaum mit gleichmächtigen Geraden, d.h. $\forall G \in \mathfrak{G} : |G| = k$. Zeigen Sie (auch hier kann Aufgabe 14 helfen)

- (a) Gilt $k > 2$ und $\left(|\overline{x}| \leq k \text{ für alle } x \in P \text{ oder } |P| = k^2 - k + 1\right)$, dann ist $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene mit $\text{ord } P = k - 1$.
- (b) Gilt $|\overline{x}| = k + 1$ für alle $x \in P$, dann ist $(P, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit $\text{ord } P = k$.
- (c) Untersuchen Sie den Fall $k = 2$ unter (a).