

## Präsenzaufgaben

8. Sei  $(P, \mathfrak{G})$  der near-pencil mit  $n = 6$  wie in (1.1.5).
- (a) Skizzieren Sie  $(P, \mathfrak{G})$ .
  - (b) Bestimmen Sie alle Automorphismen von  $(P, \mathfrak{G})$  (mit Begründung).
9. Sei  $(A, \mathfrak{G})$  eine affine Ebene. Ein Automorphismus  $\sigma$  von  $A$  heißt *Dilatation*, wenn für alle  $G \in \mathfrak{G}$  gilt  $\sigma(G) \parallel G$ . Zeige
- (a) Für jeden Automorphismus  $\sigma$  von  $A$  und alle  $G, H \in \mathfrak{G}$  gilt
$$G \parallel H \iff \sigma(G) \parallel \sigma(H).$$
  - (b) Die Menge  $\Delta$  aller Dilatationen bildet eine Untergruppe von  $\text{Aut}(A, \mathfrak{G})$ .
  - (c) Eine Dilatation mit mindestens zwei Fixpunkten ist die Identität.
10. Wahr oder falsch?
- (a) Für jede invertierbare Matrix aus  $\mathbb{R}^2$  ist die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto Ax$  eine Kollineation.
  - (b) In jedem Inzidenzraum sind alle Geraden gleichmächtig.
  - (c) Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen.
  - (d) Die Umkehrung einer zentralen Perspektivität ist ebenfalls eine zentrale Perspektivität.

## Hausaufgaben

11. Sei  $K$  ein Körper und für  $m, c \in K$  seien

$$\langle m, c \rangle := \{(x_1, x_2) \in K^2; x_2 = mx_1 + c\}, \quad \langle c \rangle := \{(x_1, x_2) \in K^2; x_1 = c\}$$

und  $\mathfrak{G} := \{\langle m, c \rangle; m, c \in K\} \cup \{\langle c \rangle; c \in K\}$ .

Zeigen Sie

- (a)  $A(K^2) := (K^2, \mathfrak{G})$  ist eine affine Ebene, die **affine Koordinatenebene** über  $K$ .
- (b)  $A(K^2)$  ist isomorph zu  $\text{AG}(2, K)$ . (Tatsächlich sind die Geradenmengen sogar gleich!)

Zwei **Sonderpunkte**, wenn Sie die Beweise so führen, dass sie auch für nicht kommutative Körper gelten.

**12.** Sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie in den folgenden Fällen, dass die Abbildung  $\sigma : K^2 \rightarrow K^2$  ein Automorphismus von  $\text{AG}(2, K)$  ist, und entscheiden Sie ob  $\sigma$  eine Dilatation ist.

(a)  $t \in K^2$  und  $\sigma(x) := x + t$ ;

(b)  $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$  und  $\sigma(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \beta x_2)$ ;

(c)  $K = \mathbb{Q}$  und  $\sigma(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ;

(d)  $K = \mathbb{C}$  und  $\sigma(x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

**Hinweis:** Nutzen Sie (1.3)(II) für den Nachweis der Kollineations-Eigenschaft.

**13.** Im Beweis zu Satz (1.3) der Vorlesung steckt ein Fehler.

(a) Finden Sie den Fehler, und belegen Sie Ihre Erkenntnis mit einem Gegenbeispiel.

(b) Korrigieren Sie den Fehler, indem Sie den fraglichen Beweisteil selbst ausführen.