Geometrie

Blatt 12 WiS 2025/26 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

In der euklidischen Ebene $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ seien $m, a \in E$, $m \neq a$ gegeben. Dann heißt

$$k_m(a) := \{x \in E\,;\ (m,a) \equiv (m,x)\}$$

Kreis um den Mittelpunkt m durch a. Wie in der Vorlesung nehmen wir an, dass

$$\forall G, H \in \mathfrak{G} : G \perp H \implies G \cap H \neq \varnothing.$$

60. Es seien $G \in \mathfrak{G}$ und $k := k_m(a)$ ein Kreis.

(a) Es seien $x, y \in k$ und es gelte $\widetilde{G}(x) = y$, dann gilt $m \in G$.

(b) $\widetilde{G}(k) = k \iff m \in G$.

(c) $|k \cap G| \leq 2$.

(d) Es sei $p \in k \cap G$, dann gilt $|k \cap G| = 1 \iff \overline{m, p} \perp G$.

In diesem Fall nennt man G **Tangente** an k im Punkt p.

(e) Zu jedem Punkt $x \in k$ existiert genau eine Tangente an k durch x.

(f)* Gilt $m \in G$, dann gilt $|k \cap G| \in \{0, 2\}$.

(g)* Das Axiom (WF) aus Aufgabe 56 ist äquivalent zu der Aussage: $\forall G \in \overline{m} : |k \cap G| = 2$.

(h)* Der Fall $|k \cap G| = 0$ in (f) kann tatsächlich eintreten.

Hausaufgaben

61. In der euklidischen Ebene $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ seien $a, b, c \in E$ gegeben.

(a) Wenn a, b, c nicht kollinear sind, so schneiden sich die Mittellote in einem Punkt u.

(b) Falls a, b, c nicht kollinear sind, so gibt es genau einen Kreis, genannt **Umkreis**, der die drei Punkte enthält.

(c) Was passiert, wenn die Punkte kollinear liegen.

bitte wenden!

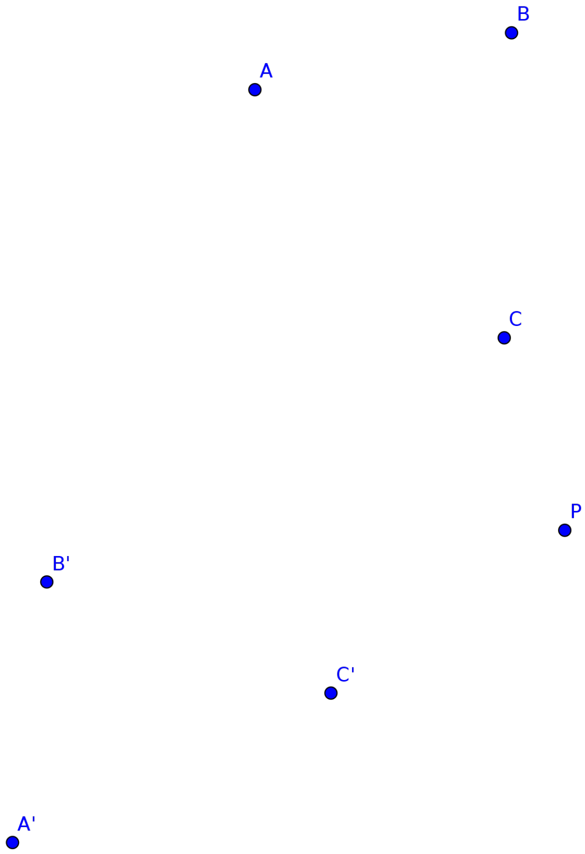
62. Gegeben seien die komplexen Zahlen $\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ und $\omega = -1 + i$. Wir betrachten die Abbildungen $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \omega(\overline{\omega})^{-1}\overline{z}$ und $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \zeta z + 2$.

(a) σ ist eine Spiegelung. Bestimmen Sie die Achse L.

(b) δ ist eine Drehung. Bestimmen Sie Drehpunkt und Drehwinkel.

(c) Zeigen Sie, dass $\gamma = \delta \circ \sigma$ keine Fixpunkte, aber genau eine Fixgerade G besitzt.
γ ist also eine Gleitspiegelung mit „Achse“ G.

63. Konstruieren Sie Geraden(-spiegelungen) so, dass durch sukzessive Anwendung das Dreieck ABC auf $A'B'C'$ abgebildet wird. Tun Sie das auf zwei Weisen:



1.) zuerst $A \mapsto A'$, dann weiter; bzw.
2.) zuerst $B \mapsto B'$, dann weiter.

Bilden Sie schließlich P auf beide Weisen ab.
Was beobachten Sie?
Von welchem Typ ist jeweils die verkettete Abbildung?

Formulieren Sie eine kurze Beschreibung Ihrer Konstruktion.

Ausnahmsweise sind hier Punkte mit Groß- und Geraden mit Klein-Buchstaben geschrieben.