Geometrie

Blatt 11 WiS 2025/26 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

55. Es sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebenen mit Kongruenz. Sind $a, b, b' \in E$ kollinear und verschieden mit $(a, b) \equiv (a, b')$, dann gibt es ein Mittellot L von b, b' und $a \in L$.

56. Es sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebenen mit Kongruenz in der das folgende Axiom gilt:

(WF) Seien $a, b, x \in E$ nicht kollinear, dann gibt es ein $c \in \overline{a, x}$ mit $(a, b) \equiv (a, c)$.

(a) Für alle $a, b \in E$ und $c \in G \in \mathfrak{G}$ existiert ein $d \in G$ mit $(a, b) \equiv (c, d)$.

(b) In der euklidischen Ableitung $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ von $(\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q})$ gilt (WF) nicht.

Hausaufgaben

57. Gegeben sei das Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$.

(a) Beschreiben Sie alle zu $G \in \mathfrak{G}_H$ (hyperbolisch) orthogonalen Geraden.

(b) Für welche Geraden ist hyperbolisch und euklidisch orthogonal dasselbe?

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass in einer hyperbolischen Ebene die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei rechte Winkel ist.

Anleitung: Betrachten Sie ein gleichschenkliges Dreieck mit einem rechtem Winkel in $(0, 0)$ und verdoppeln Sie einen der anderen Winkel.

58. In die Ebene mit Kongruenz $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ definieren wir für zwei Punkte $a, b \in E$, $a \neq b$, die Eigenschaft [16 Punkte]

$$\mathcal{E}(a, b): \quad \text{Es gibt genau ein } b' \in \overline{a, b} \setminus \{b\} \text{ mit } (a, b) \equiv (a, b').$$

Zeigen Sie für $a, b \in E$, $a \neq b$:

(a) $\mathcal{E}(a, b) \implies \forall c \in \overline{a, b} : \mathcal{E}(a, c)$;

(b) $\mathcal{E}(a, b) \implies \forall c, d \in E$ mit $(a, b) \equiv (c, d) : \mathcal{E}(c, d)$;

(c) Zu $c \in \overline{a, b}$ existiert $u \in \overline{a, b}$ mit $(a, b) \equiv (c, u)$;

(d) $\mathcal{E}(a, b) \implies \forall c, d \in \overline{a, b}, c \neq d : \mathcal{E}(c, d)$;

(e) $\mathcal{E}(a, b) \iff \forall c \in \overline{a, b} : \exists! L = \{c \perp \overline{a, b}\}$;

D. h. man kann ein Lot L auf $\overline{a, b}$ mit $c \in L$ errichten.

(f) $\mathcal{E}(a, b) \implies \forall c, d \in E, c \neq d$, mit $\overline{a, b} \cap \overline{c, d} \neq \varnothing : \mathcal{E}(c, d)$;

(g) $\mathcal{E}(a, b) \implies \forall c, d \in E, c \neq d : \mathcal{E}(c, d)$.

D. h. wenn $\mathcal{E}$ für ein Paar von Punkten gilt, dann für alle.

bitte wenden!

59. In der Anschauungsebene seien die drei Geraden A, B, C durch den Punkt d gegeben (Skizze). [8 Punkte]

(a) Konstruieren Sie die Gerade G mit $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{G}$ gemäß des Dreispiegelungssatzes in die Skizze.

(b) Messen Sie die Winkel zwischen A, B und C, G und vergleichen Sie.

(c) Messen Sie die Winkel zwischen B, C und A, G und vergleichen Sie.

(d) Können Sie Ihre Beobachtungen erklären?