Geometrie

Blatt 1 WiS 2025/26 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

1. Im affinen Koordinatenraum $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ seien für $t \in \mathbb{R}$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ t+6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R}, \quad H = \overline{a, b}$$

gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t

(a) $G \cap H$

(b) die Koordinatendarstellung der „Ebenen“ $E = \overline{a, b, c}$ und $F = \overline{G \cup \{a\}}$

(c) die Schnittpunkte $G \cap E$

(d) die Schnittgerade $E \cap F$.

2. Betrachten Sie $\mathrm{AG}(2, \mathbb{Z}_2)$. Wieviele Punkte, wieviele Geraden gibt es? Versuchen Sie eine Skizze. Was fällt Ihnen auf? Beweis!?

Hausaufgaben

3. Zeige, dass $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ tatsächlich ein Inzidenzraum ist.

Zeige weiter, dass für je zwei Geraden G und H gilt $G \cap H \neq \varnothing$.

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\mathbb{R} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R} \quad \text{und} \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbb{R} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R}.$$

4. Geben Sie explizit einen Isomorphismus zwischen den Inzidenzräumen aus Bsp. (1.1.5) mit $n = 2$ und (1.1.9) an.

5. Gegeben sei H aus Bsp. (1.1.11) und das Innere E der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ mit $a, b > 0$. Zeige, dass die Inzidenzräume $(H, \mathfrak{G}_H)$ und $(E, \mathfrak{G}_E)$ isomorph sind.

Tipp: Konstruiere eine lineare Abbildung ϕ mit $\phi(H) = E$.