Geometrie II

Blatt 9 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

34. Sei $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(V, K)$ der projektive Koordinatenraum über dem Vektorraum (V, K). Zu $U \subseteq V$ setze $\Phi(U) := \{aK;\ a \in U \setminus \{0\}\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent

(I) $\bigcup_{a \in U} aK$ ist Untervektorraum von V

(II) $\bigcup_{a \in U} aK = \langle U \rangle$

(III) $\Phi(U)$ Unterraum von P ist.

Hausaufgaben

35. Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Aufgabe 34. Weiter sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller Untervektorräume von V und $\mathfrak{T}$ die Menge aller Unterräume von P.

(a) Die Abbildung $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{T};\ U \mapsto \Phi(U)$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\Psi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{U};\ T \mapsto \bigcup_{A \in T} A$.

(b) Φ ist inklusionserhaltend, d. h. $U \subseteq U' \iff \Phi(U) \subseteq \Phi(U')$.

(c) $\Phi(\langle U \rangle) = \overline{\Phi(U)}$.

(d) Ist $\Phi(U)$ abhängig in P, so ist U linear abhängig.

(e) Geben Sie ein Beispiel für $U \subseteq \mathbb{R}^4$ linear abhängig, aber $\Phi(U)$ ist unabhängig in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$.

36. Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$.

(a) Die Punkte $\mathbf{v}_1\mathbb{R}, \mathbf{v}_2\mathbb{R}, \mathbf{v}_3\mathbb{R}, \mathbf{v}_4\mathbb{R}$ in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$ liegen komplanar genau dann, wenn die Matrix $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ singulär ist.

(b) Die Punkte $\mathbf{v}_1\mathbb{R}, \mathbf{v}_2\mathbb{R}, \mathbf{v}_3\mathbb{R}$ in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$ liegen nicht kollinear genau dann, wenn die Matrix $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ vollen Rang hat.

37. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein projektiver Raum, $F \subseteq P$ eine Hyperebene und $G \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}(F)$ beliebig. Dann gilt $|G \cap F| = 1$.

Tipp: Verbindungssatz!