Geometrie II

Blatt 7 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

26. In einem Austauschraum $(P, \mathfrak{U})$ sei $X \subseteq P$ unabhängig und $y \in P \setminus \overline{X}$.

Dann ist $X \cup \{y\}$ unabhängig.

Hausaufgaben

27. Seien (V, K) ein Vektorraum und es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Aufgabe 24. Weiter sei $S := \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq V$.

(a) S ist genau dann linear unabhängig, wenn es $\{a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1\}$ ist.

(b) $\overline{S} = a_1 + (a_2 - a_1)K + \cdots + (a_n - a_1)K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i;\ \lambda_i \in K, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$.

(c) Seien $a_1, \ldots, a_n \in V$ verschieden. S ist abhängig bzgl. $\overline{}$ genau dann, wenn es $\lambda_i \in K$ gibt mit

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0, \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i = 0$$

(d) Der zu $\overline{}$ gehörige $\cap$-abgeschlossene Raum $(V, \mathcal{T})$ erfüllt die Endlichkeitsbedingung und das Austauschaxiom.

28. Sei (V, K) ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum des affinen Raums $\mathrm{AG}(V, K)$.

(a) Falls $0 \in U$, dann ist U ein Untervektorraum von V.

(b) Es gibt einen Untervektorraum W von V und $a \in V$ mit $U = a + W$.

29. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Zeige, dass $\mathrm{PG}(V, K)$ ein projektiver Raum ist (vgl. (10.2.6)).