Geometrie II

Blatt 3 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

9. Im angeordneten Raum $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ seien $a, b \in P$, $a \neq b$, gegeben. Wir setzen

$$\overrightarrow{a,b} := \left\{x \in \overline{a,b}\,;\ (a|b,x) = 1\right\} \quad \text{und} \quad \overset{\,\hat{}}{\overrightarrow{a,b}} := \left\{x \in \overline{a,b}\,;\ (a|b,x) = -1\right\}.$$

(a) Veranschaulichen Sie sich die beiden Mengen in der Anschauungsebene.

(b) Für alle $d \in \overrightarrow{a,b}$ ist $\overrightarrow{a,d} = \overrightarrow{a,b}$.

(c) Falls es ein $c \in \overset{\,\hat{}}{\overrightarrow{a,b}}$ gibt, dann ist $\overrightarrow{a,c} = \overset{\,\hat{}}{\overrightarrow{a,b}}$.

(d) Skizzieren Sie ein Beispiel für $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ und $a, b \in P$ mit $\overset{\,\hat{}}{\overrightarrow{a,b}} = \varnothing$.

Hausaufgaben

10. Seien (V, K) eine Vektorraum und K trage eine Halbordnung. Leiten Sie aus dem Strahlensatz und Satz von Menelaos her, dass die „natürliche“ Zwischenfunktion auf $\mathrm{AG}(V, K)$ (aus Tv gebildet! — vgl. (7.12.1)) das Axiom von Pasch erfüllt.

11. Sei E ein Körper mit einem involutorischen Automorphismus $\overline{} : E \to E$ dessen Fixkörper K ist (vgl. §6). Weiter sei K ein angeordneter Körper. Dann ist $(E, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(E, K)$ eine euklidische Ebene, die darüberhinaus eine Zwischenfunktion trägt.

Für $a, b \in E$, $a \neq b$, und $G := \overline{a,b}$ gilt

(a) $\mathrm{Tv}\left(\frac{1}{2}(a+b), a, b\right) = -1$.

(b) Es existiert genau ein Mittelpunkt m von a, b und es gilt $(m|a,b) = -1$.

(c) Für $x \in E \setminus G$ gilt $G \cap \left]x, \widetilde{G}(x)\right[\neq \varnothing$. Geben Sie den Schnittpunkt an.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung von $\widetilde{G}$ aus (6.8.2).

(d) Die Aussagen gelten auch für viele halbgeordnete Körper.

12. Sei $E = K(\alpha)$ Erweiterung des Körpers K wie in Aufgabe I.41 beschrieben. Insbesondere ist $a = \alpha^2$ ein Nichtquadrat in K und es existiert ein involutorischer Automorphismus κ.

Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ die euklidische Ableitung von (E, κ).

Zeigen Sie, dass $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ die Bedingung (WF) aus Aufgabe 1 genau dann erfüllt, wenn $\forall u, v \in K : u^2 - v^2 a \in K^{\square}$, d. h. ein Quadrat in K ist.