Geometrie II

Blatt 13 SoS 2007 — H. Kiechle

Übungsklausur

1. Sei $(P, \mathfrak{G}, \zeta)$ ein angeordneter Raum, und $a, b, c, d \in P$ kollinear und verschieden. Aus $(b|a,c) = -1$ und $(d|a,c) = 1$ folgt $(d|a,b) = 1$.

2. Gegeben sei ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ und $X \subseteq P$. Geben Sie eine Definition für folgende Begriffe

(a) „Unterraum" und „Hülle $\overline{X}$ von X".

(b) X ist unabhängig.

(c) $\dim X$, falls X ein endlich erzeugter Unterraum ist.

3. (a) Geben Sie die axiomatische Definition eines affinen Raumes an.

(b) Geben Sie den affinen Koordinatenraum der Dimension 4 über einem beliebigen Körper K an. Beschreiben Sie neben der Menge der Punkte und der Menge der Geraden auch wann zwei Geraden parallel sind.

(c) Formulieren Sie den Verbindungssatz für affine Räume.

(d) Gegeben sei nun ein affiner Raum $(A, \mathfrak{G})$ der Ordnung $q \in \mathbb{N}$ mit Dimension 3. Zeigen Sie

i. Jede Ebene in A hat q^2 Punkte und ii. $|A| = q^3$.

(e) Wieviele Punkte hat der affine Raum der Ordnung q und der Dimension n ?

4. In $(A, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ sei $E := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + x_2 - x_3 = 2\}$ gegeben.
Bekanntlich ist $(P, \mathfrak{G}') = \mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$ isomorph zum projektiven Abschluss von $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$.

(a) Geben Sie die kanonische Einbettung $\iota : A \to P$ an.

(b) Beschreiben Sie $F = P \setminus \iota(A)$ (die „Fernhyperebene") algebraisch (Koordinatendarstellung).

(c) Zeigen Sie, dass E eine Ebene ist, und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung.

(d) Beschreiben Sie $\overline{\iota(E)}$, die Hülle von $\iota(E)$ in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$, algebraisch (Parameterdarstellung).

(e) Bestimmen Sie $G = \overline{\iota(E)} \cap F$ und zeigen Sie, dass G eine Gerade ist

(f) Bestimmen Sie alle Ebenen E' von $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ mit $G = \overline{\iota(E')} \cap F$.