Geometrie II

Blatt 12 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

45. Sei (V, K) ein Vektorraum und $\mathcal{L}$ die Menge aller Linearformen $V \to K$.
Für $f_1, f_2, g \in \mathcal{L}$ gilt

$$\ker f_1 \cap \ker f_2 \subseteq \ker g \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K : g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

Hausaufgaben

46. Im $\mathbb{R}^4$ seien folgende Punkte gegeben

$$(1,2,0,0)^{\mathrm{T}},\ (3,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ (0,3,1,0)^{\mathrm{T}},\ (2,3,0,1)^{\mathrm{T}}$$

(a) Die Punkte spannen eine Hyperebene H in $\mathrm{AG}(4, \mathbb{R})$ auf.

(b) Bestimme eine lineare Gleichung deren Lösungsmenge H ist.

(c) Bestimme die Schnittmengen von H mit

  i. der x_3-x_4-Ebene in Parameterdarstellung;

  ii. der Hyperebene $x_1 = 0$ in Koordinaten- und Parameterdarstellung.

(d) Bestimme den Schnittpunkt von H mit der Geraden $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}} + (0,1,-3,1)^{\mathrm{T}} K$.

47. Sei (V, K) ein Vektorraum und für $a, x \in V$ sei $\tau_a(x) = x + a$. Weiter sei $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ die Gruppe der semilinearen Bijektionen von V.

(a) Jedes $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ ist eine Affinität von $\mathrm{AG}(V, K)$.

(b) Für $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K),\ a \in V$ bestimme $\sigma' \in \Gamma\mathrm{L}(V, K),\ b \in V$ mit $(\tau_a \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \tau_a^{-1} = \tau_b \sigma'$.

(c) Berechne $\sigma \tau_a \sigma^{-1}$ und $\tau_b \sigma \tau_a (\tau_b \sigma)^{-1}$, wobei $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K),\ a, b \in V$.

48. Sei $(V, \mathbb{Z}_2)$ ein Vektorraum.

(a) $|\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_2)| = 6$ und $|\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}_2)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$,

(b) Jede Permutation von V ist ein Automorphismus des Inzidenzraums $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$. Wieviele davon gibt es?

(c) Der Fundamentalsatz gilt für den Inzidenzraum $\mathrm{AG}(2, \mathbb{Z}_2)$, nicht aber für den Inzidenzraum $\mathrm{AG}(3, \mathbb{Z}_2)$.

(d) Der Fundamentalsatz gilt doch, wenn man nur Automorphismen σ von $\mathrm{AG}(V, \mathbb{Z}_2)$ betrachtet, die "$\|_2$" aus dem einführenden Text vor (10.3) invariant lassen (d. h. $G \|_2 H \iff \sigma(G) \|_2 \sigma(H)$).