Geometrie II

Blatt 10 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

38. In einem affinen Raum $(A, \mathfrak{G})$ werden Translationen wie für Ebenen definiert (vgl. Blatt 3) und es gelten auch die grundlegenden Sätze.

(a) Beschreiben Sie mögliches genau die Fortsetzung einer Translation auf den projektiven Abschluss von A.

(b) Geben Sie Beispiele für Translationen auf $\mathrm{AG}(V, K)$ an (mit Begründung).

(c) Können Sie alle Translationen von $\mathrm{AG}(V, K)$ beschreiben?

Hausaufgaben

39. Im projektiven Raum $(P, \mathfrak{G})$ betrachte folgenden Schließungssatz von Fano:

Seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ komplanar, aber je drei nicht kollinear, dann liegen die Punkte

$$q_1 := \overline{p_1, p_4} \cap \overline{p_2, p_3}, \quad q_2 := \overline{p_2, p_4} \cap \overline{p_1, p_3}, \quad q_3 := \overline{p_1, p_2} \cap \overline{p_3, p_4}$$

auf einer Geraden.

Zeige: Im projektiven Koordinatenraum $\mathrm{PG}(V, K)$ gilt der Satz von Fano genau dann, wenn im Körper K gilt $1 + 1 = 0$ (man sagt, K habe die Charakteristik 2).

40. Gegeben sei $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$, $\quad G = (1, 2, 0, -1)\mathbb{R} + (-1, 0, 3, -2)\mathbb{R} \in \mathfrak{G}$ und $F' = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 ;\ x_0 = 0\}$.

(a) $F := \Phi(F')$ ist eine Hyperebene in P.

(b) Geben Sie einen Isomorphismus $\psi : \mathrm{AG}(3, \mathbb{R}) \to (P_F, \mathfrak{G}_F)$ an.
Tipp: Von Ebenen verallgemeinern.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt s von F und G.

(d) Beschreiben Sie $\psi^{-1}(G \setminus F)$ algebraisch.

41. Gegeben sei ein projektiver Raum $(P, \mathfrak{G})$ der endlichen Dimension n.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gerade gleich viele Punkte besitzt.
Wir definieren die *Ordnung* wie für projektive Ebenen.
Ab jetzt sei die Ordnung $q \in \mathbb{N}$.

(b) Jede Ebene in P hat $q^2 + q + 1$ Punkte.

(c) Jeder Unterraum der Dimension 3 hat $q^3 + q^2 + q + 1$ Punkte.

(d) Wie geht das weiter?